CALCULO AVANZADO

WATSON FULKS

Profesor de Matemáticas
Universidad del Estado
de Oregón.

NORIEGA EDITORES

EDITORIAL LIMUSA

MEXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Versión autorizada en español de la
octava reimpresión publicada en inglés
por JOHN WILEY & SONS, INC., N. Y.,
bajo el título ADVANCED CALCULUS, An Introduction to Analysis.
© JOHN WILEY & SONS, INC., N. Y.

Versión Española

ING. JOSÉ HERNÁN PÉREZ CASTELLANOS
Ingeniero Industrial, Profesor de
Matemáticas de la Escuela Superior
de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
del Instituto Politécnico Nacional,
México.

Revisión

LIC. SAÚL HAHN GOLDBERG
Licenciado en Ciencias Fisicomatemáticas
y Profesor de Matemáticas en la Escuela
Superior de Física y Matemáticas del Instituto
Politécnico Nacional de México,
Ingeniero de Comunicaciones y Electrónica.

La presentación y disposición en conjunto de
CÁLCULO AVANZADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1991, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.
Teléfono 521-50-98
Fax 512-29-03
Télex 1762410 ELIME

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1970
Primera reimpresión: 1973
Segunda reimpresión: 1978
Tercera reimpresión: 1982
Cuarta reimpresión: 1983
Quinta reimpresión: 1984
Sexta reimpresión: 1986
Séptima reimpresión: 1991
Impreso en México
(10498)

ISBN 968-18-0007-9

A mi Padre

Al Estudiante

Al usar este libro, primero debe prestar atención a las definiciones, puesto que describen la terminología de las matemáticas; y no puede esperarse el entender las matemáticas sin aprender el vocabulario, como tampoco puede esperarse el entender una lengua extranjera sin aprender su vocabulario. Como cualquier otro lenguaje, las matemáticas se desarrollan en parte adquiriendo términos de los lenguajes más próximos (en este caso principalmente el inglés), modificando su significado y apropiándoselos. Estos constituyen los términos técnicos de la materia. Puesto que el lenguaje de las matemáticas forma parte de la lengua del país, es importante distinguir entre el empleo técnico y el empleo no técnico.

Una palabra o una frase que se está definiendo se encuentra escrita en negritas, por ejemplo **convergencia uniforme**. Los teoremas que tienen nombre, como el **teorema fundamental del cálculo**, tendrán su nombre escrito en negritas. Un signo igual con tres guiones ($\equiv$) se usa en dos formas. Significará identidad, como por ejemplo

$$x^2 - y^2 \equiv (x - y)\,(x + y).$$

Y también significará "define a" o "se define por". Por ejemplo,

$$f(x) \equiv 2x^2 + 3 \qquad \{-1 \leqslant x \leqslant 7\}$$

significa que la función f está definida en el intervalo designado. En mi concepto, existen pocas causas de confusión derivadas de los usos ambiguos aquí indicados.

En el desarrollo del texto ocasionalmente se hace referencia a los ejercicios mediante un número. Por ejemplo, con frecuencia se encuentran observaciones entre paréntesis tales como (ver Ejercicio B7). A menos que se indique un número de sección, el ejercicio en cuestión se encontrará en el primer conjunto de ejercicios *que siga* a la referencia.

Algunas palabras más acerca de la forma de estudiar: al tratar de entender una demostración, debe observarse cuál es el concepto básico. Debe tratarse de analizar la demostración y decidir que una determinada

idea (o ideas) involucrada es crítica, que la demostración gira en torno de ella y que las partes restantes son cálculos secundarios cuya presencia se entiende claramente una vez que se localiza el punto fundamental.

Es conveniente que se entienda el papel que cada proposición juega en la construcción de un capítulo. ¿Cuáles, debe preguntarse uno mismo, son resultados preliminares o secundarios, cuáles tienen una importancia primordial y cuáles una importancia menor? Los nombres —lema, teorema, corolario— proporcionan una regla aproximada pero de ninguna manera precisa.

Finalmente, después de lo anterior, puede decirse que ninguna indicación acerca de la forma de estudiar puede remplazar un interés real y creciente en la materia.

WATSON FULKS

Corvallis, Oregon

Al Maestro

Este libro está escrito para servir como una introducción al análisis. Para lograrlo hice un esfuerzo por presentar las demostraciones analíticas basadas en la intuición geométrica y darle un mínimo de confianza a los argumentos geométricos. De hecho, en el desarrollo del texto se hace un esfuerzo en tal sentido. No he tenido un éxito completo en tratar de evitar algún uso esencial de la intuición en las demostraciones, pero he localizado mis serias transgresiones al Capítulo 13 donde se encuentran los teoremas de Green, Gauss y Stokes y algunas de sus consecuencias.

Al igual que muchos que se extravían de la angosta senda de la virtud, he intentado racionalizar mi acción. Mi defensa es simplemente que para evitar tales argumentos geométricos habría que aplicar más trabajo difícil del que considero recomendable. Con la intención de mantener un curso entre la heurística del cálculo elemental por una parte, y el rigor de la teoría de funciones y la topología, por la otra, he preferido pecar en la dirección de la heurística en el Capítulo 13. La motivación para ello es, por supuesto, que lo que sacrifico en lógica espero ganarlo en pedagogía.

Ya es bastante para apología.

El libro está dividido en tres partes, empezando con el cálculo de funciones de una sola variable real. En esta parte he delineado algunos de los aspectos más significativos de la teoría. Quizá la característica más novedosa sea la demostración de la existencia de la integral de una función continua sin la aplicación de la continuidad uniforme. Con ello se logra el aplazamiento de la discusión de las propiedades más difíciles de las funciones continuas hasta que el estudiante ha adquirido cierta madurez.

La parte intermedia se refiere al cálculo de algunas variables. Empieza con un capítulo sobre vectores aplicándose la terminología y la notación vectorial consistentemente y con efectividad. El Capítulo 11, que se refiere a las funciones inversas y a las transformaciones, contiene una demostración del teorema de inversión, la cual es una adaptación de una nueva demostración presentada por el Profesor H. Yamabe (*American Mathematical Monthly* LXIV, 1957, páginas 725-726), una demostración

que puede llevarse a cabo sobre ciertos tipos de espacios de dimensión infinita.

La tercera y última parte del libro se refiere al tratamiento de la teoría de la convergencia aplicada a las series infinitas y a las integrales impropias. El criterio de Cauchy constituye la base para un tratamiento unificado de estos tópicos.

Los problemas en cada conjunto están clasificados como Ejercicios A, B o C. Esta clasificación se basa en una graduación aproximada de la dificultad de los problemas. Los Ejercicios A son aplicaciones directas de la teoría, aun cuando los cálculos en algunos de ellos pueden ser un poco largos. Los Ejercicios B son un poco más profundos y los Ejercicios C, en general, están dirigidos a los mejores estudiantes.

No presento bibliografía aunque, por supuesto, debo reconocer la influencia de muchos libros, viejos y nuevos, y en principio se supone.

Mi profundo reconocimiento a la influencia de colegas con quienes discutí el manuscrito. En particular, debo mencionar al Profesor Warren Stenberg con quien sostuve un gran número de conversaciones, y al Profesor Jack Indritz, quien leyó una gran parte del manuscrito aportando su valiosa crítica.

WATSON FULKS

Contenido

PARTE I CALCULO DE UNA VARIABLE

Capítulo 1	**El sistema numérico**		**19**
	1.1	Los axiomas de Peano	19
	1.2	Los números racionales y la aritmética	21
	1.3	Los números reales: completitud	25
	1.4	La geometría y el sistema numérico	28
	1.5	Conjuntos acotados	30
	1.6	Algunas indicaciones sobre lógica	32
	1.7	Valor absoluto	33
Capítulo 2	**Funciones, sucesiones y límites**		**39**
	2.1	Mapeos, funciones y sucesiones	39
	2.2	Límites	43
	2.3	Operaciones con límites (sucesiones)	47
	2.4	Límites de funciones	53
	2.5	Operaciones con límites (funciones)	57
	2.6	Sucesiones monótonas	60
	2.7	Funciones monótonas	63
Capítulo 3	**Continuidad y diferenciabilidad**		**67**
	3.1	Continuidad. Continuidad uniforme	67
	3.2	Operaciones con funciones continuas	70
	3.3	La propiedad del valor intermedio	72
	3.4	Funciones inversas	73
	3.5	La derivada. Regla de la cadena	77
	3.6	El teorema del valor medio	82
Capítulo 4	**Integración**		**93**
	4.1	Introducción	93
	4.2	Lemas preliminares	95
	4.3	La integral de Riemann	101

4.4 Propiedades de la integral definida 109
4.5 El teorema fundamental del cálculo 113
4.6 Propiedades adicionales de las integrales 116

Capítulo 5 Las funciones trascendentales elementales 121
5.1 El logaritmo 121
5.2 La función exponencial 123
5.3 Las funciones circulares 126

Capítulo 6 Límites y continuidad 139
6.1 Puntos límite. Puntos de acumulación 139
6.2 El criterio de Cauchy 141
6.3 Límite superior y límite inferior 145
6.4 Propiedades más profundas de las funciones continuas 149

Capítulo 7 Propiedades de las funciones diferenciables 153
7.1 El teorema del valor medio de Cauchy 153
7.2 La regla de L'Hospital 155
7.3 Fórmula de Taylor con residuo 159
7.4 Valores extremos 165

PARTE II CALCULO VECTORIAL

Capítulo 8 Vectores y curvas 171
8.1 Introducción y definiciones 171
8.2 Multiplicaciones de vectores 176
8.3 Los triples productos 183
8.4 Independencia lineal. Bases. Orientación 187
8.5 Geometría analítica vectorial 190
8.6 Espacios vectoriales de otras dimensiones: E_n 193
8.7 Funciones vectoriales. Curvas 196
8.8 Curvas rectificables y longitud de arco 197
8.9 Curvas diferenciables 200

Capítulo 9 Funciones de algunas variables. Límites y continuidad 290
9.1 Un poco de topología: conjuntos abiertos y cerrados 209
9.2 Un poco más de topología: sucesiones, valores límite, puntos de acumulación, criterio de Cauchy 213
9.3 Límites 218
9.4 Funciones vectoriales de un vector 221
9.5 Operaciones con límites 223
9.6 Continuidad 225
9.7 Descripción geométrica de una función 227

Capítulo 10 Funciones diferenciables 231
10.1 Derivadas parciales 231
10.2 Diferenciabilidad. Diferenciales totales 237
10.3 El vector gradiente. El operador del. Derivadas direccionales 243
10.4 Funciones compuestas. La regla de la cadena 247
10.5 El teorema del valor medio y el teorema de Taylor para diversas variables 254
10.6 La divergencia y el rotacional de un campo vectorial 256

Capítulo 11 Transformaciones y funciones implícitas. Valores extremos 263
11.1 Transformaciones. Transformaciones inversas 263
11.2 Transformaciones lineales 264
11.3 El teorema de inversión 271
11.4 Inversas globales 278
11.5 Coordenadas curvilíneas 280
11.6 Funciones implícitas 284
11.7 Valores extremos 288
11.8 Valores extremos bajo restricciones 291

Capítulo 12 Integrales Múltiples 297
12.1 Integrales sobre rectángulos 297
12.2 Propiedades de la integral. Clases de funciones integrables 303
12.3 Integrales iteradas 305
12.4 Integración sobre regiones. Área y volumen 309

Capítulo 13 Integrales de línea y superficie 319
13.1 Integrales de línea. Potenciales 319
13.2 Teorema de Green 327
13.3 Superficies. Área 336
13.4 Integrales de superficie. El teorema de la divergencia 342
13.5 Teorema de Stokes. Superficies orientables 348
13.6 Algo de heurística física 353
13.7 Cambio de variables en las integrales múltiples 355

PARTE III TEORIA DE LA CONVERGENCIA

Capítulo 14 Series infinitas 365
14.1 Convergencia, absoluta y condicional 365
14.2 Series con términos no negativos: Pruebas de comparación 369

14.3 Series con términos no negativos: Pruebas de la razón y de la raíz. Restos 375
14.4 Series con signos variables 378
14.5 Pruebas más delicadas 381
14.6 Rearreglos 383

Capítulo 15 Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme 389
15.1 Introducción 389
15.2 Convergencia uniforme 390
15.3 Consecuencias de la convergencia uniforme 395
15.4 Pruebas de Abel y Dirichlet 401
15.5 Un teorema de Dini 405

Capítulo 16 La serie de Taylor 409
16.1 Series de potencias. Intervalo de convergencia 409
16.2 Propiedades de las series de potencias 414
16.3 Las series de Taylor y Maclaurin 420
16.4 Las aritméticas de las series de potencias 424
16.5 Substitución e inversión 432
16.6 Series complejas 433
16.7 Funciones analíticas reales 436

Capítulo 17 Integrales impropias 439
17.1 Integrales impropias. Convergencia condicional y absoluta 439
17.2 Integrales impropias con integrandos no negativos 446
17.3 El valor principal de Cauchy 449
17.4 Una prueba de alternación 450
17.5 Integrales múltiples impropias 452

Capítulo 18 Representaciones integrales de funciones 457
18.1 Introducción. Integrales propias 457
18.2 Convergencia uniforme 461
18.3 Consecuencias de la convergencia uniforme 467

Capítulo 19 Funciones Gama y Beta. Método de Laplace y fórmula de Stirling 481
19.1 La función Gama 481
19.2 La función Beta 484
19.3 Método de Laplace 487
19.4 Fórmula de Stirling 491

Capítulo 20 Series de Fourier 493
20.1 Introducción 493
20.2 Aproximación en la media. Desigualdad de Bessel 498

20.3 Algunos lemas útiles 500
20.4 Teoremas de convergencia 503
20.5 Derivación e integración. Convergencia uniforme 510
20.6 Series senoidal y cosenoidal. Cambio de escala 514
20.7 La integral de Fourier 517
20.8 Espacios de funciones. Conjuntos ortonormales completos 522

Fórmulas elementales de derivación e integración 529

Respuestas, sugerencias y soluciones 531

INDICE 547

parte 1

CALCULO DE UNA VARIABLE

1

El sistema numérico

1.1 LOS AXIOMAS DE PEANO

Cualquier estudio del análisis matemático tiene su base en el sistema numérico. Por lo tanto, es importante para los estudiantes entender cómo puede desarrollarse la aritmética a partir de los números naturales (otro nombre para los enteros positivos). No es nuestra intención llevar a cabo ese desarrollo aquí, puesto que eso es más propio de un curso acerca de la teoría de funciones. Sin embargo, deseamos hacer algunos comentarios acerca de la estructura lógica de ese desarrollo.

El punto de partida acostumbrado en el desarrollo de los números reales es un cierto conjunto de axiomas que fueron formulados por primera vez por el matemático italiano Peano. Estos axiomas establecen que los números naturales satisfacen ciertas propiedades. A partir únicamente de estas propiedades, haciendo las definiciones apropiadas cuando sea necesario, podemos desarrollar todas las reglas conocidas de la aritmética. En la terminología de la lógica formal, tenemos un conjunto de objetos indefinidos para los cuales escogimos el nombre de **números naturales,** y que satisfacen los axiomas de Peano. Esto significa, simplemente, que los números naturales se toman como los «átomos» básicos de nuestro sistema matemático en términos de los cuales expresamos los demás conceptos matemáticos, pero que no pueden expresarse en términos más fundamentales.

Quizá una forma más fácil de visualizar la situación, puesto que, después de todo, no podemos decir que nunca hemos escuchado acerca de aritmética o los números racionales, etc., es ésta: podemos verificar que los enteros positivos son un sistema de objetos que satisfacen los axiomas de Peano. Ahora podemos proceder al establecimiento de todo lo que sabemos de aritmética, usando solamente esas propiedades establecidas explícitamente en los axiomas.

Los cinco axiomas de Peano son los siguientes:

Axioma 1. 1 es un número natural.

Axioma 2. Todo número natural n tiene asociado en una forma única otro número natural n' llamado el **sucesor** de n.

Axioma 3. El número 1 no es sucesor de ningún número natural.

Axioma 4. Si dos números naturales tienen sucesores iguales entonces, asimismo, son iguales. Esto es, si $n' = m'$, entonces $n = m$.

Axioma 5. Supóngase que M es una colección o un conjunto de números naturales con las propiedades

(i) 1 está en M.
(ii) n' está en M siempre que n esté en M.

Entonces, la colección M consiste de todos los números naturales.

Aquí la igualdad se usa en el sentido de identidad numérica; es decir, $m = n$ significa que m y n son símbolos utilizados para el mismo número. Así tomamos

(i) $m = m$,
(ii) $m = n$ implica que $n = m$,
(iii) $m = n$, $n = k$ implica que $m = k$,

como parte de la lógica fundamental y no las enlistamos como parte de nuestro conjunto de axiomas numéricos.

Nótese que esta lista de propiedades no contiene ninguna proposición explícita del orden lineal de los números. Existe un «primero», a saber el 1, que se distingue por no ser sucesor. El sucesor n' de un número natural n se convierte en $n + 1$ después de que se ha definido la adición. De hecho, esencialmente ésta es la forma en que se define la adición. A continuación, podemos proceder a mostrar que los números naturales deben situarse después del 1 en su orden conocido: 1, 2, 3, 4, ... (Supuesto que 2, 3, 4, no están dados en los axiomas, se definen por $2 = 1' = 1 + 1$, $3 = 2' = 2 + 1$, ...)

El axioma 5 es, precisamente, el principio de la inducción matemática. Es una importante herramienta en el desarrollo técnico de las propiedades del sistema numérico que se han discutido. En ocasiones, haremos uso de este principio posteriormente y veremos que la afirmación del

axioma 5 es equivalente a una más conocida que se da en los textos elementales.

Como se indicó anteriormente, podemos partir con los números naturales y, conociendo únicamente las propiedades y las relaciones establecidas por los axiomas, deducir toda la aritmética. ¿Por qué se supone que los matemáticos se interesan en partir de tales principios primitivos? ¿Son verdaderas $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m$ porque pueden deducirse como una consecuencia de los axiomas? En cierto sentido, existe otra forma completamente diferente de ver las cosas. Los axiomas son «verdaderos» o válidos porque, a partir de ellos, podemos deducir $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m$ (después de que se han definido la adición y la multiplicación) y todas las demás reglas comunes de la aritmética. Un aspecto de esa forma de ver las cosas es simplemente estético: da un desarrollo limpio y bello de una masa de conocimientos útiles y bien conocidos a partir de fundamentos sencillos establecidos con precisión. Existe una belleza artística en tal estructura.

Otro propósito más pragmático es que sirve como un auxiliar para responder a la pregunta, «¿qué es una demostración?» Si tratamos de hacer matemáticas sin un fundamento preciso, una «demostración» puede ser cualquier argumento convincente basado en lo que uno «sabe». Pero, puesto que este conocimiento no está bien formulado, esto puede conducir a argumentos circulares: el Teorema A puede basarse eventualmente en el Teorema B, el Teorema B puede basarse en el Teorema C y, finalmente, el Teorema C puede basarse, a su vez, en el Teorema A. Si las demostraciones son largas y complicadas, puede ser difícil observar esos argumentos circulares. Contando con un sistema de axiomas bien formulado, se reduce la posibilidad de tales equivocaciones. Una demostración se transforma en un argumento lógico basado directamente en los axiomas o en teoremas previos basados en los axiomas. Por supuesto, siempre existe la posibilidad del error humano porque todos cometemos equivocaciones pero, al menos, este punto de vista nos proporciona una idea más clara de lo que deseamos obtener en una demostración.

En todo caso, este es un ejemplo de lo que se llama **acercamiento axiomático** para el estudio de las matemáticas. Con esto queremos decir simplemente que todo el conjunto de una cierta sección de las matemáticas se ha reducido a unos cuantos postulados y la estructura completa entonces puede desarrollarse a partir de ellos mediante un estudio lógico de las consecuencias de esos postulados.

1.2 LOS NUMEROS RACIONALES Y LA ARITMETICA

Después de que se han desarrollado las propiedades sobresalientes de los números naturales, el siguiente paso es la introducción y el estudio

de los números **racionales.** Los números racionales, como debe recordarse, son aquellos números que pueden representarse como razones de los números enteros; en otras palabras, los números racionales son fracciones comunes. Enlistaremos a continuación algunas propiedades de los racionales que pueden deducirse en el curso de su desarrollo a partir de los números naturales. Así, estas propiedades de los números racionales realmente son consecuencias de los axiomas de Peano.

El signo $\geqslant$ se lee «es mayor o igual a» y significa que se cumple una de las dos posibilidades establecidas. Así, $a \geqslant b$ significa que a es (1) mayor que b, o bien, (2), igual a b. El signo $\leqslant$ se lee «menor o igual a» y se define de manera semejante.

I. Propiedades de Orden de los Números Racionales

1. Para dos racionales cualesquiera a y b, es verdadera precisamente una de las afirmaciones $a > b$, $a = b$, $a < b$. Esta es la ley de tricotomía.

2. De $a \leqslant b$ y $b < c$ se tiene $a < c$. En forma semejante, $a < b$ y $b \leqslant c$ implica que $a < c$. Con esto se dice que la desigualdad es transitiva.

II. Propiedades Aritméticas de los Números Racionales

1. Adición

   (a) Para todo racional a y b existe un racional único c, llamado **suma** de a y b y se escribe $c = a + b$.

   (b) La adición es conmutativa:

$$a + b = b + a.$$

   (c) La adición es asociativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

   (d) $a < b$ implica que $a + c < b + c$ para toda c.

   (e) Existe un número único 0 tal que $a + 0 = a$ para toda a.

2. Sustracción

   (a) Para todo racional a y b, existe un racional único d para el cual $a + d = b$. El número d se llama **diferencia** de a y b y se denota por $b - a$.

Con base en II 2 (a) se define el **negativo** de un número. De II 2 (a) se ve que, para todo racional a, existe un racional x para el cual

$$a + x = 0.$$

A ese número lo llamamos $(-a)$. Por tanto $(-a)$ se define por

$$(-a) = 0 - a.$$

Con frecuencia se escribe $-a$ en lugar de $(-a)$.

3. Multiplicación

   (a) Para todo racional a y b, existe un racional único p llamado **producto** de a y b y se escribe $p = a \cdot b$, o bien, $p = ab$.

   (b) La multiplicación es conmutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

   (c) La multiplicación es asociativa:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

   (d) La multiplicación es distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

   (e) $a > b$, $c > 0$ implica que $ac > bc$.

   (f) $a \cdot 1 = a$ para toda a.

4. División

   (a) Para todo racional a y b con $b \neq 0$, existe un número único q para el cual $b \cdot q = a$. El número q se llama **cociente** de a y b y se escribe $q = a/b$.

Como se estableció en el primer párrafo de esta sección, estas propiedades se deducen de los axiomas de la Sección 1.1. Además, a partir de las proposiciones enlistadas aquí, podemos deducir todas las demás reglas elementales de la aritmética. Por lo tanto, esta lista también puede tomarse como un sistema de axiomas para la descripción de la aritmética. A continuación, se darán algunos ejemplos de la deducción de estas reglas a partir de las propiedades enlistadas en I y II.

EJEMPLO 1. Demostrar que $a \cdot 0 = 0$ para todo racional a.

Solución. De acuerdo con II 1(*e*),

$$b + 0 = b \text{ para todo } b.$$

De donde $a \cdot (b + 0) = a \cdot b$

o bien, por II 3(*d*), $a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot b = a \cdot b + 0$

Así, debido a la unicidad de la diferencia [II 2(*a*)], se tiene

$$a \cdot 0 = 0.$$

EJEMPLO 2. Demostrar que $(-1) \cdot a = -a$.

Solución. Por la definición de (—1), se tiene

$$1 + (-1) = 0.$$

Multiplicando ambos miembros por a, aplicando la ley distributiva y el ejemplo 1, se obtiene

$$a + (-1) \cdot a = 0.$$

De aquí que $(-1) \cdot a$ es una solución de

$$a + x = 0.$$

De acuerdo con II 2(*a*), existe solamente una solución, a saber, $(-a)$. Por lo tanto,

$$(-1) \cdot a = -a.$$

EJERCICIOS B

1. El siguiente conjunto de problemas consiste en algunas reglas de la aritmética que han de establecerse con base en las propiedades enlistadas en I y II de esta sección. En general, aunque no siempre, las primeras reglas son útiles para establecer las siguientes. También pueden aplicarse los dos ejemplos:

(*a*) $b + (-a) = b - a$ (*b*) $b(-a) = -(a \cdot b)$ (*c*) $-(-a) = a$

(*d*) $(-a)(-b) = a \cdot b$ (*e*) $a > 0$ implica que $-a < 0$

(*f*) $a \neq 0$ implica que $a^2 > 0$ (*g*) $1 > 0$

(*h*) $a \cdot b = 0$ implica que $a = 0$ o bien $b = 0$

(*i*) $a > 0$ implica que $1/a > 0$

(*j*) $a > 0, b > 0$ implica que $a \cdot b > 0$

(*k*) $a > 0, b < 0$ implica que $a \cdot b < 0$

(*l*) $a < 0, b < 0$ implica que $a \cdot b > 0$

(*m*) $a > 0, b > 0$ implica que $a + b > 0$

(*n*) $\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{xu}{yv}$ (*o*) $\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(xv) + (yu)}{yv}$

1.3 LOS NUMEROS REALES: COMPLETITUD

Se han enlistado algunas de las propiedades de los números racionales. Mientras queramos efectuar únicamente aritmética, este conjunto de números y las reglas (y sus consecuencias) enlistadas en I y II son adecuadas. Sin embargo, si nos aventuramos en el álgebra —es decir, si deseamos extraer raíces, así como sumar, restar, multiplicar y dividir— entonces nuestro sistema numérico no es suficiente para proporcionar una solución para todos los problemas. Por ejemplo, si deseamos una solución para la ecuación

$$x^2 = 2,$$

no encontraremos una entre los racionales. Con esto queremos decir que no existe número racional x cuyo cuadrado sea 2. Probablemente, el lector haya visto ya una demostración de este hecho pero revisaremos ese argumento aquí.

1.3a Teorema. No existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

Demostración (por contradicción). Supongamos que existe tal número, x. Entonces x podría escribirse como p/q, donde puede suponerse que la fracción se encuentra en su más simple expresión. Por lo tanto, p y q no tienen factores comunes. Entonces,

$$p^2/q^2 = 2$$

o bien,

$$q^2 = p^2/2$$

Puesto que q^2 es un entero, p^2 debe ser divisible entre 2. Pero si p^2 es divisible entre 2, entonces p es divisible entre 2, de modo que existe un entero k para el cual $p = 2k$. Entonces,

$$q^2 = p^2/2 = (2k)^2/2 = 2k^2$$

o bien,

$$k^2 = q^2/2.$$

Mediante el mismo argumento, q es divisible entre 2. Esta contradicción completa la demostración. ∎ *

El estudiante, por supuesto, está familiarizado con la interpretación geométrica de los números como puntos sobre una línea. Con el objeto

* El símbolo ∎ se empleará para denotar que finalizó una demostración. Este símbolo sustituye a las iniciales Q.E.D.

de enfatizar ciertos aspectos de esta interpretación, recordaremos sus principales características. Sobre una línea recta se escoge un punto que se marca O y se le da el nombre de origen. Se toma una unidad de longitud conveniente y a cada número x se hace corresponder el punto cuya distancia desde O es x, medida hacia la derecha si x es positivo y, hacia la izquierda, si x es negativo. Obsérvese que la ley aritmética

$$a > b, \qquad b > c \qquad \text{implica} \qquad a > c$$

encuentra su correspondiente geométrico en la siguiente afirmación acerca de los puntos P_1, P_2, P_3 sobre una línea: Si P_1 se encuentra a la derecha de P_2 y P_2 a la derecha de P_3, entonces P_1 se encuentra a la derecha de P_3.

Ahora, si x es cualquier número racional, entonces todos los números racionales caen en dos clases asociadas con x, a saber, las clases U y L (superior e inferior), donde U consiste en todos los racionales mayores que x y L consiste en todos los racionales menores que x. El número x, asimismo, puede asignarse ya sea a U o a L. Tal separación o corte en los racionales provocado por un racional definido x divide a los racionales en dos clases tales que cada miembro de la primera clase, U, es mayor que todo miembro de la segunda clase, L.

En forma semejante, si P es cualquier punto sobre la línea, entonces todos los puntos de la línea caen en dos clases R y L (derecha e izquierda) asociadas con P, donde R consiste en todos los puntos a la derecha de P y L en todos los puntos a la izquierda de P. El punto P, asimismo, puede ponerse en cualquiera de las dos clases. Pero para todos los puntos P la separación o corte conduce a una partición de los puntos de la línea en dos clases tales que cada punto en la primera clase, R, está a la derecha de todo punto en la segunda clase, L.

Ahora, existen puntos sobre la línea que a ningún número racional corresponden. Porque si marcamos el punto cuya distancia desde 0 es $\sqrt{2}$, vemos, de acuerdo con el Teorema 1.3a, que no puede haber número racional que le corresponda. En efecto, no es muy difícil demostrar que existe un número infinito de puntos que no corresponden a número racional alguno. Esto significa que, si marcamos todos los puntos sobre la línea que corresponden a números racionales, existe un número infinito de puntos que se dejan sin marcar. En efecto, en todo intervalo de la línea existen puntos que corresponden a números racionales y puntos que corresponden a números no racionales. (Ver Ejercicios C3 y C4 en la Sección 1.7).

Estas consideraciones conducen al reconocimiento de la existencia de vacíos o una falla en la continuidad o completitud en la distribución de los números racionales comparada con la distribución de los puntos sobre una línea. Aceptemos como un hecho básico de la geometría que los puntos están distribuidos en forma continua sobre una línea; esto es, no existen vacíos o fallas en la línea. Para este hecho no ofrecemos demostración, sino que lo tomaremos como un axioma geométrico.

Mientras que no ofrecemos una demostración de este concepto de la distribución continua de los puntos sobre una línea, deseamos formularla en una forma precisa que podamos usar en la discusión del sistema numérico. La formulación que usaremos se debe al matemático alemán Dedekind, cuyo tratamiento seguiremos muy estrictamente. Dedekind usa la **separación o corte** descrita anteriormente para caracterizar la completitud de la línea. Su formulación es la siguiente:

Supóngase que todos los puntos sobre la línea están separados en dos clases no vacías R y L de modo que cada punto en R se encuentra a la derecha de todo punto en L. Entonces, existe exactamente un punto P que provoca este corte, y P, asimismo, es el punto en la extrema derecha de L o el punto en la extrema izquierda de R.

No ofreceremos demostración para esta afirmación, como no ofrecimos demostración para la afirmación de que todos los puntos sobre la línea están distribuidos en forma continua. Tomemos este hecho simplemente como una proposición precisa de la continuidad o completitud, una formulación que se adapta al objeto de considerar las cuestiones análogas acerca de la distribución de los números.

La afirmación análoga para los números racionales no puede ser cierta. Para comprenderlo, basta solamente dar un ejemplo donde falla; describamos este ejemplo a continuación.

Sea la clase superior U, que corresponde a R en la línea, el conjunto de todos los racionales positivos cuyos cuadrados son mayores que 2, y sea L todos los racionales restantes. Supóngase que el corte se produce mediante un número racional x. Entonces es posible demostrar (se omitirá la técnica de la demostración) que $x^2=2$. Pero esto contradice al Teorema 1.3a. Por lo tanto, vemos que el análogo para los racionales, del axioma de completitud de la línea, no es correcto.

El último gran paso en el desarrollo del sistema numérico es definir los números que llenen los vacíos que se han presentado en las observaciones previas. Estos nuevos números se llaman **números irracionales.** El sistema de números que consiste en los racionales y los irracionales juntos recibe el nombre de **sistema de los números reales.** Por lo tanto, un número real puede ser racional o irracional.

Los detalles relacionados con el desarrollo de la definición de los nuevos números se omitirá. Deseamos enfatizar dos importantes hechos

acerca del sistema de números reales. Primero, las nociones de adición y multiplicación pueden definirse para los números reales de manera que satisfagan las propiedades enlistadas para los racionales en I y II de la Sección 1.2; esto es, si leemos «número real» en lugar de «número racional», las conclusiones que se establecen siguen siendo verdaderas. Segundo, y muy importante, el sistema de números reales es completo; es decir, el análogo del axioma geométrico sobre la completitud de la línea puede probarse como un teorema.

III. Teorema de Dedekind

Supóngase que todos los números reales se dividen en dos clases no vacías, R y L, de modo que todo número en R es mayor que todo número en L. Entonces existe un número real x tal, que x es mayor, o igual, a todo número en L y menor, o igual, a todo número en R.

Designamos esta proposición con el número III por la siguiente razón: las afirmaciones enlistadas en I y II de la Sección 1.2, junto con III de la presente sección, pueden tomarse como un sistema de axiomas para las descripciones de los números reales. Es decir, todas las propiedades de los números reales pueden desarrollarse a partir de estas proposiciones únicamente.

La importancia científica del desarrollo del sistema de números reales bosquejado aquí, por supuesto, pone una gran cantidad de conocimientos útiles en forma limpia, lógica. También deseamos enfatizar que ese sistema subraya la analogía entre los números reales y los puntos sobre una línea, mas sin embargo, al mismo tiempo, elimina la dependencia lógica del análisis sobre la geometría. Todos los teoremas básicos del cálculo, a partir de este momento, tendrán demostraciones aritméticas puras.

1.4 LA GEOMETRIA Y EL SISTEMA NUMERICO

El análisis es la rama de las matemáticas que se refiere a los límites y a sus operaciones. Los matemáticos, tal y como el estudiante debe haber sospechado con lo dicho en la sección anterior, gustan de basar su estudio del análisis en la aritmética, sin dependencia lógica en la geometría. Sin embargo, tal y como el estudiante sabe, los diagramas geométricos son valiosos auxiliares cuando se intenta resolver muchos tipos de problemas. No existe objeción respecto al uso de tales recursos; en verdad, debe animarse a usarlos. Pero su uso debe servir como guía y no, si es posible evitarlo, como partes esenciales de un argumento.

El lenguaje geométrico con su potencia altamente sugestiva también puede ser muy útil y puede dársele significado aritmético. Definiremos,

en esta sección, algunos términos geométricos y algunos otros que se presentarán ocasionalmente durante el desarrollo del libro. Esto, por supuesto, es un intento de aprovechar la analogía geométrica que se ha puntualizado. Por lo tanto, confiaremos principalmente en la geometría para nuestra inspiración, pero, donde sea posible, evitaremos todo uso esencial de la geometría en nuestros argumentos. A este respecto, tendremos un éxito razonable, excepto en el Capítulo 13. Cuando sea necesario apoyarse en la geometría, en cualquier forma esencial, se hará notar cuidadosamente.

A continuación se procederá a definir un número de términos geométricos. Puesto que existen pocos de éstos, el estudiante deseará regresar a esta sección hasta que se familiarice con todos estos términos.

Hablaremos del sistema de números reales como un **espacio unidimensional** y, por supuesto, lo visualizaremos como una línea.

En un espacio unidimensional se usará la palabra **punto** para dar a entender «número».

Un **conjunto de puntos** es una colección de puntos.

Un **intervalo** es un conjunto de puntos descrito mediante desigualdades de cualquiera de los siguientes tipos:

$$\begin{array}{ll} \{a \leqslant x \leqslant b\} & \text{intervalo cerrado} \\ \{a \leqslant x < b\} & \text{intervalos semi-abierto} \\ \{a < x \leqslant b\} & \text{o semi-cerrado} \\ \{a < x < b\} & \text{intervalo abierto} \end{array}$$

En general, un conjunto de puntos se representará colocando su descripción entre llaves. Así, hablaremos del «intervalo $\{a \leqslant x < b\}$» en lugar del «intervalo descrito por $\{a \leqslant x < b\}$».

Los **puntos extremos** del intervalo son a y b; a es el punto extremo izquierdo, b el punto extremo derecho. La **longitud** del intervalo es $b - a$.

Una **vecindad** de un punto x_0 es un intervalo abierto centrado en x_0: $\{x_0 - h < x < x_0 + h\}$.

Una **vecindad agujereada** de un punto x_0 es una vecindad en la cual se ha suprimido el propio punto x_0. Por lo tanto, consiste en dos intervalos abiertos colindando en el punto x_0: $\{x_0 - h < x < x_0\}$ y $\{x_0 < x < x_0 + h\}$.

Un número x_0 es un **punto interior** de un conjunto de puntos S si existe una vecindad de x_0 que está completamente contenida en S. Por ejemplo, si S es el intervalo $\{-1/2 < x \leqslant 1\}$, entonces $x_0 = 3/4$ es un punto interior pero $x_0 = 1$ no lo es.

Se dice que un número es un **elemento** de un conjunto de puntos si es un miembro del conjunto.

También es conveniente hablar algo acerca de la geometría de los espacios de dimensión superior. Tal y como un espacio unidimensional es la colección de todos los números reales, así un **espacio bidimensional** es la colección de todas las parejas ordenadas (x, y) de números reales. Estas parejas ordenadas reciben el nombre de **puntos** en el espacio bidimensional. Visualizamos este hecho geométricamente como un plano donde se sitúan los puntos en la forma usual en un sistema coordenado rectangular cartesiano. En forma semejante, un **espacio tridimensional** es la colección de ternas ordenadas (x, y, z), visualizadas también en términos de un sistema coordenado rectangular. Al discutir estos espacios, el término **conjunto de puntos** significa una colección de parejas ordenadas, ternas ordenadas, etc., de números reales.

1.5 CONJUNTOS ACOTADOS

Debe hacerse notar que la palabra «conjunto» cubre colecciones de puntos, complicadas y dispersas, así como colecciones de puntos, sencillas, tales como los intervalos. En verdad, mucho de lo que sigue parecerá trivial y sin interés pero no es así. Aunque el procedimiento desarrollado se destina principalmente para manejar conjuntos complicados, se aplica igualmente bien a conjuntos sencillos.

Se dirá que un conjunto S está **acotado superiormente** si existe un número M con la propiedad de que

$$x \leqslant M \qquad \text{si } x \text{ está en } S.$$

En forma semejante, S está **acotado inferiormente** si existe un número m con la propiedad de que

$$x \geqslant m \qquad \text{si } x \text{ está en } S.$$

Si S está acotado superior e inferiormente, entonces se dice que está **acotado.** En este caso existe un número N tal que

$$-N \leqslant x \leqslant N \qquad \text{si } x \text{ está en } S.$$

Los números M, m y N se llaman **cotas** del conjunto S. Por ejemplo, si S es el intervalo $\{-1/2 < x \leqslant 1\}$, entonces $M = 2$ y $m = -3$ son cotas para S. $M = 2$ es una cota superior y $m = -3$ es una cota inferior. Obviamente éstas *no* son las cotas más precisas porque existen cotas superiores menores que 2 y cotas inferiores mayores que -3, por ejemplo, $3/2$ y -1. Pero todavía éstas no son las cotas más precisas. Puede verse fácilmente que $M = 1$ es la mínima cota superior y $m = -1/2$ la máxima cota inferior. Daremos una definición precisa para estos términos:

Supóngase que S es un conjunto acotado superiormente y supóngase que M_0 es una cota superior de S la cual es menor que o igual a cualquier otra cota superior. Entonces M_0 recibe el nombre de **mínima cota superior** o **supremum** de S y se denota por

$$M_0 = \sup_S x$$

Es evidente que si S tiene un máximo o elemento mayor, entonces ese elemento es el supremum (ver Ejercicio B6). Si S no tiene máximo, entonces su supremum se designa para reemplazar ese máximo en los cálculos.

En forma semejante, si m_0 es una cota inferior de S y es mayor que o igual a cualquier otra cota inferior, entonces se llama la **máxima cota inferior** o **infimum** de S y se denota por

$$m_0 = \inf_S x.$$

Por supuesto que el infimum guarda respecto al mínimo la misma relación que el supremum guarda respecto al máximo.

Para reforzar nuestra afirmación de que el supremum reemplaza al máximo, probaremos el siguiente teorema.

1.5a Teorema. Si S está acotado superiormente y $M_0 = \sup_S x$, entonces para todo $y < M_0$ existe un x en S para el cual

$$y < x \leqslant M_0.$$

Demostración. (Nótese que no importa si y está en S o no). Sea $y < M_0$ dado. Supóngase, por contradicción, que no existen miembros de S que satisfagan $y < x \leqslant M_0$. Entonces se tiene

$$x \leqslant y \qquad \text{para toda } x \text{ en } S.$$

Por tanto, y es una cota superior para S y es menor que M_0. Esta es la contradicción que apuntamos. ∎

No todos los conjuntos que se encuentran acotados superiormente tienen un máximo. (¿Podría dar un ejemplo el estudiante?) y no todos los conjuntos acotados inferiormente tienen un mínimo. Esto conduce

a preguntar: «¿todo conjunto acotado superiormente tiene un supremum?» La respuesta es «sí» y este hecho es otra proposición acerca de la completitud de los números reales. Es decir, en vista de las propiedades I y II de la Sección 1.2, la existencia del supremum es una consecuencia del teorema de Dedekind, III de la Sección 1.3, e inversamente el teorema de Dedekind puede probarse si se supone que todo conjunto acotado tiene un supremum. Esta forma de la proposición acerca de la completitud de los números reales es mucho más sencilla que el uso del teorema de Dedekind. La tomaremos sin demostración como una propiedad fundamental del sistema de los números reales.

Propiedad Fundamental. Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene un supremum.

Con el establecimiento de este principio terminamos la revisión del sistema numérico. De ahora en adelante haremos un serio esfuerzo para proporcionar las demostraciones de nuestras proposiciones.

1.6. ALGUNAS INDICACIONES SOBRE LOGICA

En las secciones anteriores se dieron algunas demostraciones por contradicción. La lógica detrás de esto es, por supuesto, que la afirmación y su negación no pueden ser verdaderas al mismo tiempo, y aún más, no existe una tercera posibilidad: ya sea la afirmación o su negación, debe ser verdadera. En consecuencia, una demostración de que la negación es falsa se toma como una demostración de que la afirmación es verdadera.

Frecuentemente tendremos ocasión de establecer que «A es necesaria y suficiente para B», donde A y B son proposiciones matemáticas. Esto significa que son lógicamente equivalentes: que A implica B y que B implica A. La afirmación «A es necesaria para B» significa que A se deduce a partir de B; que si B es verdadera, entonces A se sigue necesariamente. La afirmación «A es suficiente para B» significa que A implica B; en otras palabras, la suposición de A es suficiente para probar B.

El axioma 5 de los axiomas de Peano es una formulación un poco diferente del principio de la inducción matemática en la forma dada generalmente en los textos elementales. La formulación más conocida se deduce fácilmente del Axioma 5.

1.6a Teorema. Supóngase que una proposición $P(n)$ (es decir, una afirmación) acerca de los enteros positivos tiene las siguientes propiedades:

(i) es verdadera para $n = 1$ — es decir, $P(1)$ es verdadera.
(ii) siempre que $P(n)$ se cumple, se cumple $P(n + 1)$.
Entonces $P(n)$ es verdadera para toda n.

Demostración. En este caso, por una demostración queremos decir que esto es una consecuencia del Axioma 5. Sea M el conjunto de enteros para los cuales $P(n)$ es verdadera. Entonces, de acuerdo con (i), 1 es un miembro de M y, de acuerdo con (ii), $n + 1 = n'$ es un miembro de M siempre que n esté en M. Por lo tanto (i) y (ii) del Axioma 5 se satisfacen. Por tanto, M es el conjunto de todos los enteros positivos (números naturales). ∎

Como un ejemplo de la inducción matemática se demostrará la **desigualdad de Bernoulli.**

1.6b Teorema. Si $x \geqslant -1$ y n es un entero positivo, entonces

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación «$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ se cumple suponiendo que $x \geqslant -1$».

(i) $P(1)$ es verdadera. En efecto, se tiene

$$(1 + x)^1 = 1 + x.$$

(ii) Supóngase que $P(n)$ es verdadera —es decir, supóngase que

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Multiplicando ambos miembros por $1 + x$ se tiene

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &> (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &> 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$ ∎

¿Dónde se aplicó la hipótesis de que $x \geqslant -1$?

1.7 VALOR ABSOLUTO

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Las propiedades principales del valor absoluto se dan en los siguientes teoremas.

1.7a Teorema. $|x| = |-x|$.

1.7b Teorema. $|1/x| = 1/|x|$, si $x \neq 0$.

Estas afirmaciones son evidentes a partir de la definición.

1.7c Teorema. $|xy| = |x|\,|y|$

Demostración:

(i) Si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, entonces $xy \geqslant 0$ y

$$|xy| = xy = |x|\,|y|.$$

(ii) Si $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, entonces $xy \geqslant 0$ y

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|.$$

(iii) Si $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, entonces $xy \leqslant 0$ y

$$|xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|.$$

(iv) Si $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, entonces $xy \leqslant 0$ y

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|.$$

∎

1.7d Teorema. $|x/y| = |x|/|y|$, si $y \neq 0$.

Demostración. Escríbase $x/y = x \cdot (1/y)$ y apliquense los Teoremas 1.7c y 1.7b. ∎

1.7e Teorema. $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Demostración. Primero se demostrará la desigualdad de la derecha. Es evidente que

$$-|x| < x < |x|$$
$$-|y| < y < |y|.$$

Sumando se tiene

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| < x + y < |x| + |y|.$$

De aquí que tanto $(x + y)$ como $-(x + y)$ no son mayores que $|x| + |y|$: es decir

$$|x + y| < |x| + |y|.$$

Para demostrar la desigualdad de la izquierda de (1.7e) hacemos $a = x + y$, $b = -y$. Entonces

$$|a + b| < |a| + |b|$$

o bien $$|x| < |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|.$$

Por tanto $$|x| - |y| < |x + y|.$$

Hacemos $a = x + y$, $b = -x$ y repetimos el procedimiento para obtener

$$|y| - |x| < |x + y|$$

Estas dos desigualdades son equivalentes a la parte de la izquierda del Teorema 1.7e. ∎

1.7f Teorema. $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

Demostración (por inducción). Sea $P(n)$ la afirmación de que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(i) $P(1)$ es verdadera:

$$|x_1| = |x_1|$$

(ii) Supóngase que $P(n)$ se cumple. Entonces

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}|$$
$$< |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}|$$

de acuerdo con el Teorema 1.7e. Entonces, puesto que $P(n)$ se cumple, esta expresión es menor que o igual a

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

∎

El resultado del Teorema 1.7f se recuerda fácilmente con las siguientes palabras: El valor absoluto de una suma es menor que o igual a la suma de los valores absolutos.

EJERCICIOS A

1. Probar por inducción:

(*a*) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$
(*b*) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
(*c*) $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$
(*d*) $1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^n = 2 - 1/2^n$
(*e*) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

2. Denotar por S el conjunto de puntos descrito entre llaves. Determinar por inspección $\sup_x x$ e $\inf_x x$ cuando existan y establecer cuándo pertenecen a S:

(a) $\{x^2 - 2x < 8\}$ (b) $\{x + 4 > 3x + 15\}$

(c) $\{1/(1 - x) < 1 + 2x\}$ (d) $\{(1 + x) < 1/(1 - x)\}$

(e) $\{\sqrt{4 + x} > x\}$ (f) $\{|x| + |x + 1| < 2\}$

(g) $\{|x| \cdot |x + 1| < 2\}$ (h) $\{(x + 2)(x - 1)(x + 5) > 0\}$

(i) $\{(-1)^n(2 - 4/2^n)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (j) $\{1 - 1/n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. (a) Demostrar que $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \max(a, b)$ = mayor de a y b.
(b) Evaluar $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

EJERCICIOS B

1. Probar por inducción que:

(a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2, \qquad x \geq 0$

(b) $(1 - x)^n \leq 1 - nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2, \qquad 0 \leq x < 1$

(c) $(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ si todas las $a$es son no negativas.

2. Encontrar el error: "Todos los enteros positivos son iguales unos a los otros".

"*Demostración*":

(i) $1 = 1$.

(ii) Supóngase que todos los enteros hasta n incluyendo a n son iguales. Entonces $n = n - 1$. Sumando 1 a ambos miembros se obtiene $n + 1 = n$. Supuesto que n es igual a todos los enteros menores, también lo es $n + 1$.

3. Establecer que los supremos y los ínfimos encontrados en el Ejercicio A2 satisfacen las definiciones de supremo e ínfimo.

4. ¿Cuándo se cumple estrictamente la desigualdad en la desigualdad de Bernoulli?

5. Probar que $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \dfrac{1}{n}$, y deducir que $\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

6. Probar que si un conjunto S tiene un elemento máximo —esto es, si existe un x_0 en S tal que $x_0 \geq x$ para cualquier otro x en S— entonces $x_0 = \sup_x x$.

7. Demostrar que todo conjunto no vacío S que está acotado inferiormente tiene un ínfimum.

8. Demostrar que si S está acotado inferiormente y $m_0 = \inf S$, entonces para todo $y > m_0$ existe un x en S para el cual $y > x \geq m_0$.

9. Demostrar que si x_0 es un punto interior de un conjunto S, entonces existen puntos interiores de S a uno y otro lado de x_0.

EJERCICIOS C

1. Demostrar que, si $a > 0$ y $b > 0$, existe un n tal que $na > b$. Este es el teorema de Eudoxo o el teorema de Arquímedes.

2. Mediante C1, demostrar que si $\varepsilon > 0$ está dado entonces existe un N tal que $N > 1/\varepsilon$ y de aquí que $1/N < \varepsilon$.

3. Demostrar que en todo intervalo de números reales existen números racionales.

4. Demostrar que en todo intervalo de números reales existen números irracionales.

5. Demostrar que el quinto axioma de Peano se puede deducir del Teorema 1.6a, completando, de este modo, la demostración de la equivalencia de las dos proposiciones de la inducción matemática.

2

Funciones, sucesiones y límites

2.1 MAPEOS, FUNCIONES Y SUCESIONES

Consideremos dos conjuntos S_1 y S_2. Por un **mapeo** de S_1 en S_2 se entenderá una correspondencia mediante la cual a cada punto x en S_1 se le asocia exactamente un punto y en S_2. La totalidad de todos los pares ordenados (x, y), donde y es el punto en S_2 correspondiente a x en S_1, se llamará una **función** y se denotará mediante una sola letra, como f. El número y en S_2 correspondiente a x en S_1 recibirá el nombre de **valor** de la función f en x y se denotará por $f(x)$.

Nótese que una función tal y como se ha definido es una **función unívoca**, es decir, a cada punto x en S_1 le corresponde exactamente un punto y en S_2. Sin embargo, algunos, e incluso todos, los valores de y pueden corresponder a dos o más x.

Se dirá que la función está **definida** en S_1 y **tiene valores** en S_2, y también se dirá que es una función de S_1 a S_2. Puesto que x puede tomar cualquier valor en S_1, recibe el nombre de **variable independiente**, y puesto que el valor de y está determinado por x, recibe el nombre de **variable dependiente**. En ocasiones la variable independiente recibe el nombre de **argumento** de la función.

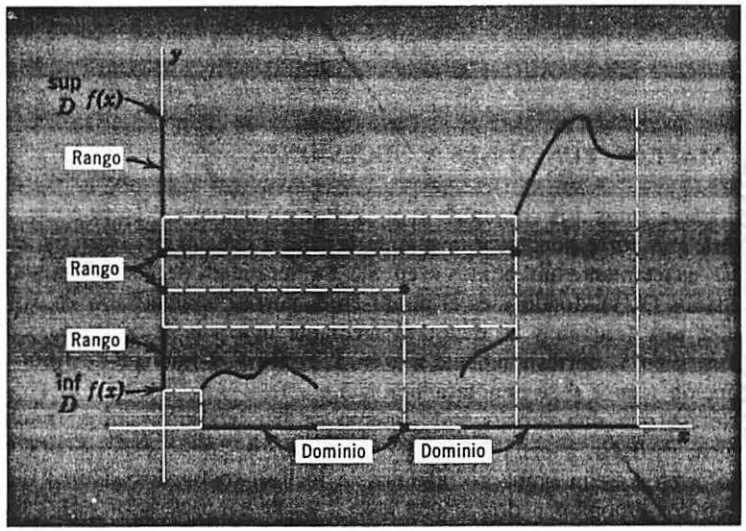
Si todo el conjunto S_2 se cubre mediante el mapeo —esto es, si para todo valor de y en S_2 existe por lo menos un x en S_1 para el cual $y = f(x)$— se dice que el mapeo es **sobre** S_2. De otra manera se dice que es **en** S_2.El conjunto S_1 sobre el cual está definida la función se llama **dominio** de la función y, en general, se denotará por D. El subconjunto de S_2 sobre el cual se mapea D se llama **rango** de f y se denota por R.

Gráfica de una función es simplemente la representación bidimensional del conjunto de puntos dados por (x, y) donde x está en D y y es el

valor correspondiente. En otras palabras, la gráfica es el lugar geométrico de los puntos en dos dimensiones dados por

$$[x,f(x)] \qquad x \text{ en } D.$$

El que una función sea unívoca se refleja en el hecho de que toda línea vertical que pasa por un punto x de D encuentra a la gráfica en un punto exactamente. Sin embargo, toda línea horizontal que pasa por un punto de R encuentra a la gráfica en un punto, por lo menos, pero podría encontrarla en un número infinito de puntos.



Tal vez sea conveniente decir en pocas palabras algo acerca de las llamadas **funciones multivaluadas** y **funciones implícitas.** Empecemos por estudiar un ejemplo conocido. La ecuación

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

se satisface para ciertos pares de números pero en la forma en que lo establece no determina una función en el sentido de nuestra definición. Existen ciertas funciones cuyas variables independiente y dependiente satisfacen esta relación. Las dos más adecuadas que vienen a la mente están dadas por

$$y = +\sqrt{25 - x^2} \qquad \{|x| \leqslant 5\}$$

y

$$y = -\sqrt{25 - x^2} \qquad \{|x| \leqslant 5\}.$$

Igualmente buenas son

$$y = \begin{cases} +\sqrt{25 - x^2} & \{0 \leqslant x \leqslant 5\} \\ -\sqrt{25 - x^2} & \{-5 \leqslant x < 0\}, \end{cases}$$

y

$$y = \begin{cases} +\sqrt{25 - x^2} & \text{para } x \text{ racional} \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases} \{|x| \leqslant 5\}.$$

Por supuesto que, cuando decimos que la ecuación (1) define implícitamente una función, generalmente debe entenderse una de las dos primeras. Lo que deseamos puntualizar es que para especificar una función se necesita más que la relación $x^2 + y^2 = 25$. Por ejemplo, si se pregunta si la función es continua*, entonces estamos forzados a escoger una de las dos primeras.

En forma semejante, una fórmula como

$$y = \text{ang sen } x \qquad D\colon \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

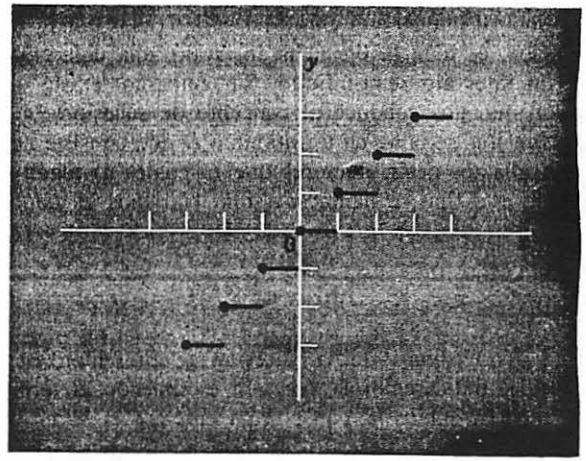
no define una función ya que existe un número infinito de ángulos y cuyo seno es x. Pero el valor principal definido por

$$y = \text{ang sen } x \qquad \begin{cases} D\colon \{-1 \leqslant x \leqslant 1\} \\ R\colon \{-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2\} \end{cases}$$

es una función.

Dos funciones útiles para establecer ciertos problemas son la función **máximo entero** $[x]$ y la función **signum.** Primero

$[x]$ = al máximo entero menor que o igual a x.



* Aquí nos hemos adelantado un poco, pero el estudiante ya tiene una somera idea de lo que es continuidad.

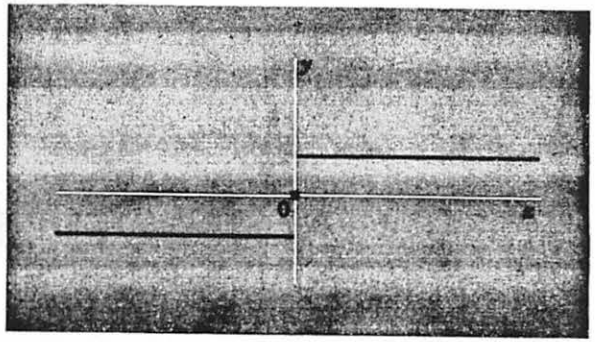
La figura nos da idea de cómo varía esta función con x.

La función signo está dada por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para $x \neq 0$ podemos representar sgn x por

$$\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \qquad x \neq 0.$$



Para $x = 0$ estos cocientes no tienen significado.

Nuestro principal interés está enfocado en los casos donde D, el dominio de la función, es toda la línea, un intervalo, una colección finita de intervalos o un intervalo semi-infinito. Sin embargo, existe una importante excepción que nos conduce al concepto de sucesión.

Sea f una función definida en un dominio D que consiste en todos los enteros n más allá (es decir, mayores que o iguales a) algún entero n_0. Una función de este tipo se llama **sucesión.** Haremos el cambio de notación

$$f(n) = a_n,$$

de modo que los **términos** de la sucesión se presenten en una forma más conocida. Indicaremos la sucesión escribiendo el término típico entre llaves: $\{a_n\}$. El entero n_0 con el cual empieza la sucesión generalmente será 0 ó 1 y se establecerá o se dará por supuesto. Pero evidentemente n_0 debe escogerse de manera que la fórmula (si existe) para a_n tenga sentido para toda $n \geqslant n_0$. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ no puede

tener $n_0 = 0$ y la sucesión $\{1/[n(n-1)(n-2)]\}$ debe tener n_0 al menos tres.

Sea f definida sobre un conjunto D con rango R. Por $\sup_D f$ se debe entender $\sup_R y$; en forma semejante $\inf_D f$ significa $\inf_R y$. Esto se aplica en particular a las sucesiones en las cuales se escribe $\sup a_n$ en lugar de $\sup_D f$ e $\inf a_n$ en lugar de $\inf_D f$.

2.2 LIMITES

Supongamos que se tiene una función f definida en un conjunto D que incluye números arbitrariamente grandes; esto es, para todo número M, no importa qué tan grande, existe un x en D para el cual $x \geqslant M$. En la realidad estaremos interesados en dos casos; (a) D contiene un intervalo semi-infinito $\{x \geqslant x_0\}$; y (b) D consiste en todos los enteros más allá de algún entero fijo: $\{n \geqslant n_0\}$— es decir, en este caso estamos interesados en sucesiones. Podemos inquirir acerca del comportamiento de $f(x)$ para una x grande. En particular, podemos preguntar si los valores de $f(x)$ se mantienen próximos a algún número fijo A si x se hace muy grande. Si es cierto que existe un número A tal que $f(x)$ se encuentre tan próxima como se desee a A para toda x lo suficientemente grande (es decir, toda x suficientemente grande en D) se dice que $f(x)$ tiende al límite A conforme x tiende al infinito.

En forma más precisa, un número A recibirá el nombre de **límite** de f conforme x **tiende al infinito** si para todo $\epsilon > 0$, existe un número X (dependiente de ϵ, y de aquí que en ocasiones se escriba $X(\epsilon)$) para el cual

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{si } x > X \text{ y } x \text{ en } D.$$

Expresamos esto simbólicamente mediante

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

o bien $$f(x) \to A \qquad \text{conforme} \qquad x \to \infty.$$

Se cumple una definición semejante para $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (Ver Ejercicio A4). En el caso de las sucesiones esta expresión se transforma en

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A$$

o bien $$a_n \to A \qquad \text{conforme} \qquad n \to \infty;$$

En este caso en ocasiones se simplifica la notación escribiendo

$$\lim a_n = A$$

o bien $$a_n \to A,$$

porque en el caso de las sucesiones éstos son los únicos tipos de límites que se consideran.

Si $\lim a_n$ existe para una cierta sucesión se dice que la sucesión **converge.** De otra manera se dice que **diverge.**

Cuando un límite existe (ya sea para funciones o para sucesiones), es único; es decir, no existen dos números distintos que puedan ser al mismo tiempo límites de la misma sucesión o de la misma función. (Ver Ejercicio B5).

EJEMPLO 1. Supóngase que $f(x) = 1/(x^2 + 2x - 4)$ $\quad D$: $\{x \geqslant 2\}$

o bien $$a_n = 1/(n^2 + 2n - 4) \qquad n \geqslant 2.$$

Entonces observemos que

$$x^2 + 2x - 4 \geqslant x^2 > x$$

Así, si tomamos X como la mayor entre 2 y $1/\epsilon$, entonces para $x > X$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1/x < 1/X < \epsilon,$$

por lo cual se ve que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Los mismos cálculos prueban que

$$\lim a_n = 0.$$

EJEMPLO 2. Sea $a_n = [2^n - (-1)^n]/2^n$.

Solución. Aquí $\lim a_n = 1$, porque

$$|a_n - 1| = |\{[2^n - (-1)^n]/2^n\} - 1| = 1/2^n.$$

Ahora podríamos encontrar un $N(\epsilon)$ [en el caso de sucesiones usaremos $N(\epsilon)$ en lugar de $X(\epsilon)$] en términos de $\log_2 \epsilon$, pero podemos obtener un N más sencillo, aunque menos aproximado, de la manera siguiente:

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + n(n - 1)/2 \cdots + 1 > n$$

(la segunda igualdad se apoya en el teorema del binomio). De aquí que,

si se escoge $N = 1/\epsilon$ o mayor, se tiene, para $n > N$

$$|a_n - 1| = 1/2^n < 1/n < 1/N < \epsilon.$$

Esto completa la solución.

EJEMPLO 3. $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ $\quad D$: $\{x > 0\}$.

Solución. Supongamos que para todo $x > 0$ existe una raíz cuadrada positiva única; es decir, existe un número positivo único y para el cual $y^2 = x$. Esto se probará en un capítulo posterior (ver Sección 3.4).

También será conveniente saber que si $a > 1$,

$$a^2 > a > \sqrt{a} > 1,$$

lo que se dejará como ejercicio.

Ahora bien

$$f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/x)} + 1},$$

a partir de lo cual se ve como evidente que el límite es 1/2. De aquí consideramos

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{1 + (1/x)} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 + (1/x)} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + (1/x)} - 1}{2(\sqrt{1 + (1/x)} + 1)} < \frac{1 + 1/x - 1}{2(1 + 1)} = \frac{1}{4x}.$$

Así, si tomamos X como $1/4\epsilon$ o mayor, y $x > X$, entonces,

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| < \frac{1}{4x} < \frac{1}{4X} \leqslant \epsilon.$$

Terminaremos esta sección con un teorema que establece un límite muy útil para propósitos de comparación.

2.2a Teorema. Si $0 < a < 1$, entonces $a^n \to 0$.

Demostración. Sea $x = 1/a - 1$. Entonces $x > 0$ y

$$a = \frac{1}{1+x}$$

de modo que para $n \geqslant 1$,

$$a^n = \frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + x^n} < \frac{1}{nx}.$$

Así $$|a^n| = a^n < \epsilon \qquad \text{si } n > \frac{1}{x\epsilon} = N(\epsilon).$$ ∎

EJERCICIOS A

1. Determinar si las sucesiones siguientes tienen límites. En cada caso donde exista un límite A, determine un $N(\epsilon)$ tal que

$$|a_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N,$$

donde a_n está dada por:

(a) $\dfrac{n+1}{n}$ (b) $\dfrac{n^2+n}{2n^2+1}$ (c) $\dfrac{6n^3+4n-1}{n^3+5n}$

(d) $\dfrac{n^2+1}{n+1}$ (e) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ (f) $1 - n^{(-1)^n}$

(g) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

2. Determinar si las funciones siguientes tienen límites en el infinito. En cada caso donde exista un límite A, determinar un $X(\epsilon)$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{si } x > X.$$

(a) sen x (b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (c) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^3 - x + 1}$

(d) $\cos x\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+3x-1}\right)$ (e) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

3. Probar que si $a > 1$, entonces $a^2 > a > \sqrt{a} > 1$.
4. Definir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

EJERCICIOS B

1. Examinar estas sucesiones y funciones como en los ejercicios A

(a) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (b) $\dfrac{1-(1-1/n)^3}{1-(1-1/n)^2}$

(c) $\dfrac{2^n}{n}$ (d) $x\left[1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^5\right]$ (e) $\sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{2n}}$

(f) $\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\dfrac{n^{100}}{n+2} + \frac{1}{3}\cos^2\dfrac{n^{100}}{n+2}\right)^n$

2. Supóngase que existe un número q, $0 < q < 1$ tal que $|a_{n+1}| \leqslant q|a_n|$. Examinar la sucesión $\{a_n\}$.
3. Calcular sup a_n e inf a_n cuando existan. En cada caso determinar si se alcanza o no el valor extremo (es decir, sup o inf).

(a) $\left\{(-1)^n\left(2 - \dfrac{4}{2^n}\right)\right\}$ (b) $\left\{\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{\pi n}{2} + (-1)^n\right\}$

(c) $\{n^{\cos(\pi n/2)}\}$ (d) $\left\{(-1)^n n^{\operatorname{sen}(\pi n/2)} + \dfrac{1}{n}\right\}$

4. Calcular $\sup\limits_D f(x)$ e $\inf\limits_D f(x)$ cuando existan. En cada caso determinar si se alcanza o no el valor extremo.

(a) $x - [x]$ D: total x (b) x D: $\{0 < x < 1\}$
(c) ang tan x (valor principal) D: $\{0 < x\}$ (d) ang tan $1/x$ D: $\{x \neq 0\}$
(e) $e^{-1/x}$ D: $\{x > 0\}$

5. Probar la unicidad del límite; es decir, probar que si $\lim a_n = A$ y $\lim a_n = A'$, entonces $A = A'$.

EJERCICIOS C

1. Supóngase que $a_n \to A$, $c_n \to A$ y $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Demostrar que $b_n \to A$.
2. Supóngase que $f(x) \to A$, $h(x) \to A$ conforme $x \to \infty$ y $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Demostrar que $g(x) \to A$ conforme $x \to \infty$.
3. Demostrar que $n^2/2^n \to 0$, $n^3/2^n \to 0$, $n^4/2^n \to 0$. (*Sugerencia:* Ver Ejemplo 2).
4. Demostrar que $n^2a^n \to 0$, $n^3a^n \to 0$ y $n^4a^n \to 0$ si $0 < a < 1$. (Comparar con el Ejercicio 3 anterior y ver la demostración del Teorema 2.2a.)
5. (a) Considérese que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo dominio D. Demostrar que

$$\sup_D [f(x) + g(x)] \leqslant \sup_D f(x) + \sup_D g(x)$$
$$\inf_D [f(x) + g(x)] \geqslant \inf_D f(x) + \inf_D g(x).$$

En particular, para las sucesiones, estas expresiones se transforman en

$$\sup (a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$$
$$\inf (a_n + b_n) \geqslant \inf a_n + \inf b_n.$$

(b) Demostrar que para $f(x) \geqslant 0$ y $g(x) \geqslant 0$

$$\sup_D f(x) \cdot g(x) \leqslant \sup_D f(x) \cdot \sup_D g(x)$$
$$\inf_D f(x) \cdot g(x) \geqslant \inf_D f(x) \cdot \inf_D g(x).$$

2.3 OPERACIONES CON LIMITES (SUCESIONES)

En esta sección se encontrará un cierto número de teoremas útiles relativos a los límites. En su mayor parte son teoremas acerca de la forma de operar con límites. Sin embargo, primero empezaremos con un

teorema sencillo pero muy útil respecto a las sucesiones. Para el efecto, definiremos la subsucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función en los enteros; es decir.

$$a_n = f(n) \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0$$

Ahora, supóngase que se considera la función restringida a un subconjunto de los enteros. Escojamos un entero mayor que o igual a n_0 y denotémoslo por n_1, otro mayor que n_1 y denotémoslo por n_2, otro mayor que n_2 y denotémoslo por n_3, y así sucesivamente. Entonces, la nueva sucesión definida por

$$b_k = a_{n_k} = f(n_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

se llama **subsucesión** de $\{a_n\}$. Es evidente que existen muchas subsucesiones de una sucesión dada y que, en todo caso, $n_k \geqslant k$. (¿Por qué?) El teorema que se desea probar es el siguiente.

2.3a Teorema. Supóngase que $\{a_n\}$ converge, entonces cualquier subsucesión $\{a_{nk}\}$ también converge y tiene el mismo límite.

Demostración. Sea A el límite de la sucesión $\{a_n\}$. Se sabe que para todo $\epsilon > 0$ existe un N para el cual

$$|a_{n_k} - A| < \epsilon \qquad \text{si } n_k > N.$$

Pero $n_k \geqslant k$; de aquí que $\qquad n_k > N \qquad$ si $k > N$.

Por tanto $\qquad |b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \epsilon \qquad$ si $k > N$. ∎

Los siguientes son una colección de teoremas operacionales usuales con los cuales debe familiarizarse el estudiante.

2.3b Teorema. Si $\lim a_n$ existe, entonces $\{a_n\}$ forma un conjunto acotado. (Es decir, existe una constante M para la cual $|a_n| \leqslant M$ para todo n).

Demostración. Sea $a = \lim a_n$. Entonces existe un N tal que

$$|a_n - a| < 1 \qquad \text{si } n > N. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Entonces $\qquad 1 > |a_n - a| > |a_n| - |a|. \qquad$ (¿Por qué?)

Por lo tanto

$$|a_n| < |a| + 1 \equiv M_1 \qquad \text{si } n > N. \tag{1}$$

Ahora observemos entre los números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|$, y escojamos el mayor, llamándolo M_2. Entonces

$$|a_n| \leqslant M_2 \qquad \text{si } n \leqslant N. \tag{2}$$

Ahora, es evidente que si tomamos M como el mayor de M_1 y M_2, entonces por (1) y (2)

$$|a_n| < M \qquad \text{para todo } n.$$ ∎

En los teoremas restantes de esta sección supondremos que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen y que sus límites son a y b, respectivamente, y concluiremos la existencia de los demás límites que se presentan.

2.3c Teorema. $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$.

Demostración. La demostración de este teorema se deja como ejercicio (Ejercicio B). Obsérvese que, por inducción, este teorema se extiende a cualquier número finito de sucesiones.

2.3d Teorema. $\lim (a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$.

Demostración. Examinemos

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \\ &\leqslant |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |b_n| \cdot |a_n - a| + |a|\,|b_n - b|.$$

De acuerdo con el Teorema 2.3b tenemos que $|b_n|$ está acotado. Supongamos que $|b_n| \leqslant M$; entonces

$$|a_n b_n - ab| < M|a_n - a| + |a|\,|b_n - b|. \tag{3}$$

Ahora vemos que haciendo $|a_n - a|$ y $|b_n - b|$ pequeños, podemos hacer $|a_n b_n - ab|$ pequeño. Sea dado $\epsilon > 0$ y tomemos $\epsilon_1 = \epsilon/2(M + 1)$ y $\epsilon_2 = \epsilon/2(|a| + 1)$. Entonces existen N_1 y N_2 tales que

$$|a_n - a| < \epsilon_1 \qquad \text{si } n > N_1,$$

y

$$|b_n - b| < \epsilon_2 \qquad \text{si } n > N_2.$$

Así, si $n > N \equiv \text{máx } (N_1, N_2)$, de (3), tenemos

$$|a_n b_n - ab| < M\epsilon_1 + |a|\epsilon_2 = \epsilon[M/2(M + 1) + |a|/2(|a| + 1)] < \epsilon.$$ ∎

Con base en esta demostración se sigue que

$$\lim cb_n = c \lim b_n. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

2.3e Teorema. $\lim (a_n/b_n) = (\lim a_n)/(\lim b_n) \qquad$ si $\lim b_n \neq 0$.

Demostración. La demostración de este teorema se sigue del Teorema 2.3d, en el supuesto de que podemos demostrar que

$$\lim 1/b_n = 1/\lim b_n. \tag{4}$$

Para probar (4), notemos primero que, supuesto que $b = \lim b_n \neq 0$, existe un N_1 lo suficientemente grande de modo que

$$|b_n - b| < (\tfrac{1}{2})|b| \quad \text{si } n > N_1. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Entonces

$$|b_n| > (\tfrac{1}{2})|b| \quad \text{si } n > N_1. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

De aquí que, para $n > N_1$.

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \leq \left|\frac{b_n - b}{(\frac{1}{2})|b|^2}\right| = \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|$$

Ahora, dado que $\epsilon > 0$, sean $\epsilon_1 = |b|^2\epsilon/2$ y N_2 tales que

$$|b_n - b| < \epsilon_1 \quad \text{si } n > N_2.$$

Entonces si $n > N = \text{máx } [N_1, N_2]$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\epsilon_1 = \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \blacksquare$$

2.3f Teorema. $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

Demostración. La demostración de este teorema se sigue directamente de

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| \leq |a_n - a|. \qquad \text{(¿Cómo?)} \quad \blacksquare$$

2.3g Teorema. Si $a_n \geqslant 0$, entonces $\lim a_n \geqslant 0$.

Demostración. Supóngase que $\lim a_n = a < 0$. Entonces existe un N tal que

$$|a_n - a| < -\tfrac{1}{2}a \text{ para todo } n > N \qquad \text{(recuérdese que } a < 0).$$

Así, en particular, para tal n se tiene

$$a_n - a < -(\tfrac{1}{2})a,$$

o bien

$$a_n < (\tfrac{1}{2})a < 0.$$

Esta contradicción completa la demostración. $\blacksquare$

2.3h Teorema. Si $a_n \geqslant b_n$, entonces $\lim a_n \geqslant \lim b_n$.

Demostración. Por los Teoremas 2.3c y 2.3g,

$$\lim a_n - \lim b_n = \lim (a_n - b_n) \geqslant 0. \quad \blacksquare$$

2.3i Teorema. Si $a_n \geqslant 0$, entonces $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

Demostración. Una vez más supondremos la existencia y la unicidad de las raíces cuadradas positivas de los números positivos (ver Sección

3.4). Consideremos dos casos, de acuerdo con que $\lim a_n = a > 0$ o bien $a = 0$.

CASO 1. $a > 0$.

Aquí existe un N_1 tal que

$$a_n > \tfrac{1}{2}a \quad \text{si } n > N_1. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Por tanto, para $n > N_1$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|\,|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Esta es la desigualdad básica. El resto de la demostración se deja como ejercicio.

CASO 2. $a = 0$.

Dado $\epsilon > 0$, se escoge n lo suficientemente grande para que $a_n < \epsilon^2$.

Entonces

$$\sqrt{a_n} < \epsilon.$$

EJEMPLO. Calcular $\lim \sqrt{\dfrac{4n^2 + 6n + 3}{n^2 - 5}}$.

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{4n^2 + 6n + 3}{n^2 - 5}} = \sqrt{\lim \frac{4n^2 + 6n + 3}{n^2 - 5}}$$

$$= \sqrt{\lim \frac{4 + (6/n) + (3/n^2)}{1 - (5/n^2)}} = \sqrt{\frac{\lim [4 + (6/n) + (3/n^2)]}{\lim [1 - (5/n^2)]}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim 4 + \lim (6/n) + \lim (3/n^2)}{\lim 1 - \lim (5/n^2)}} = \sqrt{\frac{4 + 0 + 0}{1 - 0}}$$

$$= \sqrt{4} = 2.$$

Conviene hacer algunas aclaraciones acerca del cálculo realizado en este ejemplo: Cada paso en la solución es un argumento provisional que depende, para su validez, de la existencia de los límites involucrados. Por lo tanto, el primer paso, donde se intercambió el signo del límite y el signo de la raíz, es válido solamente si se conoce la existencia del límite del cociente que se encuentra como radicando. En forma semejante, cada uno de los siguientes pasos es tentativo, afirmado en la existencia de los límites involucrados. La justificación final para todos estos pasos provisionales es que se llega a una expresión que tiene un límite.

EJERCICIOS A

1. Determinar si las siguientes sucesiones tienen límite. Si existe, calcular el límite en cada caso:

(*a*) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(*b*) $\sqrt{\dfrac{n^3 + 4n^2 + 5n + 16}{n^2 + 3n + 2}}$

(*c*) $\dfrac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

(*d*) $\sqrt{1 + a/n}$

(*e*) $\dfrac{\frac{1}{2}n^3 - n^2 + 1/n}{3n^3 - n + 800/n}$

(*f*) $\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n + 2} - \dfrac{n}{2}$

(*g*) $n(1 - \sqrt{1 - a/n})$

(*h*) $n[(a + 1/n)^5 - a^5]$

(*i*) $\dfrac{\log n + 1}{\log n - 1}$

EJERCICIOS B

1. (*a*) Probar el Teorema 2.3c.
(*b*) Completar la demostración del Teorema 2.3i.

2. Demostrar, mediante ejemplos, que si $|a_n| \to |a|$, entonces a_n no necesariamente converge; y que si converge, no necesariamente converge en a.

3. Demostrar que $|a_n| \to 0$ si y solamente si $a_n \to 0$.

4. Demostrar que si $a_n \to a$, entonces $\sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{a}$.

5. Demostrar que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 0$. Considérese primero el caso donde $a > 1$.

(*Sugerencia*: Hacer $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ y aplíquese la desigualdad de Bernoulli.)

6. Calcular el límite de cada una de las sucesiones siguientes:

(*a*) $\left\{n\left(1 - \sqrt[3]{1 - \dfrac{a}{n}}\right)\right\}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1}{n^2 + 1} + \dfrac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + n}\right\}$.

(*c*) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}\right\}$.

7. Demostrar, mediante ejemplos, que para una sucesión convergente $\{a_n\}$ la condición $a_n > 0$ no implica que $\lim a_n > 0$.

8. Demostrar, mediante ejemplos, que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones divergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ no es necesariamente divergente. Hacer lo mismo para $\{a_n - b_n\}$ y $\{a_n/b_n\}$.

EJERCICIOS C

1. Demostrar que si $\{a_n\}$ converge a cero y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a cero.

2. Evaluar el límite de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) $\left\{\left(\dfrac{x^n + y^n}{2}\right)^{1/n}\right\}$ $\quad x > y > 0.$

(*b*) $\left\{\left(\dfrac{1}{k}\sum_1^k a_j^n\right)^{1/n}\right\}$ $\quad a_j > 0, j = 1, 2, \ldots k.$

(*c*) $\left\{\left(\dfrac{x^{-n} + y^{-n}}{2}\right)^{-1/n}\right\}$

(*d*) $\left\{\left(\dfrac{1}{k}\sum_1^k a_j^{-n}\right)^{-1/n}\right\}$ $\quad a_j > 0, j = 1, 2, \ldots k$

3. Demostrar que $\sqrt[n]{n} \to 1$. (*Sugerencia*: Hacer $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, y aplicar el teorema del binomio.)

4. (*a*) Supóngase que $\lim a_n = a$. Hacer $\sigma_n = \dfrac{1}{n}\sum_1^n a_j$, y demostrar que $\lim \sigma_n = a$.

(*b*) Mostrar, mediante ejemplos, que la inversa de (*a*) no es verdadera; esto es, existen sucesiones $\{a_n\}$ tales que $\lim \sigma_n = a$ pero $\lim a_n$ no existe.

2.4 LIMITES DE FUNCIONES

Sea $f(x)$ definida en el intervalo I: $\{a - h < x < a + h\}$, para algún positivo h, excepto posiblemente en el propio punto a. Es decir, $f(x)$ está definida en una vecindad agujereada de a. Entonces, un número A recibirá el nombre de **límite** de $f(x)$ conforme x tiende a a (o conforme x se acerca a a), si para todo $\epsilon > 0$ existe un número δ, $0 < \delta \leqslant h$ (por supuesto que δ depende de ϵ y así, frecuentemente, se escribe $\delta(\epsilon)$) para el cual

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta.$$

Expresaremos este hecho formalmente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

o bien $\qquad f(x) \to A \qquad$ conforme $\qquad x \to a.$

Considérese, por ejemplo, $f(x) = x^2 + 2$. Se demostrará que $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$. Es evidente que f está definida en $0 < x < 4$; es decir, puede tomarse $h = 2$. En este intervalo,

$$|f(x) - 6| = |x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2| < 6 \cdot |x - 2|.$$

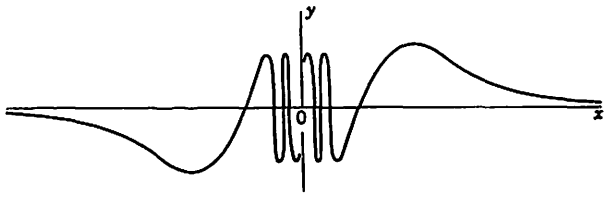
De aquí que si $\delta = \epsilon/6$ ó menor, entonces

$$|f(x) - 6| < 6|x - 2| < 6 \cdot \frac{\epsilon}{6} < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - 2| < \delta = \epsilon/6.$$

Por supuesto que, si no existe un número A que llene los requerimientos de la definición, entonces se dice que el límite no existe. Una función puede no tener límite por cualquiera de varias razones. Daremos algunos ejemplos en puntos finitos y en el infinito.

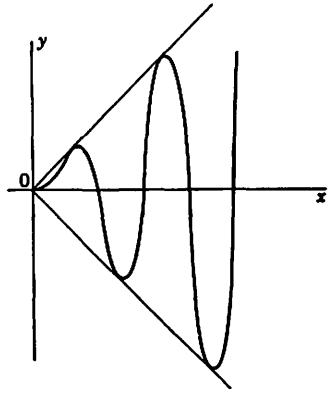
EJEMPLO 1. La función puede oscilar acotadamente, como lo hace la función

$$f(x) = \text{sen } 1/x \qquad \text{conforme } x \to 0.$$



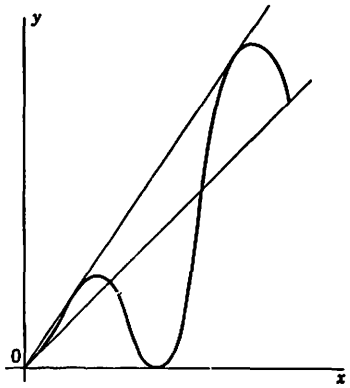
EJEMPLO 2. La función puede oscilar en forma no acotada, como la función

$$f(x) = x \text{ sen } x \qquad \text{conforme } x \to \infty,$$



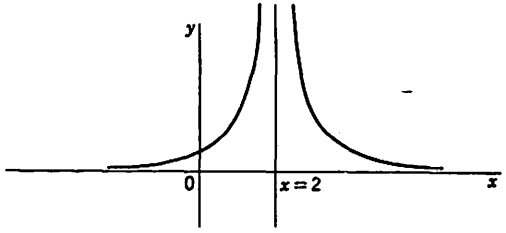
o también como

$$f(x) = x(1 + \text{sen } x) \qquad \text{conforme } x \to \infty.$$



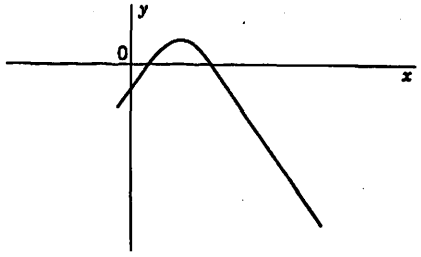
EJEMPLO 3. La función puede crecer sin límite, como

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad \text{conforme } x \to 2.$$



EJEMPLO 4. La función puede decrecer sin límite como en el caso de

$$f(x) = -2 + 3x - x^2 \qquad \text{conforme } x \to \infty.$$



En situaciones tales como las de los Ejemplos 3 y 4, donde una función crece o decrece sin límite, en ocasiones se dice que el límite es $+\infty$ ó bien $-\infty$.

Se dice que el límite de $f(x)$, conforme x tiende a a, es $+\infty$ si para todo M existe un $\delta(M)$ para el cual

$$f(x) > M \qquad \text{si } 0 < |x-a| < \delta.$$

Expresamos este hecho formalmente de la siguiente manera

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

o también $$f(x) \to +\infty \qquad \text{conforme } x \to a.$$

Se hacen definiciones semejantes para cubrir los casos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. También se hacen definiciones semejantes para las sucesiones.

Debe establecerse claramente que no se ha definido en forma alguna $+\infty$ ó $-\infty$. Se han definido ciertas expresiones, tales como $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Pero la palabra «infinito» o el símbolo ∞ por separado no se han definido. En particular, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que $f(x)$ crece sin límite conforme x se aproxima a a, y esto, a su vez, se precisa por la propia definición.

Cuando se dice que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, en general se dará a entender que existe en el sentido de nuestra primera definición, es decir, como un número finito. Para enfatizar, en ocasiones diremos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es finito. Siempre que tengamos ocasión de usar la última definición —esto es, $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, — deberá quedar claro que se usa en este sentido extendido o impropio.

Antes de terminar con esta sección probaremos el siguiente teorema, que es válido tanto para los límites tomados en el sentido propio como en el impropio.

2.4a Teorema. Supóngase que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos convergentes a a, con $x_n \neq a$ para todo n. Denótese $f(x_n)$ por y_n. Entonces

$$\lim y_n = A.$$

Demostración. Se dará la demostración para el caso en que tanto a como A son finitos. Sea dado $\epsilon > 0$. Entonces, de acuerdo con la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ existe un δ para el cual

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x-a| < \delta.$$

Y, supuesto que $x_n \to a$, existe un N tal que

$$|x_n - a| < \delta \qquad \text{si } n > N.$$

Por tanto, para todos esos números n,

$$|y_n - A| = |f(x_n) - A| < \epsilon$$

ya que $$0 < |x_n - a| < \delta.$$

Es decir,

$$|y_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N. \qquad \blacksquare$$

En ocasiones existen los límites laterales cuando no existe un límite. Por límite lateral se entiende que el punto que se aproxima, x, debe encontrarse en un lado del punto a. Precisamente, se dirá que A es el **límite por la derecha** de $f(x)$ conforme x tiende a a, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{si } a < x < a + \delta$$

El concepto de **límite por la izquierda** requiere que $a - \delta < x < a$. Estos límites se denotan por

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

y $$\lim_{x\to a-} f(x)$$

para los límites laterales derecho e izquierdo, respectivamente. Una notación más conveniente está dada por

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

y $$f(a-0) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

2.5 OPERACIONES CON LIMITES (FUNCIONES)

En esta sección se reproducirán para las funciones, los teoremas probados en la Sección 2.3 para las sucesiones. Los teoremas se probarán para el caso donde el límite es un límite finito en un punto finito. Esta restricción simplemente es por conveniencia, porque son verdaderos para límites en $\pm\infty$ y para límites laterales. Las modificaciones en las demostraciones para manejar estos casos son todas sencillas, de manera que se omiten para mantener el tamaño de la sección dentro de límites razonables. Además, puesto que las demostraciones son, naturalmente, muy semejantes a las dadas en la Sección 2.3, frecuentemente se omitirán por

completo o solamente se darán sus rasgos principales. Una simplificación más: solamente escribiremos $\lim f(x)$ en lugar de $\lim_{x\to a} f(x)$. dando por supuesto todo el resto del símbolo. Se supone la existencia de $\lim f(x)$ y $\lim g(x)$ y se concluye la existencia de los demás límites involucrados.

2.5a Teorema. Si $\lim f(x) = A$, entonces existe una vecindad agujereada de a en la cual $f(x)$ está acotada.

Demostración. Existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < 1 \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta.$$

Para tales x,

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| < 1.$$

Por tanto

$$|f(x)| < |A| + 1 \equiv M \qquad \text{para } 0 < |x - a| < \delta. \quad \blacksquare$$

2.5b Teorema. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

2.5c Teorema. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

Demostración. Sean $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)B| + |f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| \\ &\leq M|g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A|. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

2.5d Teorema. $\lim [f(x)/g(x)] = (\lim f(x))/(\lim g(x))$, si $\lim g(x) \neq 0$.

Demostración. Como antes, es suficiente con demostrar que

$$\lim 1/g(x) = 1/\lim g\ (x).$$

Primero, existe una vecindad agujereada en la cual

$$|g(x)| \geq (\tfrac{1}{2})|B|. \qquad (\text{¿Por qué?})$$

Entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{B}\right| = \left|\dfrac{g(x) - B}{g(x) \cdot B}\right| < \dfrac{|g(x) - B|}{(\frac{1}{2})|B|^2} = \dfrac{2|g(x) - B|}{|B|^2}$ $\blacksquare$

2.5e Teorema. $\lim |f(x)| = |\lim f(x)|$.

2.5f Teorema. Si $f(x) \geq 0$, entonces $\lim f(x) \geq 0$.

2.5g Teorema. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces $\lim f(x) \geq \lim g(x)$.

2.5h Teorema. Si $f(x) \geq 0$, entonces $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{4 - x^2 + \sqrt{x+2} + 5x^3}{x^2 + 15}} &= \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2 + \sqrt{x+2} + 5x^3}{x^2 + 15}} \\ &= \sqrt{\frac{\lim (4 - x^2 + \sqrt{x+2} + 5x^3)}{\lim (x^2 + 15)}} \\ &= \sqrt{\frac{4 - 4 + \sqrt{4} + 40}{4 + 15}} \\ &= \sqrt{\frac{42}{19}}. \end{aligned}$$

Los comentarios que se hicieron después del ejemplo en la Sección 2.3 son igualmente apropiados aquí: los pasos son tentativos con la justificación final de que se obtiene una expresión para la cual existe un límite.

EJERCICIOS A

1. Evaluar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x - 1}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right]$ (e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}]$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

2. Evaluar los siguientes límites, en el supuesto de que se sabe que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \log \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x^2}{1 - \cos x}$ (h) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$ (i) $\lim_{x\to 2\pi} \left[\dfrac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2}\right]$

(j) $\lim_{x\to \alpha} \dfrac{\operatorname{sen}(x - \alpha)}{x^2 - \alpha^2}$ (k) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (l) $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

EJERCICIOS B

1. Evaluar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)} - 1}{x}$.

2. Evaluar $\lim_{x\to \infty} [\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}]$.

3. Si $ax - x^2 \leq x$ para toda $x > 0$, demostrar que $a \leq 1$.
4. Si $axy + by^2 \leq 0$ para toda x, y, demostrar que $a = 0$, $b \leq 0$.
5. Recordar (Sección 2.1) la definición de $[x]$. Demostrar que para $a > 0$, $b > 0$, $\lim_{x \to 0+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$, $\lim_{x \to 0+} \left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x} = 0$. Discutir los límites izquierdos de estas funciones.
6. Hacer $f(x) = e^{1/x}$ para $x \neq 0$ y discutir los límites laterales de f en $x = 0$.
7. Hacer $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{e^{1/x} - 1}$ para $x \neq 0$ y discutir los límites laterales de f y de $xf(x)$ en $x = 0$.
8. Discutir los límites laterales en $x = 0$ de ang tan $1/x$.
9. Probar que una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista es que $f(a + 0)$ y $f(a - 0)$ existan y sean iguales.

EJERCICIOS C

1. Probar que $\sqrt[[x]]{x} \to 1$ conforme $x \to \infty$. (Ver Ejercicio C3 de la Sección 2.3.)
2. Evaluar $\lim_{x \to 0} [\sqrt{(1 + a_1x)(1 + a_2x) \cdots (1 + a_nx)} - 1]/x$.
3. Sea x_a la raíz de $ax^2 + bx + c = 0$ que tiene el menor valor absoluto. Demostrar que si $b \neq 0$, entonces $\lim_{a \to 0} x_a = -c/b =$ la raíz de la ecuación límite. ¿Qué pasa con la otra raíz?
4. Probar la "inversa" del Teorema 2.4a: Si $f(x_n) \to A$ para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

2.6 SUCESIONES MONOTONAS

Una clase muy importante de sucesiones son las sucesiones monótonas: aquellas que crecen o decrecen regularmente. Más precisamente, una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si sus elementos a_n satisfacen una desigualdad de la forma

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{o bien} \quad a_{n+1} > a_n \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

En el primer caso se dice que la sucesión es **monótona creciente débilmente** o que es **no decreciente.** En el segundo caso se dice que la sucesión es **estrictamente creciente.** Las sucesiones **monótonas decrecientes** o **no crecientes** se definen invirtiendo las desigualdades.

En particular, si una sucesión es estrictamente creciente —esto es, $a_{n+1} > a_n$— entonces es débilmente creciente; pero, por supuesto, la inversa no es necesariamente cierta. Por lo tanto, cualquier teorema que se establezca para las sucesiones débilmente crecientes se aplica a las estrictamente crecientes.

Estableceremos el siguiente teorema que es una consecuencia de nuestro principio fundamental de la continuidad del sistema numérico. (Ver Sección 1.5).

2.6a Teorema. Sea $\{a_n\}$ una sucesión no decreciente la cual está acotada superiormente. Entonces $\lim a_n$ existe y

$$\lim a_n = \sup a_n$$

Demostración. Supuesto que $\{a_n\}$ es un conjunto de números que está acotado superiormente, $\sup a_n$ existe de acuerdo con nuestro principio fundamental. Sea

$$A = \sup a_n.$$

Se desea demostrar que A satisface la definición de límite.

Sea dado $\epsilon > 0$. De acuerdo con el Teorema 1.5a, existe un N para el cual

$$a_N > A - \epsilon.$$

De aquí que, para $n > N$ $\quad A \geq a_n > a_N > A - \epsilon,$

o bien $\quad A \geq a_n > A - \epsilon,$

o, finalmente $\quad 0 \leq A - a_n < \epsilon \quad$ si $n > N.$

De aquí que, evidentemente. $\quad |A - a_n| < \epsilon \quad$ si $n > N.$ ∎

2.6b Corolario. Sea $\{a_n\}$ una sucesión no creciente acotada inferiormente. Entonces $\lim a_n$ existe y

$$\lim a_n = \inf a_n.$$

Demostración. La demostración de este teorema es semejante a la del Teorema 2.6a. ∎

Estos sencillos pero importantes resultados nos proporcionan una herramienta poderosa que se usará a través del desarrollo del libro. Como ejemplo, considérese la sucesión dada por

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

(Se verá que realmente se está discutiendo la convergencia de la serie infinita $\sum_{1}^{\infty} 1/k!$.)

Es evidente que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

De aquí que $a_{n+1} > a_n$, de modo que la sucesión es monótona creciente. A continuación se demostrará que está acotada superiormente:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \quad \text{(¿cómo?)}$$

$$< 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada; de aquí que el límite existe. Lo designaremos, por el momento, por e'.

Consideremos otro ejemplo:

$$e \equiv \lim (1 + 1/n)^n \text{ existe.}$$

En efecto, $e' = e$, pero la demostración de este hecho se pospondrá hasta que se hayan discutido las series infinitas. Por el momento se demostrará que $e \leqslant e'$.

Sea $b_n = (1 + 1/n)^n$. Entonces, de acuerdo con el teorema del binomio,

$$b_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e'$$

De aquí que $\{b_n\}$ está acotada superiormente por e'.

También es evidente que el k-ésimo término del desarrollo para b_n es menor que para b_{n+1}:

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Esto es cierto porque

$$\left(1 - \frac{j}{n}\right) < \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \qquad j = 1, 2, \ldots (k-1) < n - 1,$$

y b_{n+1} contiene un término positivo más que b_n.

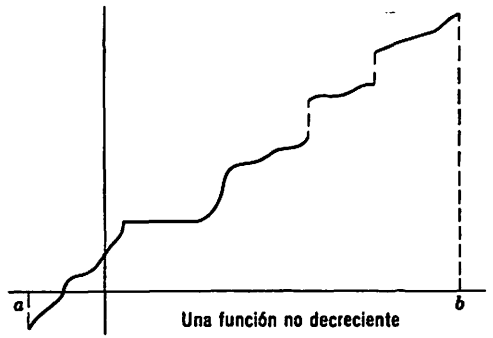
De aquí que $e = \lim (1 + 1/n)^n$ existe y

$$e \leqslant e',$$

puesto que e' es una cota superior para $\{b_n\}$ y e es la mínima cota superior para $\{b_n\}$.

2.7 FUNCIONES MONOTONAS

Se dice que una función f definida sobre un intervalo es **monótona creciente** si, para x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 > x_2$ implica que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ o bien $f(x_1) > f(x_2)$. En el primer caso, la función es **monótona creciente débilmente (o no decreciente)**. En el último caso, es **estrictamente creciente.** Una función es **monótona decreciente** si $x_1 > x_2$ implica que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ o bien $f(x_1) < f(x_2)$. Asimismo, los dos casos distinguen monotonicidad débil y estricta (puede ser «monotoneidad», pero definitivamente no «monotonía»). Como con las sucesiones, una importante consecuencia de la monotonicidad es la existencia de límites:



Una función no decreciente

2.7a Teorema. Sea $f(x)$ monótona sobre un intervalo $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Entonces los límites $f(b - 0)$ y $f(a + 0)$ existen. En todos los puntos interiores x, los límites $f(x + 0)$ y $f(x - 0)$ existen.

Demostración. Recordaremos que $f(x + 0)$ se refiere al límite derecho y $f(x - 0)$ al límite izquierdo. La demostración es para el límite izquierdo,

con f no decreciente. La demostración sería semejante para los demás casos.

Sea x_0 cualquier punto en $|a \leqslant x \leqslant b|$ excepto el propio a. Examinemos f cerca de este punto. Sea

$$x_n = x_0 - \frac{1}{n}$$

y

$$y_n = f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right).$$

Puesto que $f(x)$ es monótona

$$y_n < y_{n+1} < f(x_0).$$

Por tanto, y_n es monótona y acotada. De aquí que existe un número A tal que

$$\lim y_n = A \leqslant f(x_0)$$

Ahora bien, dado $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon)$ tal que

$$0 < A - f(x_N) < \epsilon.$$

Escojamos $\delta\ (\epsilon) = 1/N(\epsilon)$. Entonces, para $x_N = x_0 - \delta < x < x_0$ se tiene, debido a la monotonicidad.

$$f(x_N) < f(x) < A$$

o también $$\epsilon > A - f(x_N) > A - f(x) > 0,$$

lo que prueba el teorema. Prueba algo más, si $f(x)$ es no decreciente. entonces

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0).$$

Debe ser evidente que un argumento semejante probará que $f(x_0 + 0)$ existe y que

$$f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$ ∎

Para funciones no crecientes se tiene

$$f(x_0 + 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 - 0).$$

EJERCICIOS A

1. Examinar el Ejercicio B5 de la Sección 1.7. ¿Qué se establece acerca de la sucesión $(1 + 1/n)^n$?
2. Establecer los siguientes límites:

(a) $\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1} \to e.$ (b) $\left(1 + \frac{1}{n+4}\right)^{n} \to e.$

(c) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n} \to \sqrt{e}.$ (d) $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{6n} \to e^6.$

(e) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e.$ (f) $\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n!} \to e.$

(g) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n} \to e^2.$ [*Sugerencia*: Demostrar que $\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$]

(h) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n} \to e^3.$

EJERCICIOS B

1. Probar que $(1 - 1/n)^n \to 1/e$. Evaluar $\lim [1 - 1/(n-2)]^{n+7}$.
2. Supóngase que una sucesión $\{a_n\}$ está definida por

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots.$$

En general, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Demostrar que la sucesión es monótona y acotada y calcular el límite. (*Sugerencia:* Por inducción, demostrar que $a_n < 2$.)

3. Hacer el mismo ejercicio para la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.
4. Demostrar que $a^n/n! \to 0$. ¿Es monótona la convergencia?
5. Demostrar que $n^n/(n!\ e^n)$ tiende a un límite.
6. Demostrar que si $a_n > 0$ y $(a_{n+1}/a_n) \to q < 1$, entonces $a_n \to 0$.
7. Sea $x_n = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^n)$. Demostrar que $\lim x_n$ existe si $0 \leqslant a < 1$. (*Sugerencia:* Usar $1 + x \leqslant e^x$).

EJERCICIOS C

1. Sea $0 < x_1 < y_1$. Para $n > 1$, hacer $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$. Demostrar que $\lim x_n = \lim y_n$.
2. Dado $x_1 > 0$. Para $n > 1$, hacer $x_n = 1/(1 + x_{n-1})$. Demostrar que $\lim x_n$ existe y evaluarlo.
3. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de dígitos; es decir, cada $a_k = 0, 1, 2, \ldots, 8$ ó 9. Considérese la sucesión de fracciones decimales b_n dada por

$$b_1 = 0.\ a_1$$
$$b_2 = 0.\ a_1\, a_2$$
$$b_3 = 0.\ a_1\, a_2\, a_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_n = 0.\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n.$$

Demostrar que $\{b_n\}$ tiene un límite b entre 0 y 1. Designamos este número mediante el desarrollo decimal "infinito":

$$b = 0.\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots.$$

4. Demostrar que todo número entre 0 y 1 tiene un desarrollo decimal de la

forma discutida en el Ejercicio 3 y que esta representación es única, excepto que los números de la forma

$$0.\ a_1 a_2 \ldots a_n 999 \ldots 9 \ldots$$

y

$$0.\ a_1 a_2 \ldots (a_n + 1)0000 \ldots,$$

donde $a_n \neq 9$, son iguales.

5. Supóngase que una función f es localmente monótona en un intervalo I; es decir, en cada punto x en I, existe una vecindad en la cual f es monótona. Demostrar que, entonces, es monótona sobre todo el intervalo I.

3

Continuidad y diferenciabilidad

3.1 CONTINUIDAD. CONTINUIDAD UNIFORME

Hablando en términos generales, cuando se dice que una función f es continua en un punto a de su dominio, quiere darse a entender que sus valores en puntos cercanos son muy próximos a su valor en a. La definición precisa es:

Una función f, definida en una vecindad de un punto a, es **continua** en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Por supuesto que ésta es una idea con la cual el estudiante ya está familiarizado en una forma primitiva a partir de sus previos conocimientos sobre una función, porque la mayor parte de las funciones que conoce son continuas, excepto posiblemente en unos cuantos puntos.

Una función puede no ser continua en un punto a por cualquiera de las siguientes tres razones: f puede no estar definida allí; el límite puede no existir; o, si f está definida en a y el límite existe, entonces los dos pueden no ser iguales.

Si f no es continua en un punto a, todavía puede suceder que sea **continua por la izquierda** o **continua por la derecha** en a. Es decir, puede ser que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

o bien

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

En otros símbolos

$$f(a - 0) = f(a)$$

o bien

$$f(a + 0) = f(a).$$

Por ejemplo, sea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Es evidente que $f(x)$ es continua por la izquierda. Si se hubiera tomado $f(0) = +1$, sería continua por la derecha. Si se toma $f(0)$ como cualquier otro valor, entonces $f(x)$ no tiene continuidad izquierda ni derecha, aunque tiene límites izquierdo y derecho, a saber -1 y $+1$, rsepectivamente.

En particular, para la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (ver 2.1) se tiene $f(0-0) = -1$, $f(0) = 0$, $f(0+0) = +1$. Debe observarse, que una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en $x = a$, es que sea continua tanto por la izquierda como por la derecha. (Ver Ejercicio B9, Sección 2.5).

La definición de continuidad depende del concepto de límite, el cual ha sido definido en términos de ϵ y δ. Podemos establecer la definición en tales términos y, para muchos propósitos, es mejor hacerlo así. La definición queda de la siguiente manera:

Una función f, definida en $\{x_0 - h < x < x_0 + h\}$, es **continua** en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ, $0 < \delta \leq h$, para el cual

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

Ahora bien, el número δ, tal y como se ha definido, depende en general de ϵ; pero aquí puede depender también del punto x_0. De aquí que en ocasiones se escriba $\delta(\epsilon, x_0)$.

Se dirá que una función f es continua en un intervalo abierto I si es continua en cada punto en I. Si I es semicerrado o cerrado (esto es, contiene a uno o a ambos puntos extremos) decimos que es continua en I si es continua en cada punto interior (sección 1.4) y tiene la continuidad por un lado apropiada en cada punto extremo que se incluya. Por tanto, si I está dado por $\{a \leq x < b\}$, entonces, para que f sea continua en I debe ser continua por la derecha en a así como continua en todos los demás puntos x en I.

Si una función f no es continua en un punto x_0 de su dominio, se dice que es **discontinua** allí. El punto x_0 se llama un **punto de discontinuidad** — o, más brevemente, una **discontinuidad** — de f.

EJEMPLO. Demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en x_0. Escojamos cualquier h, digamos $h = 1$. Entonces, consideremos f en el intervalo I: $\{x_0 - 1 < x < x_0 + 1\}$. Aquí $|x - x_0| < 1$. De la cual se ve que:

$$|x| < |x_0| + 1.$$

Ahora bien, para x en I consideramos:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0|$$
$$< |x - x_0|(|x| + |x_0|) < |x - x_0|(2|x_0| + 1).$$

En consecuencia, se ve que escogiendo $|x - x_0| < \epsilon/(2|x_0| + 1)$ obtenemos

$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon.$$

Para llegar a esta desigualdad, hemos impuesto dos condiciones sobre x:

(1) $\qquad |x - x_0| < 1 \qquad$ (es decir, x está en I)

(2) $\qquad |x - x_0| < \epsilon/(2|x_0| + 1).$

Así, si se escoge $\delta = \min [1, \epsilon/(2|x_0| + 1)]$, se satisface nuestra definición. Nótese que se exhibe explícitamente la dependencia de δ respecto a x_0.

EJEMPLO. Demostrar que la función definida por $f(x) = 1/x$ es continua en el conjunto D: $\{|x| \geq 1/2\}$. Se tiene:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|}.$$

De aquí que, si tomamos x y x_0 en D, y escogemos $\delta = |x_0|\epsilon/2$, se obtiene

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2|x - x_0|}{|x_0|} < \frac{2\epsilon|x_0|}{2|x_0|} = \epsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

Ahora bien, como en cualquier límite, si δ satisface las condiciones de la definición, también lo hará cualquier número menor, digamos $\delta' \leq \delta$. En el ejemplo anterior, se tiene $\delta = |x_0|\epsilon/2$, donde $|x_0| \geq \frac{1}{2}$. De aquí que, $\delta' = \epsilon/4$ no es mayor que δ, y por tanto

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta' = \frac{\epsilon}{4}$$

para x_0 en D.

El significado del nuevo valor escogido, δ', es que será adecuado para cualquier valor x_0 arbitrariamente escogido en D; es decir, δ' es independiente de x_0 en D. Depende solamente del propio conjunto D, pero no del punto individual x_0 en D. Tal número δ recibe el nombre de uniforme y se dice que $f(x)$ es uniformemente continua en D.

De manera más precisa, se dice que una función f es **uniformemente continua** en un conjunto D, si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ [que depende

solamente de ϵ y D y de aquí que en ocasiones se escriba $\delta(\epsilon, D)$], de manera que para x y x' en D se tiene:

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x'| < \delta.$$

Se sigue inmediatamente que, si f es uniformemente continua en un conjunto D, entonces es continua en todo punto de D.

EJEMPLO. Demostrar que la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua para toda x. Obsérvese que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x' = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x - x'}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x'}{2}\right),$$

de manera que:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| < 2\left|\operatorname{sen}\frac{x - x'}{2}\right| < 2 \cdot \left|\frac{x - x'}{2}\right| = |x - x'|.$$

De aquí que: $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| < \epsilon$ siempre que: $|x - x'| < \epsilon$.

Es decir, puede tomarse $\delta = \epsilon$. Por tanto, se ha demostrado que sen x es uniformemente continua sobre todo el espacio unidimensional.

Ahora bien, no es cierto que toda función que es continua en un conjunto es uniformemente continua allí. Considérese, por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$, $\{0 < x < 1\}$. Que esta función es continua en $\{0 < x < 1\}$ puede verse fácilmente. Se ve que no es uniformemente continua allí considerando dos puntos,

$x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ y $x_n' = \dfrac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$. Se tiene

$$f(x_n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$$

y

$$f(x_n') = \operatorname{sen}(n + \tfrac{1}{2})\pi = \pm 1.$$

Así

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 \text{ mientras que } |x_n - x_n'| = \frac{1}{n(2n + 1)\pi}$$

puede hacerse tan pequeña como se desee, tomando n suficientemente grande.

Sin embargo, es cierto que si f es continua sobre un intervalo cerrado acotado, es uniformemente continua allí. Este es un teorema más profundo que se probará en la Sección 6.4 junto con otras propiedades igualmente graves de las funciones continuas.

3.2. OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Si f y g son dos funciones continuas definidas en un dominio D, entonces definimos la función $f + g$ en D como la función que asigna a cada punto x en D el valor de la función $f(x) + g(x)$. En forma semejante se define $f - g$, $f \cdot g$ (f multiplicada por g); y si g nunca toma el valor cero, se define f/g. Si g es cero para determinados valores x, y no para los demás, entonces la función f/g se define para un subconjunto D' de D en el cual g no se hace cero. Y si f es no negativa, $\sqrt{f}$ se define en la forma obvia. Nuestro interés inmediato en estas funciones es que su continuidad se deduce a partir de las de f y g.

3.2a Teorema. Sean f y g dos funciones definidas en una vecindad de x_0, las cuales son continuas en x_0.

(i) $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0;
(ii) si $g(x_0) \neq 0$, f/g es continua en x_0;
(iii) si $f \geqslant 0$, $\sqrt{f}$ es continua en x_0;
(iv) $|f|$ es continua en x_0.

Este teorema es una consecuencia inmediata de los teoremas sobre límites del Capítulo 2.

La parte (iii) del Teorema 3.2a es un caso especial de un teorema más general que afirma que si f y g son continuas, entonces la función compuesta F, dada por $F(x) = g[f(x)]$, es continua. Pero primero diremos algo acerca de ese tipo de funciones.

Sea $f(x)$ definida en un conjunto D con un rango R y sea $g(y)$ definida en un conjunto D' que contiene a R. Así, si x está en D, entonces $f(x)$ está en D' de tal manera que $g[f(x)]$ está definida. La función resultante se llama **la composición** de g con f. Ahora podemos probar nuestro teorema.

3.2b Teorema. Sean f y g funciones que satisfacen las condiciones del párrafo anterior. Si f y g son continuas también lo es la función compuesta F, dada por $F(x) = g[f(x)]$.

Demostración. Sea x_0 un punto de D. Entonces $y_0 = f(x_0)$ está en D'. Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta_1(\epsilon, y_0)$ tal que

$$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon \qquad \text{si } |y - y_0| < \delta_1.$$

Ahora que δ_1 está determinado, existe un $\delta_2(\delta_1, x_0)$ tal que

$$|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta_2.$$

Así, si $|x - x_0| < \delta_2$,

$$|F(x) - F(x_0)| = |g[f(x)] - g[f(x_0)]| = |g(y) - g(y_0)| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que la demostración no aplicó el hecho de que f y g fueran continuas en todo D y D'. Solamente se aplicó la continuidad en x_0 y y_0, respectivamente.

Otra importante propiedad de una función continua es que mantendrá su signo para un intervalo lo suficientemente pequeño.

3.2c Teorema. Si f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces existe una vecindad alrededor de x_0 en la cual $f(x) > (\frac{1}{2})f(x_0) > 0$.

Demostración. Puesto que f es continua en x_0, se escoge $\epsilon = (\frac{1}{2})f(x_0)$ y se aplica la definición de continuidad. Existe un δ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < (\tfrac{1}{2})f(x_0) \quad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

Así,

$$-(\tfrac{1}{2})f(x_0) < f(x) - f(x_0)$$

o también

$$f(x) > \tfrac{1}{2}f(x_0) \quad \text{si } |x - x_0| < \delta. \qquad \blacksquare$$

3.3 LA PROPIEDAD DEL VALOR INTERMEDIO

Una función continua tiene la propiedad de que toma todos los valores entre dos valores cualesquiera que obtenga. Este hecho se precisa mediante el teorema siguiente.

3.3a Teorema. Supóngase que f es continua en un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ y $A \neq B$. Entonces, para todo C entre A y B, existe un punto x_0 en $\{a < x < b\}$ para el cual

$$f(x_0) = C.$$

Demostración. La veracidad de este teorema parece obvia y, geométricamente, lo es. Sin embargo, el punto es dar una demostración basada en las propiedades aritméticas de los números en lugar de basarse en una descripción geométrica. Esto, a su vez, se torna un poco más difícil.

Supongamos, sin perder generalidad, que $A > B$. La función $f - C$ es positiva en a; y de aquí que, de acuerdo con el Teorema 3.2c, es positiva inmediatamente a la derecha de a. Pero no es positiva en todo el camino porque en b es negativa; y de aquí que, por el mismo teorema, debe ser negativa para un intervalo corto antes de b. Por tanto, el subconjunto S de I con la propiedad de que los valores de $f - C$ son positivos en S es un conjunto acotado. Por lo tanto, tiene un supremum $x_0 = \sup_S x$,

donde, evidentemente, de acuerdo con nuestras observaciones previas,

$$a < x_0 < b.$$

Se desea demostrar que $f(x_0) = C$.

De acuerdo con el Teorema 1.5a, para todo n existe un x_n satisfaciendo $x_0 - 1/n < x_n \leqslant x_0$ para el cual

$$f(x_n) > C.$$

Por el Teorema 2.4a,

$$\lim f(x_n) = f(x_0);$$

y por el Teorema 2.3g,

$$\lim f(x_n) > C.$$

Así,

(1) $$f(x_0) > C.$$

Para todo $x > x_0$, $f(x) \leqslant C$. Entonces tomando el límite desde la derecha y aplicando los mismos dos teoremas, se obtiene

(2) $$f(x_0) < C.$$

Combinando (1) y (2) se obtiene el resultado deseado. $\blacksquare$

El teorema asegura la existencia de por lo menos un punto para el cual $f(x) = C$. Es evidente que pueden existir muchos puntos con tal característica. En una situación importante podemos asegurar que existe exactamente un punto x_0 para el cual $f(x_0) = C$.

3.3b Teorema. Considérese que f satisface la hipótesis del Teorema 3.3a, y supóngase que es estrictamente monótona. Entonces existe exactamente un x_0 para el cual $f(x_0) = C$.

Demostración. Supongamos, sin perder generalidad, que f es creciente. Y supóngase, por contradicción, que existen dos puntos x_0 y x_0' que llenan la condición deseada, digamos con $x_0 > x_0'$. Entonces

$$C = f(x_0) > f(x_0') = C,$$

lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

3.4 FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función definida en un dominio D y que tiene un rango R, y sea ϕ una función definida en R con rango D. Si f y ϕ están relacionadas de manera que $f[\phi(y)] = y$ para toda y en R, y $\phi[f(x)] = x$ para toda x en D, entonces se dice que ϕ es la **función inversa** de f. El teorema básico de la función inversa es el siguiente.

3.4a Teorema. Si f es una función continua estrictamente creciente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, con $f(a) = \alpha$, y $f(b) = \beta$, entonces existe una función inversa única de f, la cual se llamará ϕ, definida en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, la cual es estrictamente creciente y continua allí.

Demostración. Por el Teorema 3.3b, para todo y en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$

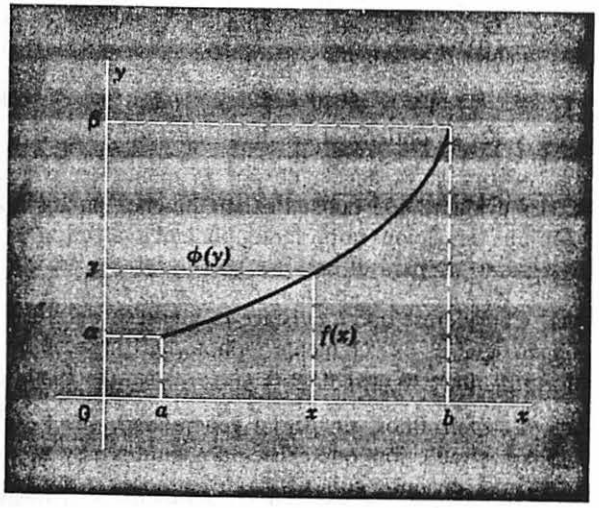
existe exactamente un x para el cual $f(x) = y$. Este x depende de la y escogida y se denotará por $\phi(y)$. Luego, por definición,

$$\phi[f(x)] \equiv \phi(y) = x.$$

Tomando la f de ambos miembros se obtiene

$$f[\phi(y)] = f(x) = y.$$

De aquí que la función única $\phi(y)$ es la inversa de f.



Puede verse que ϕ es estrictamente creciente, de la manera siguiente: Escójanse y_1 y y_2, digamos $y_1 > y_2$ y sean x_1 y x_2 respectivamente las correspondientes x. Entonces supóngase, por contradicción, que

$$x_1 = \phi(y_1) \leqslant \phi(y_2) = x_2.$$

Tomando f de ambos miembros y aplicando la monotonicidad de f, se tiene

$$y_1 = f(x_1) \leqslant f(x_2) = y_2.$$

Esta es una contradicción y de aquí que se establece la estricta monotonicidad de ϕ.

Para probar la continuidad se aplicará una vez más el argumento de contradicción. Supóngase que ϕ fuera discontinua en algún punto y_0 en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$. Entonces $\phi(y_0 - 0) < \phi(y_0)$ o también $\phi(y_0) < \phi(y_0 + 0)$. Sin perder generalidad, supóngase que se cumple la primera de estas dos suposiciones. Entonces sea

$$\phi(y_0 - 0) = \phi(y_0) - d \qquad \text{donde } d > 0.$$

Sea x_0 el valor de x correspondiente a y_0. Entonces

$$f(x_0) = y_0$$

y

$$\phi(y_0) = x_0.$$

Para todo δ, $0 < \delta < y_0 - \alpha$ se tiene

$$\phi(y_0 - \delta) < \phi(y_0 - \delta/2) < \phi(y_0 - 0) = \phi(y_0) - d = x_0 - d,$$

cumpliéndose la desigualdad puesto que ϕ es estrictamente monótona. Ahora, tomando f de los dos extremos de esta desigualdad y aplicando la estricta monotonicidad de f, se obtiene

$$y_0 - \delta = f(\phi(y_0 - \delta)) < f(x_0 - d)$$

o bien

$$f(x_0) - \delta < f(x_0 - d) < f(x_0).$$

Si hacemos que $\delta \to 0$ (porque δ fue arbitraria), se obtiene

$$f(x_0) < f(x_0 - d) < f(x_0).$$

Pero ésta es una contradicción. ∎

Hemos usado frecuentemente las raíces cuadradas con una observación ocasional de que su existencia se establecería posteriormente. Ahora estamos en posición de dar esa demostración. Lo que deseamos demostrar es lo siguiente.

3.4b Teorema. Para todo número y no negativo, existe un número único $x \geqslant 0$ para el cual $x^2 = y$.

Demostración. Sea dado cualquier y_0. Considérese la función f, dada por $f(x) = x^2$ en un largo intervalo, digamos $\{0 \leqslant x \leqslant b\}$ donde $b^2 > y_0$. (¿Cómo podemos estar seguros de que tal b existe? Ver Ejercicio A4). Ahora bien, en este intervalo, f es estrictamente creciente: Supóngase que $x_1 > x_2$, entonces

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

puesto que $x_1 - x_2 > 0$. También es continua; de aquí que existe una inversa única. Esto significa que para todo y en $\{0 \leqslant y \leqslant b^2\}$ existe un único x tal que $x^2 = y$. Esto se cumple en particular para el y_0 dado. ∎

Mediante el mismo tipo de argumento puede probarse la existencia de una raíz n-ésima única de cualquier número no negativo. Puesto que las potencias enteras también están definidas, ahora podemos definir lo que se desea dar a entender por $a^{n/m}$, a saber $\sqrt[m]{a^n}$. Es fácil ver que

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{(Ejercicio B9).}$$

Es un poco más difícil definir a^r para x arbitraria. Esto se pospondrá para el capítulo sobre las funciones trascendentes elementales.

EJERCICIOS A

1. Determinar si las siguientes funciones son continuas en los dominios indicados. En cada uno de los casos en que la función sea continua, determinar si es uniformemente continua.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \{\ 0 < x < 1\}. \\ x, & \{-1 < x < 0\}. \end{cases}$ (*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \{\ 0 < x < 1\}. \\ e^x, & \{-1 < x < 0\}. \end{cases}$

(*c*) $f(x) = x^2$, $|x| < a$, para $a > 0$ arbitraria. ¿Es uniformemente continua x^2 para toda x?

2. ¿Dónde son discontinuas $x - [x]$ y $[x] + [-x]$?
3. Mostrar gráficamente por qué no es uniformemente continua la función f dada por $f(x) = 1/x$ en $\{0 < x \leqslant 1\}$ (ver Ejercicio B3).
4. Demostrar que para todo positivo y_0 existe un b de manera que $b^2 > y_0$.
5. Hacer $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$. Determinar qué tan próximas deben tomarse x y x' para asegurar que $|f(x) - f(x')| < 10^{-100}$.
6. Supóngase que f es continua en un intervalo en donde no toma el valor 0. Demostrar que f tiene un solo signo en este intervalo.
7. Sea $f(x) = x/(x + 1)$, $x > -1$. Encontrar una función inversa para f. ¿Dónde está definida? Ilustrar gráficamente.
8. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 4$. Encontrar una función inversa (*a*) para $x \geqslant 1$, (*b*) para $x \leqslant 1$. ¿Dónde está definida cada una de ellas? Ilustrar gráficamente.

EJERCICIOS B

1. Hacer

$$f(x) = \begin{cases} x & x \text{ racional} \\ 1 - x & x \text{ irracional} \end{cases} \qquad \{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Demostrar que f es continua solamente en $x = 1/2$.

2. Sea f definida como en el Ejercicio B1. Definir g por $g(x) = f(x)f(1 - x)$. ¿Dónde es continua g?
3. Probar que $1/x$ no es uniformemente continua en $\{0 < x \leqslant 1\}$ (ver Ejercicio A3).
4. Probar que $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 5}{x - 1} + \dfrac{x^6 + 2x^4 + 6}{x - 7} = 0$ tiene una solución entre 1 y 7.
5. Demostrar que $\dfrac{5}{x - 1} + \dfrac{7}{x - 2} + \dfrac{16}{x - 3} = 0$ tiene una solución entre 1 y 2, y otra entre 2 y 3.
6. Probar que si $y > 0$, entonces y tiene una raíz cuadrada negativa única.
7. Probar que todo número real y tiene una raíz cúbica real única y que $\operatorname{sgn} \sqrt[3]{y} = \operatorname{sgn} y$.
8. Supóngase que f es continua en un intervalo, y en los puntos racionales de ese intervalo tiene los valores dados por $f(x) = x^2 - 3x + 5$. ¿Qué valores tiene sobre los puntos irracionales?

9. Probar que $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$.
10. Supóngase que f es estrictamente creciente, continua y acotada en $\{a < x < b\}$. Demostrar que puede definirse en a y en b de manera que sea estrictamente creciente, continua y acotada en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

EJERCICIOS C

1. Demostrar que si f es uniformemente continua en D_1 y también en D_2, entonces es uniformemente continua en el conjunto D que consiste tanto de D_1 como de D_2.
2. Demostrar que $\sqrt{x}$ y $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ son uniformemente continuas en $\{0 < x \leqslant 1\}$ encontrando un δ uniforme para cada función.
3. Demostrar que si f es continua en un intervalo y ningún valor alcanza más de una vez, entonces es estrictamente monótona allí.
4. Supóngase que f y g son crecientes y continuas en un intervalo I, y $f(x) \geqslant g(x)$ en I. Sean ϕ y ψ las funciones inversas de f y g, respectivamente, y supóngase que sus intervalos de definición se trasladan. Demostrar que en esta parte común $\phi(y) \leqslant \psi(y)$.

3.5 LA DERIVADA. REGLA DE LA CADENA

Se supone que el estudiante ya está familiarizado con las fórmulas elementales de derivación. En la parte posterior del libro puede encontrarse una lista de ellas. En forma muy semejante sus conocimientos acerca de las fórmulas relacionadas con las funciones logaritmo, exponencial y trigonométricas se basaron en definiciones elementales y poco satisfactorias de estas funciones. En el Capítulo 5 se definen estas funciones y sus propiedades se apoyan sobre fundamentos más firmes. Mientras tanto no vacilaremos en continuar con el uso de estas funciones como ejemplos.

Sea f una función definida en una vecindad de un punto x_0. La razón

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (\Delta x = x - x_0 = h)$$

se llama el **cociente diferencia** de f en x_0. Si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, recibe el nombre de la **derivada** de f en x_0 y se escribe

$$f'(x_0),\ Df(x_0)$$

o bien, en ocasiones, recordando la notación común $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx}$$

donde el punto x_0 se indica por $(dy/dx)_{x_0}$ o se sobrentiende por el enunciado del problema.

Si $f'(x)$ existe para todos los puntos x en algún subconjunto D' del dominio D de f (quizá un intervalo), define allí una función la cual se denotará por f'. Esta función se llama **función derivada** o la **derivada** de f.

Si f tiene una derivada en un punto x_0, se dice que es **derivable** en ese punto. Si tiene una derivada en todo punto de un conjunto D, se dice que es derivable en D. Si f' es continua en un conjunto D, se dice que f es **derivable continuamente** en ese conjunto.

Si la derivada no existe en un punto x_0, todavía pueden existir las **derivadas laterales.** Estas derivadas pueden definirse por

$$(1) \qquad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Y si éstas tampoco existen, entonces se tiene un tipo más débil dado por

$$(2) \qquad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}.$$

No existe una notación usual para estas derivadas laterales. Cuando tengamos ocasión de usar una derivada lateral se establecerá explícitamente lo que se desea dar a entender.

Una importante propiedad de las funciones derivables es su continuidad.

3.5a Teorema. Si una función f es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración. Sea $A = f'(x_0)$. Entonces

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A + \eta$$

donde $\eta \to 0$ conforme $h \to 0$. De aquí que existe un δ tal que $|\eta| < 1$ si $|h| < \delta$. Entonces haciendo $M = |A| + 1$ se tiene

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < |A+\eta| \cdot |h| < M|h|. \qquad \blacksquare$$

En forma semejante, la existencia de una derivada lateral del tipo (1) implicaría continuidad lateral —desde el mismo lado, por supuesto.

Si f es una función que es derivable en un intervalo, la función derivada f' está bien definida en ese intervalo. Podemos entonces inquirir acerca de la existencia de la derivada de f'. Si ésta existe en un punto x_0 se llama la **segunda derivada** de f en x_0 y se denota por

$$f''(x_0), \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x_0}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots.$$

Si $f''(x)$ existe para todo punto de un intervalo, define una función en ese intervalo que se denotará por f''.

A continuación podemos inquirir acerca de la existencia de las derivadas tercera y de orden superior. Si n es un entero definido pero no especificado, la derivada de orden n se denota por

$$f^{(n)}, \frac{d^nf}{dx^n}, \ldots.$$

El siguiente resultado se conoce comúnmente como **regla de la cadena.** Es la fórmula para derivar una función compuesta (Sección 3.2).

3.5b Teorema. Considérese que f y g satisfacen las condiciones de 3.2b y son derivables. Entonces si $y_0 = f(x_0)$, se tiene

$$\frac{d}{dx} g[f(x)]\bigg|_{x_0} = F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Demostración. Sea $y = f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= g[f(x)] - g[f(x_0)] \\ &= g(y) - g(y_0) \\ &= g'(y_0)(y-y_0) + \eta(y-y_0) \end{aligned}$$

donde $\eta \to 0$ conforme $y \to y_0$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= g'(y_0)\frac{y-y_0}{x-x_0} + \eta\frac{y-y_0}{x-x_0} \\ &= g'(y_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \eta\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $y \to y_0$ conforme $x \to x_0$. De aquí que $\eta \to 0$. Así,

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = g'(y_0)f'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Esta regla quizá es conocida por el estudiante en la forma

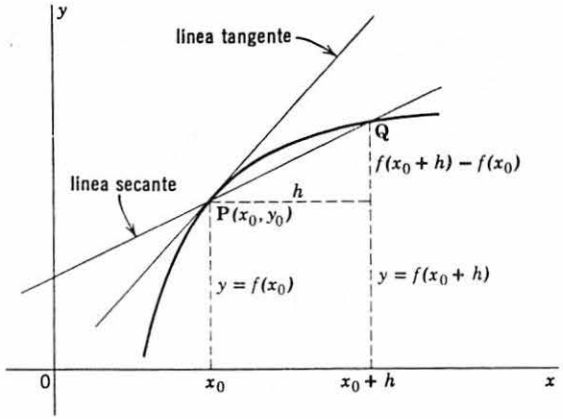
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

A partir de la definición de derivada y estos teoremas, las reglas usuales para derivar un producto, cociente, etc., se deducen de manera muy sencilla. Para sus deducciones, el estudiante debe consultar un texto de cálculo elemental.

Recordemos el significado geométrico de la derivada. Sea $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$

un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y **Q** un punto cercano. Las coordenadas de **Q** serán $[x_0 + h,\ f(x_0 + h)]$. La línea secante que pasa por **P** y **Q** tendrá su pendiente igual al cociente diferencia en x:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La existencia de la derivada —es decir, del límite de este cociente diferencia— entonces significa geométricamente que conforme **Q** se desliza a lo largo de la curva hasta coincidir con **P** la línea secante gira hasta una posición límite. La línea que ocupa esta posición límite se llama **línea tangente** a la curva dada por $y = f(x)$. Esta línea pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente $f'(x_0)$. De aquí que su ecuación es

(3) $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{(línea tangente)}.$$

La línea perpendicular a la línea tangente en (x_0, y_0) se llama **línea normal** y su ecuación, si $f'(x_0) \neq 0$, es

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

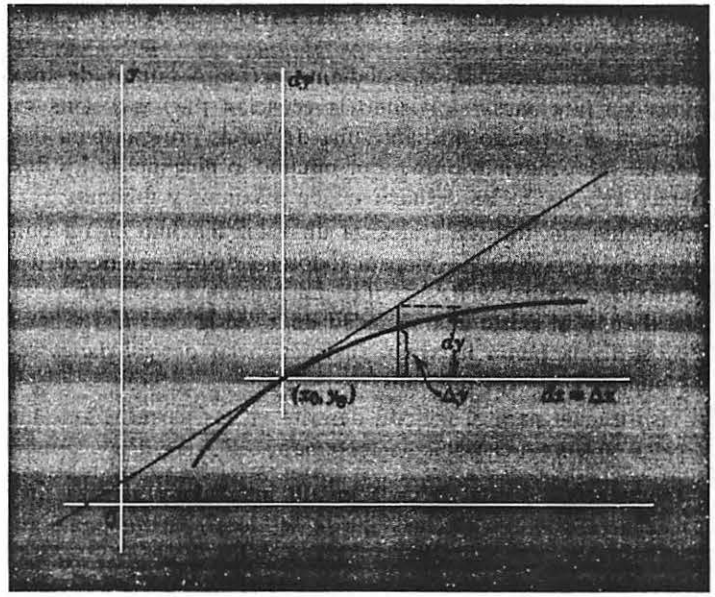
o también (4) $$f'(x_0)(y - y_0) + (x - x_0) = 0 \qquad \text{(línea normal)}.$$

Si hacemos un cambio de variable dado por $dy = y - y_0$, $dx = x - x_0$, la ecuación de la línea tangente (3) se transforma en

(5) $$dy = f'(x_0)\,dx.$$

Esto equivale a introducir nuevos ejes de coordenadas, a saber, el eje dy y el eje dx, centrados en (x_0, y_0) y paralelos a los antiguos ejes.

La ecuación (5) da el cambio en y, a saber, dy, a lo largo de la línea tangente debido a un cambio de dx en x. dx y dy reciben el nombre de **diferenciales**; dy es la diferencial de f en x_0. Se observa que da una



aproximación al cambio en y a lo largo de la curva debido a un cambio $h = \Delta x = dx$ en x:

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)\,dx + \eta\,dx$$

donde $\eta \to 0$ conforme $dx \to 0$. Esto es,

$$\Delta y = dy + \eta\,dx$$

donde η es pequeño cuando dx es pequeño. Cuando la fórmula se usa como una fórmula de aproximación, el valor de η debe estimarse para dar una información precisa acerca de la calidad de la aproximación.

Sin embargo, el estudiante debe entender que la ecuación

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

y la correspondiente

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

tienen significados independientes del tamaño de dx y dy. En particular, dx y dy no necesitan ser pequeñas. El significado dado a las ecuaciones

precedentes es que describen la línea tangente en el propio sistema coordenado (es decir, dx, dy).

3.6 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En el cálculo elemental, el estudiante encontró puntos de máximos y mínimos de funciones resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Una raíz de esta ecuación se investigó mediante una de varias pruebas para determinar si es un valor máximo o un valor mínimo, o ninguno de los dos. Recordaremos algunas de las definiciones de máximos y mínimos:

Se dice que una función f alcanza un **valor máximo** en un punto x_0 de su dominio D si $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todos los demás valores de x en D. Es un **máximo estricto** si $f(x_0) > f(x)$. La función alcanza un valor **máximo local** en x_0 si existe una vecindad de x_0 en la cual $f(x) \leqslant f(x_0)$. Tal punto x_0 se llama **punto máximo.** Invirtiendo las desigualdades se definen los **puntos** y **valores mínimos.**

La justificación para el método descrito en los párrafos anteriores se proporciona mediante el siguiente teorema.

3.6a Teorema. Si f está definida en un intervalo y alcanza un valor máximo o mínimo (incluso puede ser local) en un punto interior x_0 y si $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración. Para probar este teorema examinemos el cociente diferencia $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Tomemos el caso de un máximo. Aun para un máximo local, el numerador es $\leqslant 0$ si h es suficientemente pequeño. Para $h < 0$, entonces el cociente diferencia es no negativo: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Por tanto, también el límite lateral izquierdo de este cociente $\geqslant 0$. Pero supuesto que la derivada existe, cada uno de los límites laterales es igual a la derivada. Así, $f'(x_0) \geqslant 0$. Para $h > 0$, se tiene $\Delta f/\Delta x \leqslant 0$, y de aquí que tomando el límite lateral derecho, $f'(x_0) \leqslant 0$. Así que $f'(x_0) = 0$. ∎

Deseamos aplicar una cierta propiedad de las funciones continuas cuya demostración se pospondrá hasta un capítulo posterior. (Tendremos cuidado de no caer en un argumento circular aplicando cualquiera de las consecuencias de esta propiedad en su demostración posterior). La proposición de la propiedad es la siguiente.

3.6b Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado acotado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces existe un punto x_0 en I para el cual

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Demostración. Ver el Teorema 6.4b.

Esto significa que una función continua en un intervalo cerrado acotado tiene un valor máximo. Se deduce que tal función también tiene un valor mínimo.

3.6c Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado acotado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces existe un punto x_0 en I para el cual

$$f(x_0') \leqslant f(x) \qquad \text{todo } x \text{ en } I.$$

Demostración. La demostración de este teorema se deja como un ejercicio (A8).

Podemos ver, mediante ejemplos, que el intervalo cerrado es un hecho esencial. Considérese la función f dada por $f(x) = x^2$ sobre $\{0 < x < 1\}$. Es evidente que

$$\sup_{\{0<x<1\}} f(x) = 1$$

y también

$$\inf_{\{0<x<1\}} f(x) = 0,$$

pero ninguno es alcanzado por f. En efecto, una función continua sobre un intervalo abierto no necesita ser incluso acotada, como en el caso de f dada por

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \{0 < x < 1\}.$$

Debemos puntualizar también que pueden existir muchos puntos máximos. El teorema asegura la existencia de uno por lo menos.

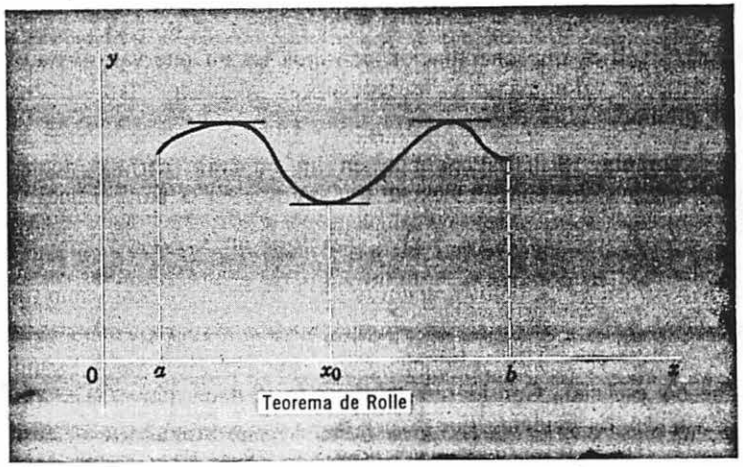
Con base a estos teoremas, puede probarse el teorema siguiente conocido como **teorema de Rolle.**

3.6d Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y derivable en el intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$, y si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto x_0 en J para el cual $f'(x_0) = 0$.

Demostración. El significado geométrico es éste: si la curva C dada por $y = f(x)$ tiene una tangente en todo punto de J entonces entre dos puntos sobre C que se encuentren al mismo nivel, existe (por lo menos) un punto entre ellos en el cual la línea tangente es horizontal. Procederemos a la demostración.

De acuerdo con los Teoremas 3.6b y 3.6c, f alcanza tanto su máximo como su mínimo en I. Sea

$$M = \max_{I} f(x)$$

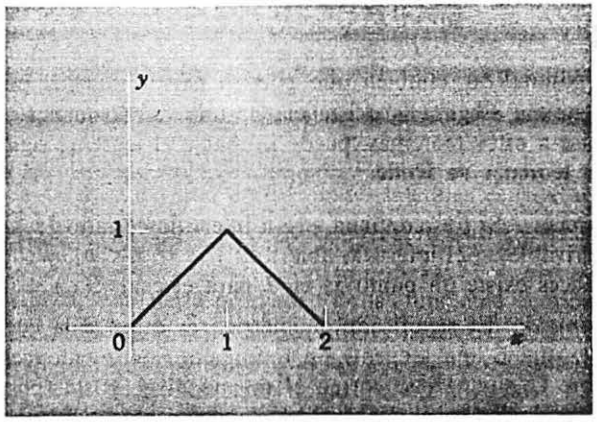


y

$$m = \min_I f(x).$$

Si $M = m$, entonces f es constante y $f'(x) = 0$ para toda x en J. Si $M \neq m$, entonces uno de ellos es diferente de $f(a)$. Supóngase que es M (el otro caso es semejante). Entonces $M > f(a)$, de manera que el máximo no puede obtenerse en $x = a$ o bien $x = b$. De aquí que existe un punto x_0 en J en el cual $f(x)$ es un máximo. Por el Teorema 3.6a, entonces,

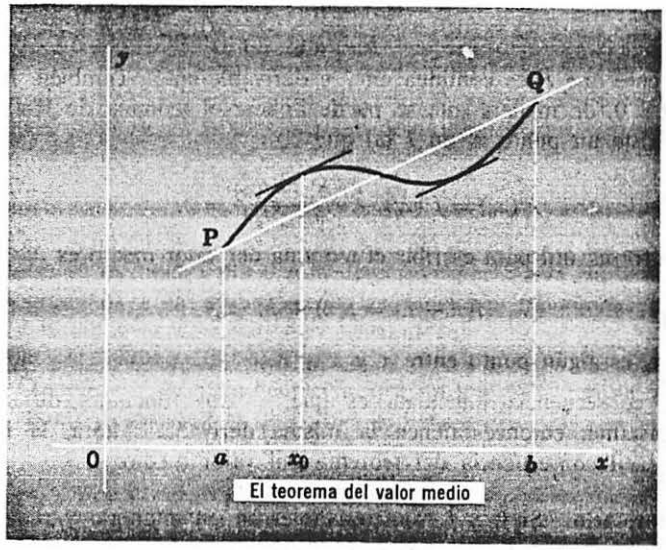
$$f'(x_0) = 0. \quad \blacksquare$$



La suposición de que $f'(x)$ existe para todos los puntos interiores es esencial, como puede verse examinando la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \{0 < x < 1\} \\ 2 - x & \{1 < x < 2\} \end{cases}$$

Esta función no tiene derivada solamente en un punto, a saber, $x = 1$, y la conclusión del teorema es falsa.



A continuación abordaremos el **teorema del valor medio.** Este también tiene un significado geométrico fácil de recordar. Sea una curva C dada por $y = f(x)$ la cual tiene una tangente en cada punto. Sean **P** y **Q** dos puntos sobre C. Entonces existe un punto entre ellos donde la pendiente de la línea tangente es paralela a la línea secante que los conecta. La proposición precisa es la siguiente.

3.6e Teorema. Sea f continua en un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y derivable en el intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$. Entonces existe un punto x_0 en J en el cual

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. De acuerdo con la fórmula de punto-pendiente, la línea secante está dada por

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cuando se despeja a y, esta expresión se transforma en

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Sea F la función dada por la diferencia de f y la función lineal que describe a la secante:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Es evidente que F es continua en I y derivable en J. También, $F(b) = F(a) = 0$, de manera que se puede aplicar el teorema de Rolle. Por tanto, existe un punto x_0 en J tal que

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad \blacksquare$$

Una forma útil para escribir el teorema del valor medio es

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x_0)$$

donde x_0 es algún punto entre x y $x + h$.

Una consecuencia inmediata es que, si dos funciones difieren en una constante, entonces tienen la misma derivada. Ahora, la inversa es una fácil consecuencia del teorema del valor medio.

3.6f Corolario. Si f_1 y f_2 son derivables en un intervalo y si $f_1'(x) = f_2'(x)$ para toda x en ese intervalo, entonces

$$f_1(x) = f_2(x) + c \qquad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

Demostración. Sea $\phi(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Entonces $\phi'(x) \equiv 0$ en el intervalo. Escójase una x_1 fija en el intervalo. Para cualquier otra x, se tiene

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_1)}{x - x_1} = \phi'(x_0) = 0.$$

Esto es, $$\phi(x) = \phi(x_1) = c. \quad \blacksquare$$

El Teorema 3.6e puede ser muy útil para estimar el tamaño de las funciones y al hacer aproximaciones numéricas. Por ejemplo, estimemos $\sqrt[3]{28}$. Por el teorema del valor medio con $x = 27$, $h = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{28} &= 3 + \tfrac{1}{3}(x_0)^{-\frac{2}{3}} \qquad 27 < x_0 < 28 \\ &= 3 + \frac{1}{3(x_0)^{\frac{2}{3}}} < 3 + \frac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = 3 + \frac{1}{3 \cdot 9} \\ &= 3 + \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

De aquí se tiene $$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + 1/27.$$

Como otro ejemplo, examinemos ang tan x cerca de $x = 0$. Por el teorema del valor medio,

$$\text{ang tan } x = \text{ang tan } 0 + x\frac{1}{1+x_0^2} = \frac{x}{1+x_0^2},$$

donde x_0 está entre x y cero. De aquí que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{ang tan } x < x,$$

donde x_0 se reemplaza por 0 a la derecha y por x a la izquierda.

Regresemos a la discusión de las funciones monótonas cuando se agrega la hipótesis adicional de derivabilidad.

3.6g Teorema. Sea f no decreciente en un intervalo. Entonces, en cada punto x_0 donde f es derivable, se tiene

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Demostración. En el cociente diferencia

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

el numerador y el denominador tienen el mismo signo. Entonces, pasando al límite, se obtiene $f'(x_0) \geqslant 0$ por 2.5f. $\blacksquare$

No es cierto que, si f es estrictamente creciente, entonces $f'(x_0) > 0$. (Ver Ejercicio A9.)

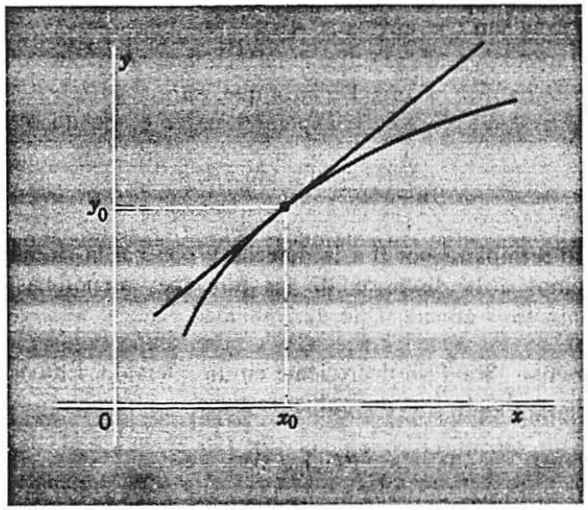
3.6h Teorema. Supóngase ahora que f es estrictamente creciente y continua en un intervalo, y supóngase también que $f'(x_0) > 0$ para algún x_0 en el intervalo. Entonces la función inversa ϕ es derivable en el punto $y_0 = f(x_0)$ y

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demostración. Sea x un punto cercano y sea y dada por $y = f(x)$, lo cual significa, por supuesto, que $x = \phi(y)$. Entonces

$$\frac{\phi(y) - \phi(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Pasando al límite se efectúa la demostración. ∎



Parece razonable esperar que $f'(x) \geqslant 0$ debe implicar que f es creciente. Este hecho se precisa en el siguiente teorema.

3.6i Teorema. Si f es derivable sobre un intervalo y si $f'(x) \geqslant 0$ en ese intervalo, entonces f es no decreciente; y si $f'(x) > 0$ allí, entonces f es estrictamente creciente.

Demostración. Sean $x_1 > x_2$ dos puntos en el intervalo. Entonces, por el teorema del valor medio (3.6e)

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$$

donde $x_1 > x_0 > x_2$. Así

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2).$$

Ahora bien, $x_1 - x_2 > 0$, de manera que

$$f(x_1) - f(x_2) \geqslant 0 \qquad \text{si } f'(x_0) \geqslant 0$$

y también $$f(x_1) - f(x_2) > 0 \qquad \text{si } f'(x_0) > 0$$

De aquí que f es no decreciente en el primer caso y estrictamente creciente en el segundo. ∎

EJERCICIOS A

1. Derivar

   (*a*) $x\sqrt{x + 2x^2}$ (*b*) $\sqrt[3]{\dfrac{4 + 5x}{4 - 5x}}$

   (*c*) $\dfrac{x(x - 5)\sqrt{x + 3}}{(x^2 + 5)^3(1 - x)^3\sqrt{1 + x}}$ (*d*) $\operatorname{sen} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

   (*e*) $\operatorname{ang\,tan} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ (*f*) $\log \tan \sqrt{1 - x^3}$

   (*g*) $\exp\left(\dfrac{x^2}{1 + x^3}\right)$

2. Supóngase en cada parte que existe una función derivable dada por $y = f(x)$ la cual satisface la ecuación dada. Calcular su derivada:

   (*a*) $y^{1/2} + x^{1/2} = a^{1/2}$ (*b*) $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$

   (*c*) $x^2 + 15\sqrt{xy} + y^3 = 36$ (*d*) $\operatorname{sen}(x^2 + y^2) = e^{x^2 - y^2}$

3. Sea la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \{x \leqslant 1\} \\ 2x & \{x > 1\}. \end{cases}$$

   ¿Tiene f una derivada continua?

4. Encontrar las ecuaciones de las dos tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ las cuales pasan por el punto $(5, 0)$.

5. Evaluar $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$.

6. Usar el teorema del valor medio para demostrar que:

   (*a*) $\sqrt{101}$ está entre 10 y 10.05.

   (*b*) $\operatorname{sen} 46° \sim \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \pi/180)$, donde $\sim$ significa "aproximadamente igual a". ¿Es mayor o menor esta estimación?

   (*c*) $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \geqslant \operatorname{ang\,sen} x \geqslant x$ Si $\{0 \leqslant x < 1\}$.

   ¿Cuándo se cumple la igualdad?

   (*d*) $1 - \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}} \leqslant 1 - \dfrac{x}{2(1 + x)^{3/2}}$ si $x > -1$.

   ¿Cuándo se cumple la igualdad?

   (*e*) $\log(1 + x^2) \leqslant x^2$ si $x \geqslant 0$.

   (*f*) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}} < \operatorname{ang\,sen} x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{1 - x^2}}$ si $x > \dfrac{1}{2}$.

   (*g*) $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{\log x'}{x} + \dfrac{1}{x'}$ si $0 < x' < x$.

7. Dar un ejemplo de una función que sea continua en un punto, pero no derivable allí.

8. Aplicar el Teorema 3.6b para probar el Teorema 3.6c.

9. Demostrar que $f(x) = x^3$ define una función estrictamente creciente. Calcular $f'(0)$.

EJERCICIOS B

1. Encontrar las derivadas laterales [definición (1), Sección 3.5] en $x = 0$ de la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

2. Encontrar las derivadas laterales [definición (2), Sección 3.5] en $x = 0$ de $x|\cot x| + \operatorname{sgn} x$.

3. Definir la función f por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ para toda x.

4. Calcular la derivada de $f_1(x)\, g_2(x) - f_2(x)\, g_1(x)$, y de aquí probar que

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

5. Establecer y probar un teorema que dé un significado sensato a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

6. Aplicar el Teorema 3.6h para probar que $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

7. Sea f una función monótona en un intervalo I con $f'(x) > 0$ en todo I. Demostrar que si $f''(x_0)$ existe en un punto x_0 en I, entonces $\phi''(y_0)$ existe, donde ϕ es la función inversa de f y $y_0 = f(x_0)$. Demostrar también que $\phi''(y_0) = -f''(x_0)/[f(x_0)]^3$. También encontrar una fórmula para ϕ''' en términos de f''', f'' y f'.

8. Si f y g tienen derivadas n-ésimas, demostrar que

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x) + \cdots\cdots + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + f(x)g^{(n)}(x),$$

donde los coeficientes son los coeficientes binomiales. (Esta fórmula se conoce con el nombre de **regla de Leibnitz**).

9. Definir f por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que

(*a*) $f'(0) = 0$.

(*b*) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x (x \neq 0)$, de manera que $f'(0)$ existe pero $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

10. Examinar la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que éste es un ejemplo de una función que es derivable en todo punto pero que tiene una derivada no acotada.

11. Para qué valores de α es derivable f en $x = 0$, si

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

12. Definir f por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ racional} \\ 0 & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que f es continua solamente en un punto y es derivable allí.

13. Supóngase que f es derivable en un intervalo I y sea a un punto en I. Demostrar que existe una sucesión $\{x_n\}$ en I con $x_n \to a$ para la cual $f'(x_n) \to f'(a)$. (Aplicar el teorema del valor medio).

14. Supóngase que en el Ejercicio 13 se sabe que $\lim_{x \to a} f'(x) = A$ existe. Demostrar que $A = f'(a)$.

15. Demostrar que $3x^4 + 4x^3 + c = 0$ puede tener cuando más una raíz menor que o igual a -1, no importa cuál sea el valor de c.

16. Demostrar que si f es continua en $\{0 \leqslant x < a\}$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ y creciente, entonces $f(x)/x$ es creciente.

17. Si f es derivable en $x = a$, calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + \alpha h) - f(a + \beta h)}{h}.$$

EJERCICIOS C

1. Demostrar que si $f'(x_0) > 0$, existe una vecindad de x_0 en la cual

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{si } x > x_0$$
$$f(x) < f(x_0) \quad \text{si } x < x_0.$$

En esta situación se dice que f es creciente en x_0. ¿Significa esto que $f(x)$ es monótona en esta vecindad? Dar un ejemplo para mostrar que no lo es.

2. Demostrar que la función f definida en el Ejercicio B3 es infinitamente derivable para toda x; es decir, todas las derivadas existen.

3. Hemos visto que una función derivada no necesita ser continua (Ejercicio B9). Sin embargo, tiene la propiedad del valor intermedio. Supóngase que f es derivable en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y $f'(a) = A$ y $f'(b) = B$. Demostrar que para toda C entre A y B existe una c entre a y b para la cual $f'(c) = C$. [*Sugerencia:* Examinar $f(x) - C(x - a)$].

4. Supóngase que $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ en un intervalo. Demostrar que entre dos soluciones consecutivas de $f(x) = 0$ existe exactamente una solución de $g(x) = 0$.

5. Probar que

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{k1}'(x) & \cdots & f_{kn}'(x) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

6. Supóngase que f está definida por toda x, es continua y $\neq 0$ en $x = 0$, es derivable en $x = 0$ y satisface la ecuación funcional $f(x + y) = f(x)f(y)$ para toda x y y. Demostrar que $f(x) = e^{cx}$, donde $c = f'(0)$.

4

Integración

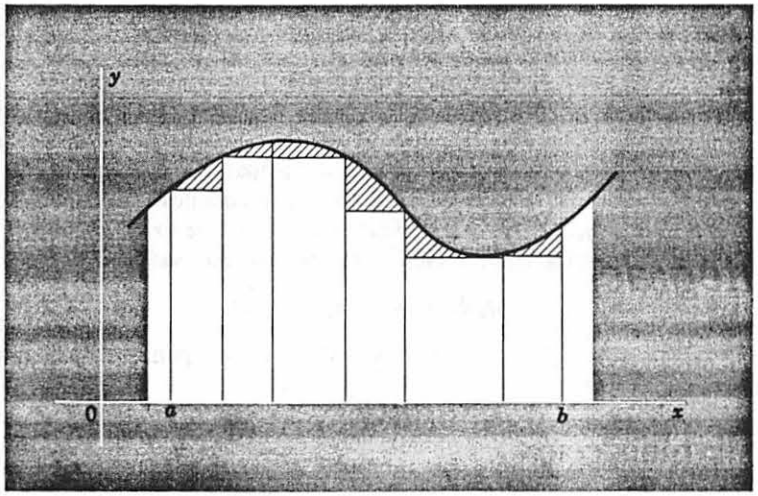
4.1 INTRODUCCION

A continuación estudiaremos la **integral de Riemann**, la cual lleva este nombre en honor del matemático alemán B. Riemann, quien fue primero en establecer la integral sobre bases aritméticas en lugar de bases geométricas. Aunque seguiremos esas ideas aquí, por supuesto, apelaremos a la geometría respecto a nuestras ideas intuitivas.

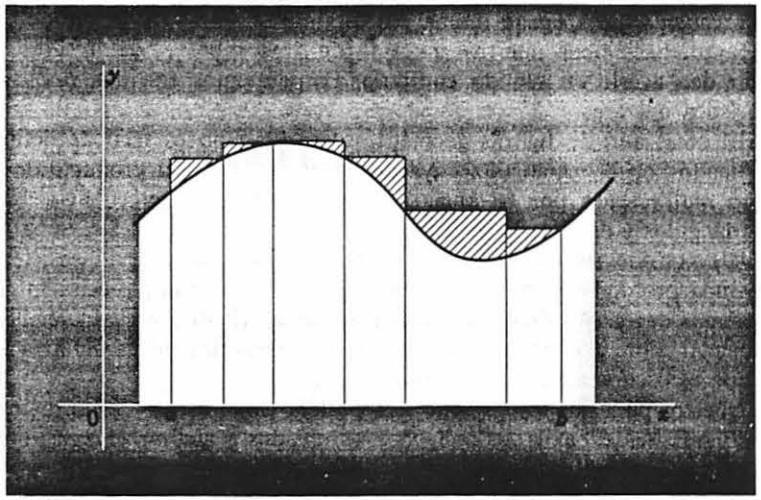
La integral está ligada íntima y naturalmente al concepto de área. Sin embargo, basaremos nuestro concepto de área sobre el de integral, en lugar de hacerlo en sentido contrario. Empezaremos con una discusión heurística del área.

El área, aún de figuras geométricas sencillas, no es fácil de definir. Partiendo con el rectángulo, cuya área se toma como el producto de su largo multiplicado por su ancho, progresamos rápidamente hacia áreas de triángulos y de ellas hacia áreas de polígonos en general. Sin embargo, cuando consideramos las áreas de figuras con fronteras curvilíneas, tenemos una profunda y básica dificultad en decidir en forma precisa lo que queremos dar a entender por área. Si el estudiante mirara cualquier libro elemental sobre geometría plana vería que la discusión acerca del área del círculo es oscura y tal vez un tanto mística.

Nuestro punto de vista —que se considera como usual— es aproximar una figura dada mediante polígonos apropiados y definir el área de la figura en términos de las áreas de los polígonos de aproximación. Empezamos por considerar una figura limitada por las líneas $x = a$, $x = b$, el eje x y la «curva» C dada por $y = f(x)$, la cual se supondrá que es positiva. Aproximamos la figura mediante polígonos, en dos formas. Dividimos el segmento $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ del eje x en segmentos menores y sobre cada uno de estos segmentos erigimos un rectángulo con su base sobre el eje x y cuyo lado superior se encuentra completamente bajo la curva.



Los rectángulos así construidos forman un polígono que se encuentra contenido completamente en la figura dada cuya área se desea definir. Cualquier definición razonable de área tendría el área de este polígono menor que el área de la figura.



Construyamos ahora un nuevo polígono. Sobre cada subintervalo colocamos un rectángulo cuyo lado superior está siempre sobre la curva. Estos forman un polígono que encierra a la figura dada y de aquí que deba esperarse que tenga un área mayor que la de nuestra figura bajo cualquier definición razonable de área.

Si P es cualquier polígono que encierra a la figura y Q es cualquier polígono encerrado por la figura, entonces

$$A_P \geqslant A_Q,$$

donde A_P representa el área de P y A_Q el área de Q. De aquí que, para cualquier Q, A_Q es una cota inferior para los números A_P; así,

$$\bar{A} \equiv \inf A_P \geqslant A_Q$$

para toda Q. Entonces $\bar{A}$ es una cota superior para los números A_Q, y de aquí que

$$\bar{A} \geqslant \underline{A} \equiv \sup A_Q.$$

Si resultara que $\bar{A} = \underline{A}$, entonces se definirá el área de nuestra figura como su valor común. Si resultara que $\bar{A} > \underline{A}$, no se define el área. Todas estas cosas se entenderán mejor una vez que se haya dado la definición formal de integral.

4.2 LEMAS PRELIMINARES

En esta sección deseamos establecer las bases para la definición de integral de una función f definida en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Empezaremos por cierta nomenclatura y notaciones usuales que se usarán consistentemente en el resto de este capítulo.

Nuestra función f será una función acotada definida en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, y M y m estarán definidas por

$$M = \sup_I f(x) \qquad m = \inf_I f(x).$$

Por una **partición** P de I debe entenderse una sucesión finita de números, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

El k-ésimo subintervalo de P, a saber $\{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\}$, se denotará por I_k; su longitud, $x_k - x_{k-1}$, se denotará por $\Delta_k x$ y M_k y m_k estarán definidos por

$$M_k = \sup_{I_k} f(x) \qquad m_k = \inf_{I_k} f(x).$$

Por **norma** de la partición P, denotada por $\|P\|$, se deberá entender

$$\|P\| = \max_P \Delta_k x,$$

donde esta notación servirá para implicar el máximo de todas las longitudes de todos los subintervalos formados por la partición P.

Por **suma inferior** $\underline{S}_P(f)$ sobre la partición P quiere darse a entender

$$\underline{S}_P(f) = \sum_P m_k \Delta_k x;$$

y una vez más, esta notación $\sum_P$ sirve para implicar que la cantidad $m_k \Delta_k x$ se calcula para cada I_k formado por P y entonces la suma de todas estas cantidades se conoce. En ocasiones se suprimirá la f y, tal vez, en ocasiones también la P, de manera que este concepto puede encontrarse representado como

$$\underline{S}_P(f) \quad \text{ó} \quad \underline{S}_P \quad \text{ó} \quad \underline{S}.$$

El guión en la parte inferior significará que se trata de una suma inferior. En caso de que f fuese una función positiva, una suma inferior representaría geométricamente el área de uno de los polígonos encerrados que se discutieron en la sección anterior.

Por **suma superior** $\bar{S}_P(f)$ sobre P se quiere dar a entender

$$\bar{S}_P(f) = \sum_{I'} M_k \Delta_k x.$$

Como en el caso de la suma inferior, pueden suprimirse la f y la P cuando no existe posibilidad de ambigüedad. Geométricamente, para f positiva, representa el área de un polígono que encierra a la curva.

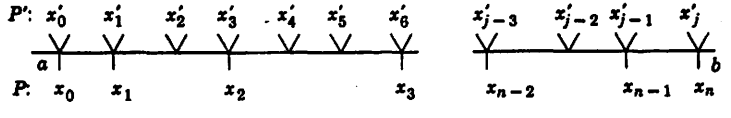
Ahora volveremos nuestra atención hacia una sucesión de lemas.

4.2a Lema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$; entonces, para cualquier partición P, se tiene

$$\bar{S}_P(f) \geqslant \underline{S}_P(f).$$

Demostración. La demostración se deduce inmediatamente a partir del hecho de que $M_k \geqslant m_k$. ∎

A continuación introduciremos la idea de una partición P' que sea un refinamiento de otra partición P. Se dirá que P': $\{x_0', x_1', \ldots x_j'\}$ es un **refinamiento** de P: $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ si toda x_k que se encuentre en P también se encuentra en algún punto de P' como un x_p'; en otras palabras, si P' puede construirse a partir de P distribuyendo puntos de partición adicionales entre aquellos que ya se tienen:



4.2b Lema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, y si P y P' son particiones de I, con P' como refinamiento de P, entonces

$$\bar{S}_{P'}(f) < \bar{S}_P(f)$$

y

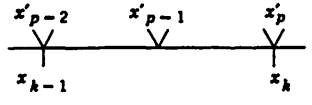
$$\underline{S}_{P'}(f) > \underline{S}_P(f).$$

Esto es, un refinamiento decrece las sumas superiores e incrementa las sumas inferiores.

Demostración. Probaremos la proposición para las sumas superiores; la correspondiente a las sumas inferiores es semejante. Para hacerlo basta simplemente con observar un término en la expresión para $\bar{S}_P$ que proviene de un intervalo sencillo I de P, y comparar este término con los términos correspondientes de $\bar{S}_{P'}$, es decir, con aquellos que provienen de I_k en el refinamiento. Por simplicidad, supóngase que existe solamente un punto P' en I_k. La contribución a $\bar{S}_P$ de este intervalo es

$$M_k \Delta_k x = M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Supóngase que $x_p' = x_k$. Entonces x'_{p-1} es el punto intermedio y $x'_{p-2} = x_{k-1}$.



La contribución a $\bar{S}_{P'}$ proveniente de I_k es

$$M'_{p-1}(x'_{p-1} - x'_{p-2}) + M_p\,'(x_p' - x'_{p-1}),$$

donde, por supuesto, $M_p' = \sup_{I_p'} f(x)$ y así sucesivamente. Pero M_p' y $M'_{p-1} \leqslant M_k$, puesto que tanto I_p' como I'_{p-1} están contenidos en I_p. De aquí que

$$\begin{aligned} M'_{p-1}(x'_{p-1} - x'_{p-2}) + M_p'(x_p' - x'_{p-1}) &< M_k(x'_{p-1} - x'_{p-2}) + M_k(x_p' - x'_{p-1}) \\ &= M_k(x_p' - x'_{p-2}) = M_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Por tanto, la contribución a $\bar{S}_{P'}$ de I_k es menor que o igual a la contribución a $\bar{S}_P$. Es evidente que lo mismo será cierto no importando cuántos puntos intermedios de P' se encuentren en I_k. (Podría darse una prueba por inducción.) Sumando sobre todos los intervalos de P se obtiene la desigualdad deseada. ∎

4.2c Lema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$; y si P y P' son dos particiones cualesquiera de I, entonces

$$\bar{S}_P(f) > \underline{S}_{P'}(f).$$

Demostración. Este lema es muy fácil de probar. Sea P'' el refinamiento común de P y P' formado tomando como puntos de partición todos los puntos que se encuentran en P y P'. Entonces

$$\bar{S}_P > \bar{S}_{P''} > \underline{S}_{P''} > \underline{S}_{P'}.$$

La primera y última desigualdades se basan en el Lema 4.2b y la intermedia en el Lema 4.2a. ∎

Nuestra serie de lemas ahora ha establecido los siguientes hechos. Para cualquier función acotada f, la clase de números formada por las sumas superiores tiene como una cota inferior cualquier suma inferior, e inversamente, la clase de sumas inferiores tiene cualquier suma superior como una cota superior. Por tanto,

$$\inf \bar{S}_P > \underline{S}_{P'}$$

para cualquier partición P'. Así, $\inf \bar{S}_P$ es una cota superior para las sumas inferiores, de modo que

$$\inf \bar{S}_P > \sup \underline{S}_{P'}.$$

Ahora bien, $\inf \bar{S}_P(f)$ se llama **integral superior de Riemann-Darboux** de f sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, y $\sup \underline{S}_{P'}(f)$ es la **integral inferior de Riemann-Darboux** de f sobre I. Y se escribe

$$\inf \bar{S}_P(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$\sup \underline{S}_P(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Nos referiremos a ellas simplemente como las **integrales superior e inferior.** Por tanto hemos probado el siguiente lema.

4.2d Lema. Si f es una función acotada sobre I,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

4.2.e Lema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, y si M y m son cotas superior e inferior para f en I, entonces

$$m(b-a) < \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < M(b-a).$$

Demostración. La demostración se deja como un ejercicio (B5).

4.2f Lema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces para cualquier constante c

$$\overline{\int_a^b} [f(x)+c]\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + c(b-a)$$

y

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+c]\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + c(b-a).$$

Demostración. Para cualquier partición P, sean

$$\mathscr{M}_k = \sup_{I_k} [f(x)+c], \qquad M_k = \sup_{I_k} f(x).$$

Entonces $\mathscr{M}_k = M_k + c$. Multiplicando por $\Delta_k x$ y sumando, se obtiene

$$\bar{S}_P(f+c) = \bar{S}_P(f) + c(b-a).$$

Tomando los ínfima para ambos miembros se llega al resultado para las integrales superiores. Se desarrolla un argumento semejante para las integrales inferiores. ∎

Se considerará a continuación una fórmula de adición para las integrales superiores e inferiores.

4.2g Lema. Si f es una función acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, y c es un punto intermedio, entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

y

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Demostración. Se dará la demostración para las integrales superiores, puesto que la de las integrales inferiores es semejante. Indicaremos el intervalo sobre el cual se toma una suma superior escribiendo los puntos extremos como límites sobre $\bar{S}$ en la misma forma que en las integrales, de modo que $\bar{S}_a^b$ y $\bar{S}_a^c$ representarán, respectivamente, una suma superior sobre el intervalo $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y una sobre $\{a \leqslant x \leqslant c\}$.

Sea P cualquier partición sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Entonces puede tener o puede no tener un punto de partición en c. Si lo tiene, bien; en caso contrario refinamos P introduciendo un punto de partición en c. Entonces, si P' es la nueva partición, también induce particiones de $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ y $\{c \leqslant x \leqslant b\}$ Así,

$$\bar{S}_{aP}^b > \bar{S}_{aP'}^b = \bar{S}_a^c + \bar{S}_c^b > \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Las dos integrales de la derecha forman una cota inferior para todas las sumas superiores de la izquierda. De aquí que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx > \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Ahora, para cualquier $\epsilon > 0$, existen particiones de $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ y $\{c \leqslant x \leqslant b\}$ para las cuales

$$\bar{S}_a^c < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \bar{S}_c^b < \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2}$$

puesto que las integrales son los ínfima de tales sumas. Ahora bien, estas dos particiones juntas forman una partición de $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, de modo que para estas particiones se tiene

$$S_a^b = S_a^c + S_c^b < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \epsilon.$$

Pero la suma de la izquierda es una cota superior para la integral superior sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, de manera que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \epsilon.$$

Ya que esta desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, se concluye que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Combinando las desigualdades (1) y (2) se llega a la conclusión deseada.

4.2h Lema. Supóngase que f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Sean F y G definidas en I por

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt \quad \text{y} \quad G(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,dt \qquad \{a < x < b\},$$

y sea

$$F(a) = G(a) = 0.$$

Entonces $$F'(x_0) = G'(x_0) = f(x_0)$$

en cada punto x_0 de I en el cual f es continua. (Por supuesto que en a y b, las derivadas son laterales.)

Demostración. En un punto x_0 que llene la condición dada, examinamos el cociente diferencia

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\overline{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt & \text{si } h > 0 \\ -\dfrac{1}{h}\overline{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0}} f(t)\,dt & \text{si } h < 0, \end{cases}$$

la última igualdad se basa en el Lema 4.2g. Supongamos, sin perder generalidad, que h es positiva; el otro caso es semejante. Por el Lema 4.2f,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{h}\overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Entonces, por el Lema 4.2e,

$$\frac{1}{h}h \inf_{|t-x_0|\leqslant h} [f(t) - f(x_0)] < \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) < \frac{1}{h}h \sup_{|t-x_0|\leqslant h} [f(t) - f(x_0)]$$

Por la continuidad de f en x_0, ambos miembros tienden hacia cero conforme $h \to 0$.

De aquí que $$F'(x_0) = f(x_0).$$

En forma semejante, $$G'(x_0) = f(x_0).$$ ∎

4.3 LA INTEGRAL DE RIEMANN

Si f es una función acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

entonces se dirá que f es **integrable según Riemann** sobre I y el valor común de las integrales superior e inferior se llamará **integral de Riemann** de f sobre I. Para abreviar, simplemente se le dará el nombre de **integral** de f sobre I; o, para distinguirla de la integral indefinida, en ocasiones se le llamará **integral definida** de f sobre I. Se denotará su valor mediante un signo de integral sin el guión. Así, para una función integrable f, se tiene

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tal vez, en este punto, no se vea claro si todas las funciones, o lo que para el caso es lo mismo, ninguna función es integrable. La situación es que algunas lo son y otras no. Los teoremas y ejemplos siguientes ilustran este hecho.

4.3a Teorema. Si f es monótona en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, es integrable allí.

Demostración. Supóngase, sin perder generalidad, que f es no decreciente. Entonces, para cualquier partición P, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \\ &< S_P - \underline{S}_P \\ &= \sum_P (M_k - m_k)\Delta_k x \\ &< \|P\| \sum_P (M_k - m_k). \end{aligned}$$

Supuesto que f es no decreciente, se tiene en cada subintervalo I_k que $M_k = f(x_k)$ y $m_k = f(x_{k-1})$, de modo que

$$\sum_P (M_k - m_k) = \sum_P [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

si $f(b) = f(a)$, entonces f es constante y la integrabilidad es evidente. Si

$f(b) \neq f(a)$, entonces, dado $\epsilon > 0$, escójase $\delta = \epsilon/[f(b) - f(a)]$. Si $\|P\| < \delta$, se tiene

$$0 < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon.$$

Esto se cumple para todo $\epsilon > 0$. De aquí que las dos son iguales, de donde se concluye la integrabilidad. ∎

4.3b Teorema. Si f es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces es integrable allí.

Demostración. Defínase F y G como en el Lema 4.2h; es decir,

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,dt \qquad \{a < x < b\}.$$

y $$F(a) = G(a) = 0$$

Por el Lema 4.2h, $F'(x) = G'(x)$ para toda x en I.

Entonces, por el Corolario 3.6f (un corolario del teorema del valor medio) se tiene $F(x) = G(x) + c$ en I. Pero $F(a) = G(a)$, de manera que $c = 0$. Por tanto, $F(x) = G(x)$ en I, en particular en $x = b$. Así,

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt = F(b) = G(b) = \underline{\int_a^b} f(t)\,dt.$$ ∎

Ahora haremos una pausa para dar un ejemplo de una función no integrable. Este ejemplo depende del hecho de que en todo intervalo existen tanto números racionales como números irracionales. (Ver los Ejercicios C3 y C4 de la Sección 1.6.) La función que examinaremos está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Para cualquier partición P de I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, se tiene

$$S_P = \sum_P M_k \Delta_k x = \sum_P 1 \cdot \Delta_k x = b - a,$$

de modo que $$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (b - a).$$

Y $$\underline{S}_P = \sum_P m_k \Delta_k x = \sum_P 0 \cdot \Delta_k x = 0;$$

de aquí que $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0.$$

Por tanto, las integrales superior e inferior no son iguales si $b > a$, de manera que f es no integrable.

Ahora daremos un criterio útil respecto a la integrabilidad, debido a Darboux.

4.3c Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una función f sea integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ es que para todo $\epsilon > 0$ exista una partición P para la cual

$$S_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon.$$

Demostración. Suficiencia. Si la condición ϵ se cumple, entonces

$$0 < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < S_P - \underline{S}_P < \epsilon,$$

de modo que las integrales superior e inferior son iguales.

Necesidad. Si f es integrable, escójase una P tal que

$$S_P < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon/2. \tag{1}$$

Esto es posible, supuesto que la integral es el ínfimum de las sumas superiores. En forma semejante, existe un P' tal que

$$\underline{S}_{P'} > \int_a^b f(x)\,dx - \epsilon/2. \tag{2}$$

Sea P'' el refinamiento común de P y P'. Entonces $S_{P''}$ satisface (1) y $\underline{S}_{P''}$ satisface (2), de modo que se obtiene

$$S_{P''} - \underline{S}_{P''} < \epsilon.$$ ∎

El lema siguiente prepara el terreno para otra condición necesaria y suficiente para que la integral exista.

4.3d Lema. Si f es acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon)$ para el cual

$$S_P(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon \qquad \text{y} \qquad \underline{S}_P(f) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon$$

para toda partición P para la cual $\|P\| < \delta$.

Demostración. Probaremos el primer punto. El segundo es semejante.

Sea dado $\epsilon > 0$. Por la definición de integral superior, existe una partición P' para la cual

$$S_{P'} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon/2.$$

Habiendo escogido P', contamos el número de puntos de partición que el intervalo I tiene en su interior. Supóngase que este número es n. También, sea δ_1 la menor longitud de cualquiera de los subintervalos de P'. A continuación se escoge δ menor que el menor de los dos números δ_1 y $\epsilon/6Mn$:

$$\delta < \text{mín } [\delta_1, \epsilon/6Mn],$$

donde, en esta ocasión, $M = \sup |f(x)|$.

Ahora, sea P una partición arbitrariamente escogida con $\|P\| < \delta$. Se desea demostrar que para esta P se cumple la conclusión del teorema. Sea P'' el refinamiento común de P y P'. Entonces, por el Lema 4.2,

$$S_{P''} \leqslant S_{P'} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon/2. \tag{3}$$

Debido a la forma en que se escogió δ, existe cuando más un punto de P' entre dos cualesquiera de P. Así, se separan los subintervalos de P en dos clases: (1) aquellos que contienen un punto de P' y (2) aquellos que no lo contienen.

Los intervalos de P'' se separan en la misma forma en dos clases: (1) aquellos que provinieron de un intervalo de P por su contenido de un punto de P' y (2) todos los demás, siendo idénticos a los de la clase (2) del párrafo anterior.

Así, cuando se comparan S_P y $S_{P''}$ se ve que en la diferencia $S_P - S_{P''}$ todas las contribuciones de los intervalos de la clase 2 se cancelan. Lo que queda es la contribución a cada suma de los intervalos de la clase 1. En P existen cuando más n intervalos en la clase 1, puesto que existen cuando más n puntos interiores de P'. De aquí que existen cuando más $2n$ intervalos en P'' en la clase 2. La contribución de cada uno de estos intervalos es de la forma $M_k\,\Delta_k x$ y, evidentemente $|M_k\,\Delta_k x| \leqslant M\,\delta$. Existen, tal y como se ha visto, cuando más $3n$ de éstas, en conjunto. De aquí que

$$|S_P - S_{P''}| \leqslant 3nM\,\delta < \epsilon/2.$$

Pero P'' es un refinamiento de P, de modo que

$$0 \leqslant S_P - S_{P''} = |S_P - S_{P''}| < \epsilon/2. \tag{4}$$

Por (3) y (4) se obtiene

$$S_P = S_{P''} + (S_P - S_{P''}) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon/2 + \epsilon/2$$

o bien

$$S_P < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Ahora vamos a considerar un tipo de suma ligeramente diferente, la cual no es necesariamente una suma superior o una suma inferior pero que siempre se encuentra entre ellas. Dada una partición P de un intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, se escoge un punto ξ_k en cada subintervalo I_k: $\{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\}$. La suma

$$S_P(f, \xi) = \sum_P f(\xi_k)\,\Delta_k x$$

se llamará **suma de Riemann** o **suma de aproximación.** Se desea considerar el límite de tales sumas conforme $\|P\| \to 0$. El estudiante debe comprender que este es un tipo de límite un poco más complicado que el considerado con anterioridad. La suma, en ningún sentido, es una función de $\|P\|$, porque incluso $\|P\|$ no determina a la propia P; y después que se ha escogido P entonces los ξ pueden ser libremente escogidos en los subintervalos. Sin embargo, $\|P\|$ tiene alguna influencia sobre el rango de valores posibles que tal suma puede tener. A continuación se definirá en forma precisa este tipo de límite.

Si existe un número J tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para el cual

$$|S_P(f, \xi) - J| < \epsilon$$

siempre que $\|P\| < \delta$, entonces se dice que J es el límite de estas sumas de Riemann conforme $\|P\| \to 0$ y este hecho se expresa por

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi) = J.$$

Esta definición se lee como la definición de límite de una función. Sin embargo, ha de enfatizarse que debe ser satisfecha la condición ϵ cualquiera que sea la forma en que se escojan los puntos de partición de P consistentes con $\|P\| < \delta$ y para toda selección de los ξ.

Ahora se demostrará la relación entre este límite y la integral de Riemann.

4.3e Teorema. Si f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, una condición necesaria y suficiente para que la integral de f sobre I exista y sea igual a J es que

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi) = J.$$

Demostración. Necesidad. Supóngase que la integral existe y que es igual a J. Entonces, por el Lema 4.3d, para todo $\epsilon > 0$, existe un δ tal que

$$-\epsilon + S_P < J < \underline{S}_P + \epsilon$$

siempre que $\|P\| < \delta$. Entonces, para cualquiera de tales P y cualquier selección de los ξ, se tiene

$$J - \epsilon < \underline{S}_P \leqslant S_P(f, \xi) \leqslant S_P < J + \epsilon.$$

Pero con esto se afirma que

$$|S_P(f, \xi) - J| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|P\| < \delta.$$

Suficiencia. Supóngase que el límite existe y es igual a J. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe un δ tal que si $\|P\| < \delta$

$$J - \epsilon < S_P(f, \xi) < J + \epsilon \tag{5}$$

para cualquier selección de los ξ. Entonces, en cada I_k de P se escoge ξ_k tal que

$$f(\xi_k) > M_k - \epsilon/(b - a).$$

Entonces $$S_P(f, \xi) = \sum_P f(\xi_k)\,\Delta_k x > \sum_P M_k\,\Delta_k x - \epsilon.$$

Luego, por la desigualdad superior de (5), se tiene

$$J + \epsilon > S_P(f, \xi) > \bar{S}_P - \epsilon > \int_a^b f(x)\,dx - \epsilon$$

o también $$J > \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\epsilon \qquad \text{para todo } \epsilon$$

Así $$J \geqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

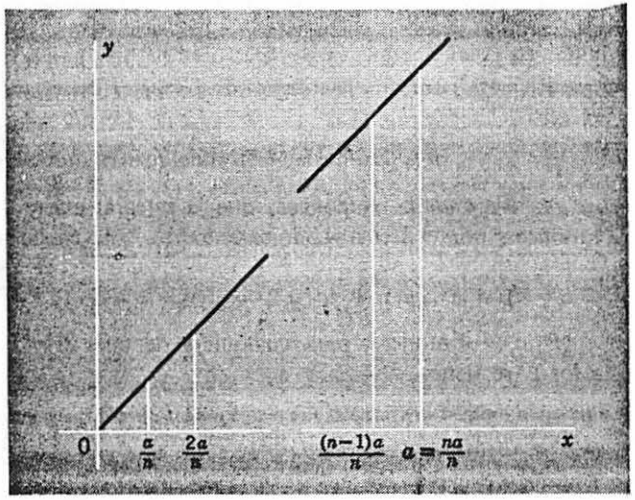
Mediante un argumento semejante se obtiene

$$J \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

de modo que $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant J \geqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Supuesto que la integral superior, por definición, no es menor que la inferior, con esto se completa la demostración. ∎

EJEMPLO. Calcular $\int_0^a x\,dx$.



Solución. El integrando es monótono y continuo. La existencia de la integral es evidente, ya sea por el Teorema 4.3a o por el 4.3b. Y puesto que, por el Teorema 4.3e, la integral es el límite de las sumas de Riemann, se toma una partición sencilla P: $\{0, a/n, 2a/n, \ldots, na/n\}$. Entonces una suma de Riemann, de hecho la suma superior, es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{ka}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{n}\right) = \frac{a^2}{n^2} \sum_1^n k = \frac{a^2}{n^2}\,\frac{n}{2}\,(n + 1).$$

Ahora bien, conforme $\|P\| \to 0$, $n \to \infty$ y $S_n \to a^2/2$. Así,

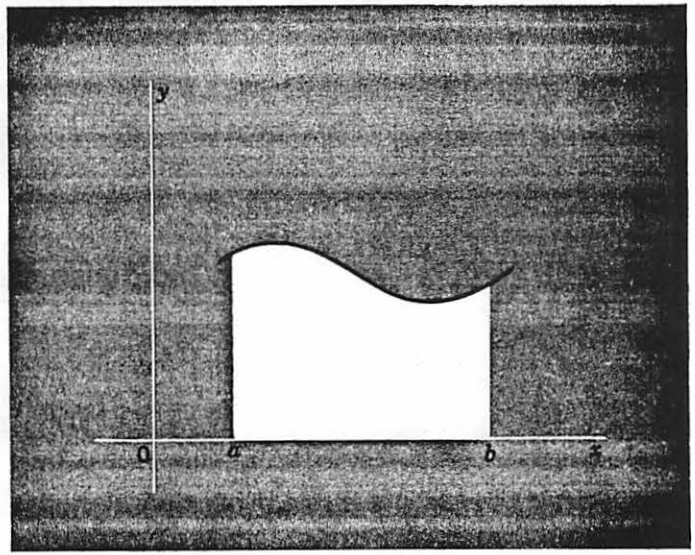
$$\int_0^a x\,dx = a^2/2.$$

Si sucediera que f es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, excepto en $x = a$, entonces, para toda c para la cual $a < c < b$, la integral $\int_c^b f(x)\,dx$ existirá. Podemos entonces inquirir acerca de la existencia de $\lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)\,dx$.

Si este límite existe se dice que define la **integral impropia** de f desde a hasta b. Se escribe esto en la misma forma que una integral propia u ordinaria. En forma semejante, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se define como

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

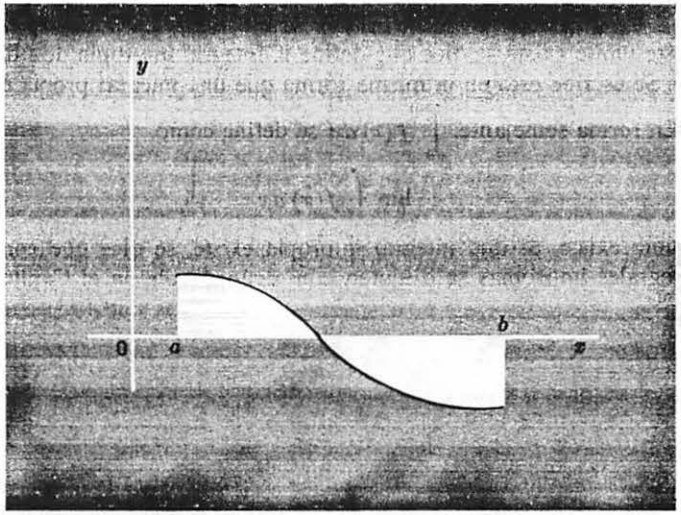
si el límite existe. Si una integral impropia existe, se dice que **converge.** Las integrales impropias se discuten con algún detalle en el Capítulo 17.



Regresaremos brevemente al tema del área. Si f es una función positiva en el intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, se define el área entre la «curva» $y = f(x)$, las ordenadas $x = a$, $x = b$ y el eje x como

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

si esta integral existe. En particular, se sabe por los Teoremas 4.3a y 4.3b que si f es continua o monótona, entonces el área existe. Generalizando, puede interpretarse esta integral $\int_a^b f(x)\,dx$ como el área «neta» entre $x = a$, $x = b$, el eje x y la «curva» $y = f(x)$; el área se toma como positiva cuando se encuentra arriba del eje x y negativa cuando se encuentra abajo.



EJERCICIOS A

1. Evaluar las siguientes integrales mediante la definición o los teoremas de esta sección:

   (a) $\int_a^b x\,dx$ (b) $\int_a^b x^2\,dx$ (c) $\int_a^b e^x\,dx$

   (d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ (*Sugerencia:* Demostrar que puede escogerse $\xi_k = \sqrt{x_k}\sqrt{x_{k-1}}$.)

2. Se dice que una función f definida en un intervalo $\{-a \leqslant x \leqslant a\}$ es **par** si $f(-x) = f(x)$ e **impar** si $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que si f es integrable, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ es par}$$

y $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar.}$$

EJERCICIOS B

1. Supóngase que f es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y $\int_a^x f(t)\,dt = x$ para toda x en I. Encontrar f. También encontrar a.
2. Evaluar $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}\,dt$.
3. Evaluar $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (*Sugerencia:* Escribirla como una suma de Riemann y expresar la respuesta como una integral.)
4. Evaluar $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$.
5. Probar el Lema 4.2e.

EJERCICIOS C

1. Supóngase que f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y es continua allí excepto para un punto c. Demostrar que f es integrable sobre I. ¿Qué sucede si f tiene un número finito de tales discontinuidades?
2. Sea f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 16 & x = 0. \end{cases}$$

   ¿Es integrable f sobre $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$?
3. Una función f definida en un intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ recibe el nombre de **función escalonada** si existe una partición P de I para la cual f es constante en cada subintervalo de P. Demostrar que cualquier función escalonada es integrable y que, en particular, las sumas superiores y las sumas inferiores son integrales de funciones escalonadas.
4. Supóngase que f está acotada en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y es integrable sobre $\{c \leqslant x \leqslant b\}$ para toda c entre a y b. Demostrar que es integrable sobre I.

4.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

No hemos definido la integral definida cuando el límite superior de integración es menor que o igual al límite inferior. De acuerdo con ello, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

A continuación se establecerán ciertas propiedades de las integrales y las funciones integrables.

4.4a Teorema. Si f es integrable sobre $\{ a \leqslant x \leqslant b \}$, entonces es integrable sobre $\{ c \leqslant x \leqslant d \}$ donde $\{ a \leqslant c < d \leqslant b \}$. Es decir, f es integrable sobre todo subintervalo.

Demostración:

$$0 < \overline{\int_c^d} f(x)\,dx - \underline{\int_c^d} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

La última igualdad debida a la definición de integrabilidad sobre $\{ a \leqslant x \leqslant b \}$. Explique la segunda desigualdad (ver Ejercicio B1). De aquí que las integrales superior e inferior sobre $\{ c \leqslant x \leqslant d \}$ son iguales. ∎

4.4b Teorema. Si f es integrable sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y c es un punto intermedio, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demostración. La demostración de este teorema se deduce inmediatamente del Lema 4.2g. ∎

En efecto, esta relación es válida sin importar en qué orden se encuentran los tres puntos a, b, c. ¿Por qué?

4.4c Teorema. Si f es integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y c es una constante, entonces cf es integrable allí y

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

4.4d Teorema. Si f y g son integrables sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si $f(x) \geqslant g(x)$ allí, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.4e Teorema. Si f y g son integrables sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, también lo es $f \pm g$ y

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Como las demostraciones de los tres teoremas anteriores son muy sencillas, se dejan como ejercicios (Ejercicio B2). En lugar de aplicar sumas superiores e inferiores, aplicar sumas de Riemann para aproximar las integrales.

Antes de abordar el siguiente teorema es conveniente establecer algunas

notaciones. Dada una función f, definimos las correspondientes funciones f^+ y f^- por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

y

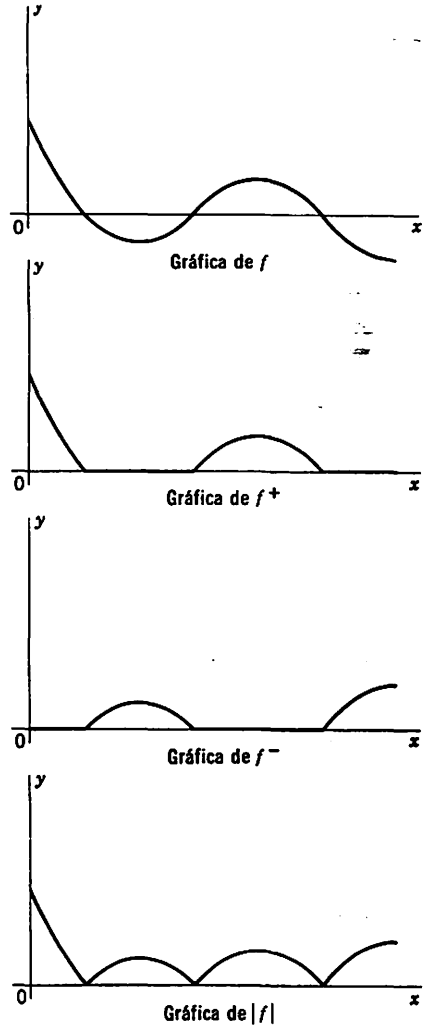
$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) < 0. \end{cases}$$

Entonces, evidentemente, se tiene

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

y

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$



4.4f Teorema. Si f es integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, también lo son f^+ y f^-.

Demostración. Se dará la demostración para f^+, la de f^- es semejante.

Sea P una partición de $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Entonces, en cada subintervalo I_k estableceremos

$$M_k = \sup_{I_k} f(x) \qquad M_k^+ = \sup_{I_k} f^+(x)$$
$$m_k = \inf_{I_k} f(x) \qquad m_k^+ = \inf_{I_k} f^+(x).$$

Para ver que $M_k - m_k \geqslant M_k^+ - m_k^+$ distinguiremos tres casos:

(1) $M_k > 0$, $m_k > 0$. Entonces $M_k = M_k^+$, $m_k = m_k^+$, de modo que

$$M_k - m_k = M_k^+ - m_k^+.$$

(2) $M_k > 0$, $m_k < 0$. Entonces $M_k^+ = M_k$, $m_k < m_k^+$, de modo que

$$M_k - m_k > M_k^+ - m_k^+.$$

(3) $M_k < 0$, $m_k < 0$. Entonces $M_k^+ = m_k^+ = 0$, de modo que

$$M_k - m_k > M_k^+ - m_k^+ = 0.$$

Así se tiene

$$M_k - m_k > M_k^+ - m_k^+.$$

Si se multiplica por $\Delta_k x$ y se suma sobre P, se tiene para toda partición P

$$S_P(f) - \underline{S}_P(f) > S_P(f^+) - \underline{S}_P(f^+).$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, por el Teorema 4.3c, existe una partición P para la cual el miembro izquierdo de esta desigualdad es $< \epsilon$. Entonces, puesto que el miembro derecho es $< \epsilon$, se tiene, con base una vez más en el Teorema 4.3c, que f^+ es integrable. ∎

4.4g Teorema. Si f es integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces también lo es $|f|$ y

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| < \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demostración. Es evidente que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, de modo que, por el Teorema 4.4e, $|f|$ es integrable y

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx.$$

Puesto que $\int_a^b f^-(x)\,dx > 0$ (¿cómo se sabe esto?), se sustrae dos veces este valor de la fórmula anterior para obtener

$$\int_a^b |f(x)|\,dx > \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En forma semejante, sustrayendo $2\int_a^b f^+(x)\,dx$, se obtiene

$$\int_a^b |f(x)|\,dx > -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Estas dos últimas desigualdades establecen el teorema. ∎

4.4h Teorema. Si f y g son integrables sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, también lo es su producto $f \cdot g$.

Demostración. Supóngase primero que tanto f como g son positivas. Sea P cualquier partición de I. Entonces, en cada subintervalo I_k, se define

$$M_{fg} = \sup_{I_k} f(x)g(x) \qquad M_f = \sup_{I_k} f(x) \qquad M_g = \sup_{I_k} g(x)$$
$$m_{fg} = \inf_{I_k} f(x)g(x) \qquad m_f = \inf_{I_k} f(x) \qquad m_g = \inf_{I_k} g(x),$$

y sea $B_f = \sup_I f(x)$, $B_g = \sup_I g(x)$. Entonces en I_k, $M_{fg} < M_f M_g$ y $m_{fg} > m_f m_g$. Así,

$$\begin{aligned} M_{fg} - m_{fg} &< M_f M_g - m_f m_g \\ &= M_f M_g - M_f m_g + M_f m_g - m_f m_g \\ &= M_f[M_g - m_g] + m_g[M_f - m_f] \\ &< B_f[M_g - m_g] + B_g[M_f - m_f]. \end{aligned}$$

Si se multiplica por $\Delta_k x$ y se suma, se obtiene

$$S_P(fg) - \underline{S}_P(fg) < B_f[S_P(g) - \underline{S}_P(g)] + B_g[S_P(f) - \underline{S}_P(f)].$$

A partir de esta desigualdad se deduce la integrabilidad de fg, puesto que el segundo miembro puede hacerse menor que cualquier ϵ dado, por la integrabilidad de f y g, separadamente.

Entonces, dadas f y g no necesariamente positivas, puede escribirse

$$fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-.$$

Por la primera parte de este teorema, cada producto de la derecha es integrable, y también lo es el segundo miembro en conjunto, con base en el Teorema 4.4e. ∎

4.5 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Supóngase que f es integrable en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Como una inme-

diata consecuencia del Lema 4.2h se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en todo punto x en I en el cual f es continua. En particular, si f es continua en I, entonces esta ecuación se cumple en todos los puntos de I. Una función F con la propiedad de que $F'(x) = f(x)$ en todo punto x de I se llama **primitiva** de f o **integral indefinida** de f. Así, para una función continua f, se ve que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de f. Inmediatamente nos vemos forzados a preguntar si existen otras primitivas. La respuesta es que sí, porque, para cualquier constante c, $F + c$ también es una primitiva. Pero, por el Corolario 3.6f, esto debe dar todas las primitivas, porque si se tienen dos funciones tales, digamos F y G, entonces $F'(x) = G'(x) = f(x)$ en I y, por el Corolario 3.6f, difieren en una constante. Este es esencialmente el **teorema fundamental del cálculo** que a continuación estableceremos en forma más precisa.

4.5a Teorema. Si f es continua en I, y G es una primitiva (integral indefinida) de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Demostración. Sea F dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, como se vio en el último párrafo, $F(x) = G(x) + c$. Podemos determinar c supuesto que $F(a) = 0$, se obtiene $c = -G(a)$, de manera que

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

En particular, $$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$ ∎

usando la notación común

$$G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a),$$

el teorema fundamental del cálculo puede establecerse como

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b.$$

Con base en este teorema, es natural preguntar si al integrar todas las derivadas se regresa a las funciones de las cuales fueron derivadas. La respuesta es no, porque una derivada no es necesariamente una función integrable. Por ejemplo, sea f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entonces f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Así, f' no está acotada en vecindad alguna del origen y de aquí que no sea integrable en cualquier intervalo que contenga al origen.

Sin embargo, si f' es integrable, entonces al integrar debe regresar a f. Esto se ve como una consecuencia del siguiente teorema.

4.5b Teorema. Si f es derivable en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si f' es integrable entonces

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Demostración. Para cualquier partición P de I, se tiene

$$f(b) - f(a) = \sum_P [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \sum_P f'(\xi_k)\Delta_k x.$$

La última igualdad proviene de aplicar el teorema del valor medio a cada subintervalo. Ahora, si hacemos $M_k' = \sup_{I_k} f'(x)$ y $m_k' = \inf_{I_k} f'(x)$, entonces

$$\underline{S}_P(f') = \sum_P m_k' \Delta_k x < f(b) - f(a) < \sum_P M_k' \Delta_k x = \bar{S}_P(f).$$

Y esta desigualdad debe cumplirse para toda P. Entonces tomando el ínfimum de las sumas superiores y el suprémum de las sumas inferiores, se obtiene

$$\underline{\int_a^b} f'(x)\,dx < f(b) - f(a) < \overline{\int_a^b} f'(x)\,dx.$$

Este resultado más general se cumple si f' es simplemente acotada. Si f' es integrable, los dos miembros de esta desigualdad son iguales. ∎

Hemos visto en nuestro estudio de las funciones compuestas que

$$\{g[v(x)]\}' = g'[v(x)]v'(x). \tag{1}$$

Esta fórmula sirve como base de la integración por sustitución.

4.5c Teorema. Sea f continua en $\{a \leqslant y \leqslant b\}$, sea v una función con una derivada continua v' en $\{c \leqslant x \leqslant d\}$, y sea $v(c) = a$ y $v(d) = b$. Entonces, si $a \leqslant v \leqslant b$, se tiene

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_c^d f[v(x)]v'(x)\,dx.$$

Demostración. Sea $g(y) = \int_a^y f(t)\,dt$. Entonces, por (1) anterior, $g[v(x)]$ es una primitiva de

$$g'[v(x)]v'(x) = f[v(x)]v'(x).$$

Entonces, por el teorema fundamental,

$$\begin{aligned}\int_c^d f[v(x)]v'(x)\,dx &= g[v(x)]\Big|_c^d \\ &= g[v(d)] - g[v(c)] \\ &= g(b) - g(a) \\ &= \int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$

∎

4.6 PROPIEDADES ADICIONALES DE LAS INTEGRALES

Se tiene la conocida fórmula

$$(fg)' = fg' + f'g, \tag{1}$$

para la derivación de un producto de funciones derivables. Integrando esta fórmula se obtiene la fórmula para la integración por partes.

4.6a Teorema. Si f y g son derivables en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si f' y g' son integrables allí, entonces

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Demostración. Es evidente que $(fg)'$ es integrable, puesto que, por la ecuación (1) es una suma de productos de funciones integrables. Por el Teorema 4.5b,

$$\int_a^b [f(x)\,g(x)]'\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b,$$

y desarrollando el integrando según (1) obtenemos el resultado deseado. ∎

La técnica de la integración por partes puede usarse para encontrar

primitivas o integrales indefinidas. Este tema se cubre ampliamente en cálculo elemental y no es necesario insistir sobre él, aunque en los ejercicios pueden encontrarse algunos problemas relacionados con este tema.

Ahora seguiremos con las demostraciones de ciertos teoremas del valor medio para integrales. Si f es integrable sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, como consecuencia del Lema 4.2e se tiene

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M, \tag{2}$$

donde m y M son cotas superior e inferior para f. La cantidad

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

recibe el nombre de **media** o **promedio** de f sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. De aquí que la desigualdad (2) nos dice que el promedio o media de f se encuentra entre sus valores mayor y menor. Este en sí mismo es un tipo de teorema del valor medio. A continuación daremos algunos más. El siguiente se conoce como **primer teorema del valor medio** para las integrales.

4.6b Teorema. Si f es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces existe un ξ en $\{a < x < b\}$ para el cual

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Demostración. Hacer $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, y aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial (Teorema 3.6e). ∎

Si $g(x) \geqslant 0$, la razón

$$\mu = \left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)\Big/\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

se llama **media pesada** de f respecto a la **función peso** g. También existe un teorema del valor medio para las medias pesadas:

4.6c Teorema. Si f es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si g es integrable allí con $g(x) \geqslant 0$ y con $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, entonces para μ tal y como se definió anteriormente, existe un ξ en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para el cual

$$\mu = f(\xi).$$

Demostración. Es evidente que fg es integrable, por el Teorema 4.4h, y si m y M tienen sus significados usuales,

$$mg(x) < f(x)\,g(x) < Mg(x),$$

entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dividiendo entre $\int_a^b g(x)\,dx$, se obtiene

$$m < \mu < M.$$

Por el teorema del valor intermedio para las funciones continuas (3.3a), existe un ξ en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para el cual $\mu = f(\xi)$. ∎

El siguiente teorema se conoce como **segundo teorema del valor medio** o **teorema de Bonnet.**

4.6d Teorema. Supóngase que f es monótona y f' integrable, y que g es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Entonces existe un ξ en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para el cual

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Sea $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Entonces.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx \\ &= f(x)\,G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)\,dx \\ &= f(b)\,G(b) - \int_a^b G(x)f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ahora aplicaremos el teorema del valor medio para medias pesadas a la última integral:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &= f(b)\,G(b) - G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx \\ &= f(b)\,G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] \\ &= f(a)\,G(\xi) + f(b)[G(b) - G(\xi)] \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$ ∎

En realidad, esta conclusión es válida simplemente suponiendo que f es monótona y g es integrable. Sin embargo, como el estudiante podría esperar, la demostración es más difícil bajo estas condiciones.

EJERCICIOS A

1. Integrar —esto es, encontrar las primitivas— en los siguientes ejercicios:

(a) $\int \log^n x\,dx$ (b) $\int (x^2-1)\cos x\,dx$ (c) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

(d) $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ (e) $\int x\cos^2 x\,dx$ (f) $\int \sec^3 x\,dx$

(g) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x-1}\,dx$ (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (i) $\int \sqrt{9+x^2}\,dx$

(j) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (k) $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x-3}\,dx$ (l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

2. Demostrar que si f es monótona en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, $\int_a^b f(x)\,dx$ está entre $f(a)(b-a)$ y $f(b)(b-a)$.

3. Demostrar que $0 < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n+1} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

4. ¿Qué está equivocado en $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^1 = -2$?

5. Calcular $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt$ si f es continua.

6. Dar una fórmula para $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ si f es continua y u y v son derivables.

EJERCICIOS B

1. Explicar la desigualdad en el Teorema 4.4a.
2. Probar los Teoremas 4.4c, 4.4d y 4.4e.
3. ¿Cuál es el significado geométrico de la fórmula

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)?$$

4. Si f es integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, demostrar que $\int_a^x f(t)\,dt$ es continua en I.

5. Demostrar que si f tiene una derivada continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces puede representarse como la diferencia de dos funciones no decrecientes.

6. Demostrar que existe una constante K para la cual $\sum_{k=1}^n k^{1/4} < Kn^{5/4}$.

7. ¿Cuál es el error en la siguiente "demostración" de 4.4g? Para cualquier partición P:

$$|S_P(f,\xi)| = \left|\sum_P f(\xi_k)\,\Delta_k x\right| < \sum_P |f(\xi_k)|\,\Delta_k x = S_P(|f|,\xi).$$

Haciendo que $\|P\| \to 0$ se obtiene la conclusión del teorema.

8. Demostrar que si f es continua y no negativa en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si existe un x_0 en I para el cual $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

9. Aunque la función del ejemplo de la Sección 4.5 tiene una derivada la cual no es integrable en toda vecindad del origen, demostrar que para cualquier $b > 0$

$$\lim_{a \to 0+} \int_a^b f'(x)\,dx = f(b).$$

EJERCICIOS C

1. Demostrar que si f es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y $\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = 0$ para toda ϕ integrable, entonces $f(x) = 0$.
2. Demostrar que si f es integrable y no negativa en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces $\sqrt{f}$ es integrable.
3. Demostrar que si f es integrable sobre I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y existe una constante $c > 0$ para la cual $f(x) \geqslant c$, entonces $1/f$ es integrable sobre I.

5

Las funciones trascendentales elementales

5.1 EL LOGARITMO

Quizá la clase de funciones más sencilla es la de los **polinomios** —esto es, aquellas funciones que pueden representarse por

$$P(x) = \sum_0^n a_k x^k.$$

A continuación, en el orden de la complejidad creciente, podrían colocarse las **funciones racionales,** aquéllas que se expresan como razones de polinomios. Una clase de funciones todavía más complicada es la de las funciones algebraicas. Una función dada por $y = f(x)$ es una **función algebraica** si satisface una ecuación de la forma

$$P_n y^n + P_{n-1} y^{n-1} + \cdots + P_1 y + P_0 = 0,$$

donde las P son polinomios en x.

Aquí se desea estudiar unas funciones familiares que no pertenecen a estas clases sino a una clase diferente llamada de las **funciones trascendentales.** No se definirá esta clase aquí, ya que esta definición puede expresarse mejor en términos de la teoría de las funciones analíticas complejas.

Empezaremos con el **logaritmo,** el cual se define por

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad x > 0.$$

Supondremos, sin comentario adicional, que todos los argumentos de esta función son positivos.

5.1a Teorema. $\log 1 = 0$.

Demostración. La demostración de este teorema es evidente.

5.1b Teorema. $\log 1/a = -\log a$.

Demostración. En la integral que define la función se hace la sustitución $t = 1/s$ y se aplica el Teorema 4.5c:

$$\log 1/a = \int_1^{1/a} \frac{dt}{t} = -\int_1^a \frac{ds}{s} = -\log a. \qquad \blacksquare$$

5.1c Teorema. $\log ab = \log a + \log b$.

Demostración. En la integral que define $\log ab$ se hace la sustitución $t = as$

$$\log ab = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_{1/a}^{b} \frac{ds}{s} = \int_{1/a}^{1} \frac{ds}{s} + \int_1^b \frac{ds}{s}$$

$$= -\int_1^{1/a} \frac{ds}{s} + \int_1^b \frac{ds}{s} = -\log 1/a + \log b = \log a + \log b. \qquad \blacksquare$$

5.1d Teorema. $\log a/b = \log a - \log b$.

Demostración. Este teorema se demuestra mediante los Teoremas 5.1c y 5.1b. $\blacksquare$

5.1e Teorema. Para todo número racional r, $\log a^r = r \log a$.

Demostración. En la integral que define $\log a^r$ se hace la sustitución $t = s^r$.

$$\log a^r = \int_1^{a^r} \frac{dt}{t} = r \int_1^a \frac{ds}{s} = r \log a. \qquad \blacksquare$$

Aquí se hace la restricción de que r sea racional porque se ha definido a^r solamente para un r racional (Sección 3.4). Una de las metas de este capítulo es definir a^x para un número real arbitrario x.

5.1f Teorema. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log (1 + x) = 1$.

Demostración. A partir de la definición de $\log (1 + x)$, se tiene

$$\frac{x}{1+x} < \log (1 + x) < x.$$

Entonces se obtiene

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{x} \log (1 + x) < 1$$

o bien

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{x} \log (1 + x) > 1,$$

de acuerdo a que x sea positiva o negativa. El resultado es evidente con base en estas dos últimas desigualdades. $\blacksquare$

5.1g Teorema. $\log e = 1$

Demostración. $\log e = \log \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

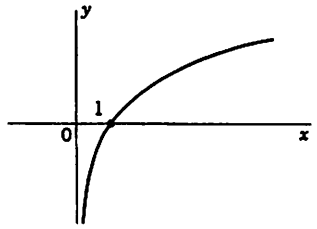
Esta última igualdad es verdadera puesto que $\log x$ es una función continua, lo cual a su vez es verdadero puesto que una integral es una función continua de su límite superior. Entonces, por los Teoremas 5.1 y 5.1f.

$$\log e = \lim n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\log (1 + 1/n)}{1/n} = 1. \qquad \blacksquare$$

5.1h Teorema. $\log x$ es estrictamente creciente.

Demostración. Por el Lema 4.2h se obtiene

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{para } x > 0. \qquad \blacksquare$$



La gráfica de $\log x$

5.1i Teorema. $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$,
$\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$.

Demostración. Ya que $\log x$ es creciente, es suficiente el encontrar una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to +\infty$, para la cual $\log x_n \to +\infty$. Se escoge $x_n = e^n$, la cual tiene esta propiedad (ver Ejercicio B1). Ahora bien,

$$\log e^n = n \log e = n \to +\infty,$$

lo cual prueba que $\log x \to +\infty$ conforme $x \to +\infty$. Si $x \to 0+$, $1/x \to +\infty$, de modo que

$$\log x = -\log 1/x \to -\infty. \qquad \blacksquare$$

5.2 LA FUNCION EXPONENCIAL

Una vez establecidas las propiedades más importantes del logaritmo, procederemos a discutir la **función exponencial.** Esta función se denotará por $\exp x$ hasta que pueda justificarse el decir que

$$\exp x = e^x.$$

Hemos visto que $\log x$ tiene como su dominio de definición el intervalo semi-infinito $\{0 < x < \infty\}$, que es continua y estrictamente creciente, y que su rango es $\{-\infty < x < \infty\}$. Por lo tanto, tiene una función inversa continua única cuyo dominio es $\{-\infty < x < \infty\}$ y cuyo rango es $\{0 < x < \infty\}$. Los valores de esta función inversa se denotan por $\exp x$.

Procederemos a obtener las propiedades más importantes de esta función.

5.2a Teorema. $\exp x > 0$ para toda x.

Demostración. Una demostración de este teorema simplemente reitera que el rango de la función exponencial es $\{0 < x < \infty\}$. ∎

5.2b Teorema. $\exp 0 = 1$.

Demostración. $\log 1 = 0$. ∎

5.2c Teorema. $\exp r = e^r$ para todo racional r.

Demostración. $\log e^r = r \log e = r$. ∎

Una vez más nos restringimos al racional r, porque no se ha definido e^x para x irracional.

5.2d Teorema. $d/dx \exp x = \exp x$.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 3.6h, acerca de la derivación de funciones inversas, si $y = \exp x$, entonces

$$\frac{d}{dx}(\exp x) = \frac{1}{(d/dy)\log y} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x. \quad ∎$$

5.2e Teorema. $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$.

Demostración. Hágase $a = \exp x$, $b = \exp y$. Entonces $x = \log a$, $y = \log b$, y

$$\log ab = \log a + \log b = x + y.$$

Tomando exponenciales de ambos miembros se obtiene

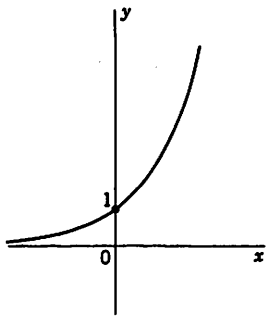
$$ab = \exp(x + y). \quad ∎$$

5.2f Teorema. $\exp(x - y) = (\exp x)/(\exp y)$.

Demostración. La demostración de este teorema es semejante a la del Teorema 5.2e.

Ahora es evidente que la función $\exp x$ es una función continua que coincide con e^r siempre que x sea racional, es decir, siempre que e^x tenga un significado. Puesto que la función es continua, se interpola entre los valores de e^x los cuales están definidos para x racional. Gráficamente esto significa que si se sitúan en un sistema coordenado los puntos $y = e^r$ para x racional, entonces la curva $y = \exp x$ es una curva suave que pasa por todos estos puntos. De acuerdo con esto, se define e^r para x irracional como $\exp x$:

$$e^r = \exp x \quad \{-\infty < x < \infty\}.$$



La gráfica de exp x

En forma más general, a^r, para $a > 0$, se define solamente para x racional. Además, para tal x racional se tiene

$$\log a^r = x \log a,$$

y tomando exponenciales de ambos miembros se obtiene

$$a^r = \exp x \log a = e^{x \log a}.$$

Pero esta última función es una función continua para todos los valores de x. De aquí que $e^{x \log a}$ se interpola entre los valores previamente definidos de a^r. De acuerdo con esto se define a^x para toda x por la fórmula

$$a^x = e^{x \log a} \quad \{-\infty < x < \infty\},$$

bajo la condición de que $a > 0$.

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de la función exponencial. Ya que se han establecido las propiedades necesarias de la exponencial, el estudio usual de las funciones hiperbólicas puede considerarse como implicado y no es necesario que se repita aquí.

EJERCICIOS A

1. Explicar por qué $e^{\log x} = x$ para $x > 0$ y $\log e^x = x$ para toda x.
2. Demostrar que:
   (*a*) $a^x > 0$ (*b*) $a^0 = 1$ (*c*) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
   (*d*) $(a^x)/(a^y) = a^{x-y}$ (*e*) $(a^x)^y = a^{xy}$
3. Demostrar que $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \log a$.
4. Demostrar que $\dfrac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$ si $x > 0$ para toda a.
5. Demostrar que $\log a^x = x \log a$ si $a > 0$ para toda x.
6. Demostrar que $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
7. Demostrar que $\lim_{x \to 0} a^x = 1$.
8. Si $f(x) > 0$ y tanto f como g son derivables, deducir la fórmula
$$\frac{d}{dx}\{[f(x)]^{g(x)}\} = [f(x)]^{g(x)} g'(x) \log f(x) + g(x)[f(x)]^{g(x)-1} f'(x).$$
9. Sea $P(x, y)$ un punto sobre la curva $y = \log x$. ¿Cuál es la distancia de P al eje y? Expresar la respuesta en términos de y.
10. Demostrar que $\log x \leqslant x - 1$. ¿Cuándo se cumple la igualdad?
11. Demostrar que $e^x \geqslant 1 + x$. ¿Cuándo se cumple la igualdad?

EJERCICIOS B

1. Demostrar que $e^n > n$, y de aquí completar la demostración del Teorema 5.1i. (*Sugerencia:* Escribir $e = 1 + h$ donde $h > 1$.)

2. Evaluar los siguientes límites. En algunos casos será útil reconocer los cocientes diferencia de la forma del Ejercicio A6 u otras formas relacionadas:

(*a*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ (*b*) $\lim_{x\to 2} (e^x - e^2)\cot(x - 2)$

(*c*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\log(1 + x^3)}$ (*d*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\log(1 + x)}$

(*e*) $\lim_{x\to 0} \sqrt[4]{\dfrac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}}$ (*f*) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}$

(*g*) $\lim_{x\to\infty} (a + bc^x)^{1/x}$ $a > 0, b > 0, c \geqslant 1.$

(*h*) $\lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{a^x + b^x}{2}\right]^{1/x}$ $a \geqslant b > 0.$

(*i*) Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$. (*Sugerencia:* Considérese la derivada de $\log x$ en $x = 1$.)

(*j*) Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.

EJERCICIOS C

1. Evaluar los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ (*b*) $\lim_{x\to 0} x^{1/x}$

(*c*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $a > 0, b > 0.$

(*d*) $\lim_{x\to 0} [f(x)]^{1/x}$ $f(0) = 1, f'(0) = a.$

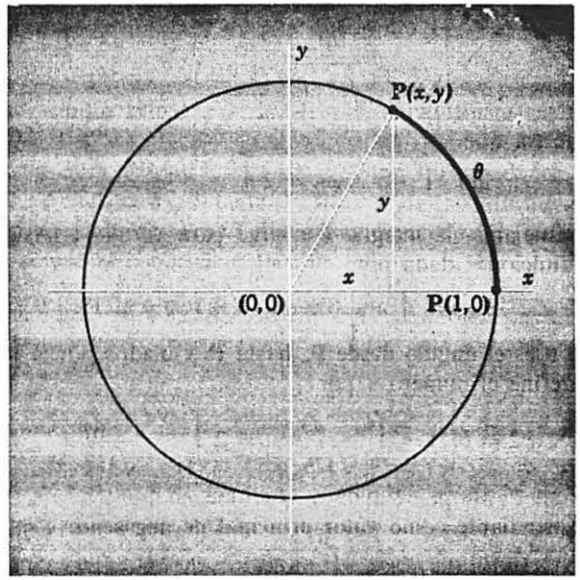
2. Sea L una función definida para toda $x > 0$ para la cual $L(xy) = L(x) + L(y)$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{L(1 + x)}{x} = 1$. Demostrar que $L(x) = \log x$ para toda $x > 0$.

5.3 LAS FUNCIONES CIRCULARES

En esta sección no se sigue la secuencia usual teorema-demostración ya que parece preferible otro tipo de presentación.

Las funciones circulares —es decir, las funciones trigonométricas ordinarias— por costumbre se definen en cursos elementales exclusivamente

en términos geométricos, lo cual no es completamente satisfactorio. Por lo tanto, aquí se planea colocar estas funciones sobre una base aritmética más firme. Buscaremos un fuerte apoyo en la geometría, siguiendo esencialmente el desarrollo trigonométrico, para nuestra inspiración, pero pondremos cuidado en no recurrir a la geometría en las demostraciones. La única excepción será al probar las fórmulas de adición y aun en este caso, en los ejercicios se sugerirán demostraciones no geométricas.



Empezaremos por considerar el círculo indicado por $x^2 + y^2 = 1$. En principio, nos referiremos únicamente al semicírculo de la derecha dado por

$$x = +\sqrt{1 - \alpha^2}, \qquad y = \alpha, \qquad \{-1 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

Si $\mathbf{P}(x, y)$ es un punto sobre este semicírculo de la derecha, se desea discutir acerca de la longitud de arco a lo largo de la circunferencia desde $\mathbf{P}_0(1,0)$ hasta $\mathbf{P}$ Con este objeto se aplicará la fórmula para la longitud de arco aprendida en el cálculo elemental, a saber,

$$\int_0^v \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = \int_0^v \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

(En el Capítulo 8 se discutirá la longitud de arco y se establecerá esta fórmula.)

Esta fórmula define la longitud de arco en el intervalo abierto $\{-1 < y < 1\}$, considerada positiva para y positiva, como en la figura, y negativa para y negativa. Como el integrando se vuelve no acotado en ± 1, la integral se vuelve impropia; pero todavía es convergente en ambos puntos. Para probarlo razonamos de la siguiente manera:

Para y cerca de 1, puede escribirse

$$\int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

donde se hace la sustitución $\beta = +\sqrt{1-\alpha^2}$ en la última integral. Esta fórmula muestra que

$$\lim_{y \to 1-0} \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

En forma semejante, la integral converge para $y = -1$. Así, la integral define una función θ dada por

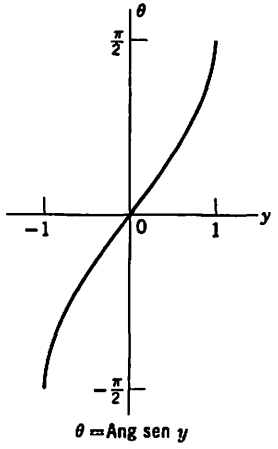
$$\theta(y) = \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad \{-1 < y < 1\}.$$

Se dirá que θ es **el ángulo desde P_0 hasta P.** Guiados por la imagen geométrica se define el número π por

$$\pi/2 = \theta(1) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

La función θ, ahora definida y continua en $\{-1 \leqslant y \leqslant 1\}$ es conocida por el estudiante como **valor principal de ang seno:**

$$\text{Ang sen } y = \theta(y) = \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad \{-1 < y < 1\}.$$



θ = Ang sen y

A continuación no haremos uso de las propiedades previamente conocidas de esta función, pero usaremos las propiedades que puedan deducirse a partir de la integral que define las funciones trigonométricas.

Primero, es evidente que θ es una función impar

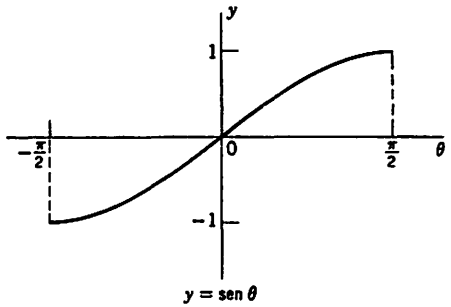
$$\theta(-y) = -\theta(y).$$

Además, se observa que θ es estrictamente creciente en $\{-1 < y < 1\}$, puesto que

$$\theta'(y) = 1/\sqrt{1-y^2} > 0.$$

Entonces, por el Ejercicio B10 de la Sección 3.4, también es estrictamente creciente en $\{-1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Por lo tanto, por el Teorema 3.4a, θ tiene una función inversa estrictamente creciente y continua definida en $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$, la cual se incrementa de -1 a $+1$ conforme θ se incrementa desde $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$. Esta función inversa se define como el **seno** de θ y se usa la conocida notación.

$$y = \text{sen } \theta \qquad \{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}.$$



$y = \text{sen } \theta$

Se define el **coseno** de θ por la fórmula

$$x = \cos\theta = +\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}, \qquad \{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}.$$

Ahora bien, ya que θ es derivable en el intervalo abierto $\{-1 < y < 1\}$, sen θ también debe ser derivable en $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Calculemos la derivada allí:

$$\frac{d}{d\theta}\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\frac{d}{dy}\theta(y)} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$= \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta} = \cos\theta \qquad \{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}.$$

A partir de esta expresión podemos obtener $\frac{d}{d\theta}\cos\theta$. Primero observemos que

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta,$$

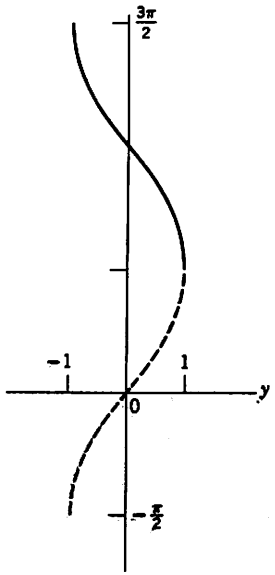
de donde $$2\cos\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta.$$

Por tanto, $\cos\theta > 0$ en $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. (¿Por qué?)

Así $$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta.$$

Ahora abordaremos el problema de extender el dominio de definición de sen θ y cos θ. Con este fin, considérese la función

$$\theta_1(y) = \pi - \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad \{-1 < y < 1\}.$$



Gráfica de θ_1 (línea sólida)

Geométricamente, esta expresión es nuevamente la longitud de arco a lo largo de nuestra circunferencia C desde $P_0(1,0)$ girando en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta un punto $P(x, y)$ sobre el semicírculo de la izquierda ($x \leqslant 0$) de C.

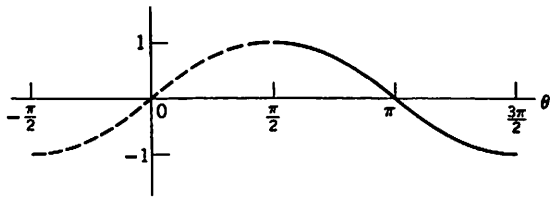
Es evidente que θ_1 es estrictamente decreciente en $\{-1 \leqslant y \leqslant 1\}$ y, por supuesto, es continua allí. Decrece desde $3\pi/2$ en -1 hasta $\pi/2$ en

$+1$. De aquí que tiene una función inversa estrictamente decreciente en $\{\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$. Decrece desde 1 en $\pi/2$ hasta -1 en $3\pi/2$. Esta función inversa se define como el sen θ en el intervalo apropiado:

$$y = \operatorname{sen}\theta \qquad \{\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}.$$

Nótese que las dos definiciones de sen θ en $\pi/2$ son compatibles. De aquí se tiene sen θ unívocamente definido como una función continua en $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$. Se define cos θ en el intervalo extendido, por

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\ \{\pi/2 < \theta < 3\pi/2.\}$$



Esta expresión ahora nos da cos θ como una función continua en $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$.

Una vez más calculemos la derivada de sen θ, en esta ocasión en el intervalo abierto $\{+\pi/2 < \theta < 3\pi/2\}$. En este caso se tiene

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\theta_1'(y)} = \frac{1}{-1/\sqrt{1-y^2}} = -\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta,$$

y otra vez $$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta.$$

Así, $$2\cos\theta\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

o bien $$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta \qquad \{\pi/2 < \theta < 3\pi/2\}.$$

Hagamos notar que

(1) $$\begin{cases}\operatorname{sen}(-\pi/2) = \operatorname{sen}(+3\pi/2) = -1\\ \cos(-\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0.\end{cases}$$

Se definen sen θ y cos θ para valores de θ fuera del intervalo $\{\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$ por periodicidad con período 2π:

$$\operatorname{sen}(2\pi+\theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta.$$

En vista de las relaciones (1) anteriores, estas ecuaciones sirven para definir sen θ y cos θ para todos los valores de θ y conservar las fórmulas

de las derivadas, las cuales ahora se cumplen excepto en múltiplos impares de $\pi/2$. A continuación se desea examinar la posibilidad de derivar el seno y el coseno en estos puntos.

Calculemos las derivadas solamente en uno de tales puntos, a saber $\pi/2$, porque la situación es semejante en $-\pi/2$ y, por periodicidad, estos son los únicos dos puntos que es necesario considerar. Por simplicidad, calculemos en $\pi/2$ solamente la derivada desde la izquierda. Los cálculos para la derivada desde la derecha son casi idénticos.

En $\pi/2$, sen $\theta = 1$; y para $\theta < \pi/2$, se tiene sen $\theta < 1$. De aquí que podemos escribir

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - h) = 1 - k,$$

donde k es pequeño y positivo cuando h es pequeño y positivo. Entonces

$$\frac{\Delta \operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 - h) - \operatorname{sen}\pi/2}{(\pi/2 - h) - \pi/2} = \frac{(1-k)-1}{\displaystyle\int_0^{1-k} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}$$

$$= \frac{k}{\displaystyle\int_{1-k}^{1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}} = \frac{k}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{2k-k^2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}},$$

la última igualdad proviene de la sustitución $\beta = +\sqrt{1-\alpha^2}$. Así,

$$\frac{k}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{2k-k^2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-(2k-k^2)}}} < \frac{\Delta \operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} < \frac{k}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{2k-k^2}} \frac{d\beta}{1}}$$

o bien

$$\frac{k(1-k)}{\sqrt{2k-k^2}} < \frac{\Delta \operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} < \frac{k}{\sqrt{2k-k^2}}.$$

Ahora, conforme $\Delta\theta = h$ tiende a cero, también k tiende a cero. Y, conforme $k \to 0$ ambos miembros de la desigualdad previa tienden a cero. Así se obtiene

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\Big|_{\pi/2} = 0 = \cos\pi/2.$$

Ahora examinemos el cociente diferencia de cos θ en $\pi/2$. Una vez más calculemos solamente la derivada desde la izquierda:

$$\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta} = \frac{\cos(\pi/2 - h) - \cos\pi/2}{(\pi/2 - h) - \pi/2} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\pi/2 - h)} - 0}{\displaystyle\int_0^{1-k} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2k-k^2}}{\displaystyle\int_{1-k}^{1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}.$$

Estimando exactamente como antes, se obtiene

$$-1 = -\frac{\sqrt{2k-k^2}}{\sqrt{2k-k^2}} < \frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta} < -\frac{\sqrt{2k-k^2}}{\sqrt{2k-k^2}}(1-k) = -1 + k.$$

Conforme $k \to 0$,

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta\Big|_{\pi/2} = -1 = -\operatorname{sen}\pi/2.$$

Así,

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta, \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta \qquad \{-\infty < \theta < \infty\}.$$

Las otras funciones trigonométricas se definen en términos del seno y el coseno:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

De la identidad

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

(la cual fue parte de la definición de cos θ), se obtiene

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1.$$

Podemos introducir funciones inversas de las funciones trigonométricas en intervalos apropiados. En particular, la función con la cual se empezó la discusión de los temas de esta sección es el valor principal de ang seno:

$$\theta(y) = \text{ang sen } y = \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad \{-1 < y < 1\}.$$

La función $\theta_1(y)$ es otra **rama**, nombre que recibe, de ang sen y.

Introduciremos otra función trigonométrica inversa, a saber el valor principal de ang tan z. Ahora,

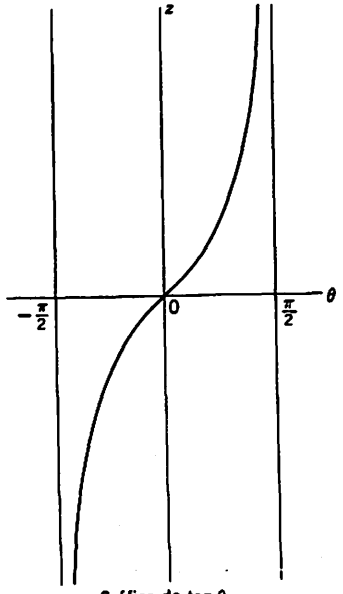
$$\frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{dt}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta > 0,$$

de modo que tan θ es estrictamente creciente en $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. También

$$\tan\theta \to -\infty \quad \text{conforme} \quad \theta \to \pi/2 + 0$$

y

$$\tan\theta \to +\infty \quad \text{conforme} \quad \theta \to \pi/2 - 0.$$



Gráfica de tan θ

De aquí que existe una función inversa la cual se representará mediante la fórmula

$$\theta = \text{ang tan } z.$$

Está definida en $\{-\infty < z < \infty\}$, es monótona creciente y

$$\begin{aligned} &\text{ang tan } z \to \pi/2 \quad \text{conforme} \quad z \to +\infty \\ &\text{ang tan } z \to -\pi/2 \quad \text{conforme} \quad z \to -\infty \end{aligned} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

También

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{d\theta}} = \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+z^2},$$

de donde

$$\theta(z) = \text{ang tan } z = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2}.$$

A continuación se establecerán algunas identidades adicionales. Primero, se deduce de la definición que

$$\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,\theta.$$

Derivando se obtiene

$$\cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Por lo tanto, el seno es impar y el coseno es par. A partir de estos resultados se obtiene inmediatamente que la tangente, la cotangente y la cosecante son impares y la secante es par.

Ahora sea θ un número cualquiera $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$. Entonces existe un y, a saber $y = \text{sen}\,\theta$, en $\{-1 \leqslant y \leqslant 1\}$ para el cual

$$\theta = \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

o bien

$$\theta = \pi - \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

de acuerdo en que θ esté en $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$ o bien en $\{\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$. En ambos casos,

$$(\pi - \theta) = \pi - \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

o bien

$$(\pi - \theta) = \int_0^y \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Así, en ambos casos $\text{sen}\,(\pi - \theta) = y$. Pero y se escogió, en principio, como $\text{sen}\,\theta$. Por tanto

$$\text{sen}\,(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta$$

se cumple para θ en $\{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\}$ y, por periodicidad, debe cumplirse para toda θ. Derivando respecto a θ, se obtiene

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta.$$

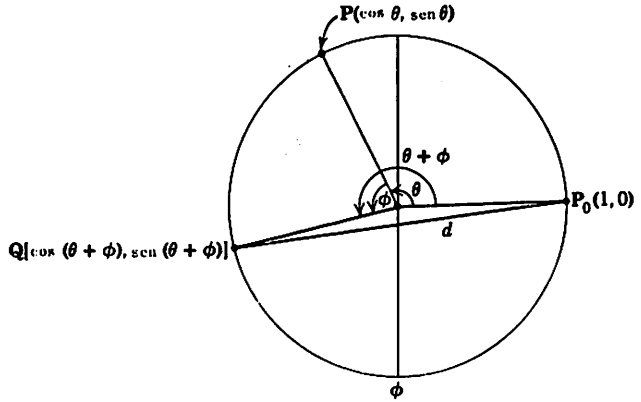
Considérese $\tan(\pi + \theta)$ para toda θ. Hágase $\theta = -\psi$:

$$\tan(\pi+\theta) = \tan(\pi-\psi) = \frac{\text{sen}(\pi-\psi)}{\cos(\pi-\psi)} = \frac{\text{sen}\,\psi}{-\cos\psi} = \frac{\text{sen}(-\psi)}{\cos(-\psi)}$$
$$= \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

Por tanto, la tangente, y de aquí que también la cotangente, es periódica con período π.

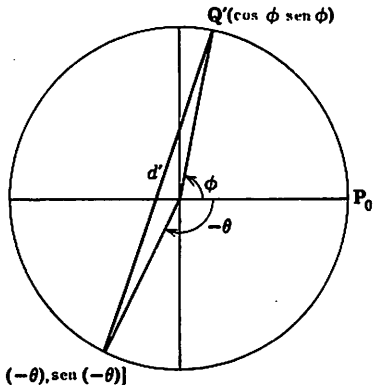
Para obtener las fórmulas de adición para las funciones circulares haremos uso de una propiedad geométrica, a saber, que las distancias se conservan bajo una rotación.

Sean θ y ϕ dos números cualesquiera. Sea **P** el punto sobre el círculo unitario que se encuentra a una distancia angular θ desde $\mathbf{P}_0(1,0)$ y **Q** el punto cuya distancia angular desde **P** es ϕ (tanto θ como ϕ se indican como positivas en la figura). Las coordenadas de **P** son $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ y las de **Q** son $[\cos(\theta+\phi), \text{sen}\,(\theta+\phi)]$. Ahora giremos los tres puntos en el



sentido del movimiento de las manecillas del reloj un ángulo θ hasta que $\mathbf{P}_0$ coincida con el punto $\mathbf{P}'$ [cos $(-\theta)$, sen $(-\theta)$], $\mathbf{P}$ coincide con $\mathbf{P}_0(1,0)$ y $\mathbf{Q}$ coincide con $\mathbf{Q}'$ (cos ϕ, sen ϕ). Entonces la distancia d desde $\mathbf{P}_0$ hasta $\mathbf{Q}$ es la misma que la distancia desde $\mathbf{P}'$ hasta $\mathbf{Q}'$. Así.

$$d^2 = [\cos(\theta + \phi) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\theta + \phi)]^2$$
$$= (\cos\phi - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\theta)^2.$$



Esta expresión se reduce a

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi.$$

Entonces, considerando ϕ fijo y derivando respecto a θ, se obtiene

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi.$$

A partir de estas dos expresiones pueden obtenerse las fórmulas de adición para otras funciones trigonométricas. Así mismo, las identidades usuales para los ángulos doble y mitad se deducen inmediatamente de estas expresiones.

EJERCICIOS B

1. Probar que la función f, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x \cos(\alpha + \beta - x) + \cos x \operatorname{sen}(\alpha + \beta - x)$ es constante demostrando que $f'(x) = 0$. Deducir una demostración no geométrica para las fórmulas de adición.
2. Probar que
$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sen}(\pi/2 + \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\pi/2 - \theta) = -\cos(\pi/2 + \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
3. Al expresar ang tan z como una integral, ¿por qué se toma el límite inferior como cero?
4. Demostrar que, en el intervalo $\{0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, el coseno tiene una función inversa. Esta da el valor principal del ang cos x. Obtener una fórmula integral para ang cos x.
5. Demostrar que
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\Big|_0 = 1,$$
y de aquí que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
6. Demostrar que sen x y cos x son infinitamente derivables.

6

Límites y continuidad

6.1 PUNTOS LIMITE. PUNTOS DE ACUMULACION

Hemos discutido los límites de las sucesiones y de las funciones. La existencia de un límite de una sucesión demanda que el n-ésimo término de la sucesión llegue a estar arbitrariamente próximo a algún número fijo A conforme se incrementa n. Si el límite no existe, esta condición no se cumple. Sin embargo, es posible que exista un número A al cual los términos se aproximen periódicamente. Es decir, ciertos términos escogidos adecuadamente pueden estar cercanos a A, aunque otros pueden estar muy lejos. Por ejemplo, sea

$$x_n = (-1)^n + 1/n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Es evidente que esta sucesión no tiene límite, porque no existe número A tal que x_n esté arbitrariamente cercano a A para un n grande. Sino que los x_n se agrupan alrededor de dos puntos distintos, a saber $+1$ y -1, de modo que para todo $\epsilon > 0$ existen x_n dentro del ϵ de $+1$ y otros en el de -1. Tal punto recibe el nombre de un punto límite o un valor límite de la sucesión. La definición precisa es la siguiente:

Se dice que un punto A es un **punto límite** o **valor límite** de la sucesión $\{x_n\}$ si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a A:

$$x_{n_k} \to A.$$

En forma semejante, si f está definida en una vecindad agujereada de a, se dice que A es **valor límite** de f en a si existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \to a$ para la cual $f(x_n) \to A$.

Se define un concepto semejante para los conjuntos: un punto a es un **punto de acumulación** de un conjunto S si toda vecindad agujereada de a contiene puntos de S. Nótese que el propio punto a puede ser o puede no ser un miembro del conjunto S.

A continuación estableceremos el teorema básico acerca de los puntos límite y de acumulación, a saber el **teorema de Bolzano-Weierstrass.**

6.1a Teorema. Un conjunto infinito acotado tiene por lo menos un punto de acumulación y una sucesión acotada tiene por lo menos un punto límite.

Se desarrollará la primera parte de la demostración para los conjuntos. La demostración para las sucesiones es muy semejante y puede obtenerse de la de los conjuntos reemplazando frases tales como «un número infinito de miembros de S» por «a_n para un número infinito de valores distintos de n».

Demostración. Sea S el conjunto. Ya que S es acotado, existe un M tal que S está contenido en el intervalo

$$I_0\colon \{-M \leqslant x \leqslant M\}.$$

Cuando se bisecta I_n para formar los dos intervalos cerrados $\{-M \leqslant x \leqslant 0\}$ $\{0 \leqslant x \leqslant M\}$, uno (o puede ser que ambos) de estos dos intervalos contiene un número infinito de miembros de S, supuesto que S es un conjunto infinito. Denotemos tal intervalo por I_1. Biséctese I_1: uno de los dos intervalos debe contener un número infinito de puntos de S. Llamémoslo I_2, biséctese y continúese este proceso *ad infinitum*. Con ello se construye una sucesión de intervalos $I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, cada uno de los cuales está contenido en el anterior conteniendo un número infinito de miembros de S. La longitud de $I_n = M/2^n$.

Si se denotan los puntos extremos de I_n por a_n y b_n de manera que I_n se describe por $\{a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente acotada superiormente y $\{b_n\}$ es una sucesión no creciente acotada inferiormente. De aquí que ambas sucesiones tienen límites. Además,

$$\lim b_n - \lim a_n = \lim (b_n - a_n) = \lim M/2^n = 0.$$

Denotemos el valor común del límite por A. Entonces es evidente que

$$a_n \leqslant A \leqslant b_n,$$

o A está en I_n para todo n.

Ahora, sea dado un $\epsilon > 0$. Entonces $M/2^n < \epsilon$ si n es suficientemente grande, digamos $n > N$. Para tales n, I_n está en $\{A - \epsilon < x < A + \epsilon\}$, ya que ningún punto de I_n está más alejado de A que la longitud de I_n, a saber $M/2^n$. De aquí que en esta vecindad existe un número infinito de puntos de S.

Con esto se completa la demostración para los conjuntos. Con las sucesiones existe un paso adicional: demostrar que se tiene una subsucesión que converge en A. Pero ahora esto es sencillo. Existe una cantidad infinita

de números n para los cuales x_n está en $\{|A - x| < 1\}$. De aquí que existe un

$$n_1 \text{ para el cual } |A - x_{n_1}| < 1.$$

Existe una cantidad infinita de números n para los cuales x_n está en $\{|A - x| < 1/2\}$. De aquí que existe un

$$n_2 > n_1 \text{ para el cual } |A - x_{n_2}| < 1/2.$$

En forma semejante, existe un

$$\begin{aligned} &n_3 > n_2 \quad \text{para el cual } |A - x_{n_3}| < 1/3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &n_k > n_{k-1} \quad \text{para el cual } |A - x_{n_k}| < 1/k. \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Ahora es evidente que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ converge en A. ∎

6.2 EL CRITERIO DE CAUCHY

A partir de la discusión de la sección anterior puede deducirse un principio general de convergencia conocido como **criterio de Cauchy.** Es muy útil al establecer la existencia de un límite cuando el valor del límite es difícil o imposible de calcular explícitamente.

6.2a Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ converja es que para cada $\epsilon > 0$ exista un $N(\epsilon)$ para el cual

$$|x_m - x_n| < \epsilon \qquad \text{para todo } m > N,\ n > N.$$

Nos referiremos a la proposición que empieza con «para cada» como la condición ϵ- del criterio de Cauchy. Esta es una aseveración acerca del comportamiento de los términos de una sucesión. Afirma que avanzando lo suficiente en la sucesión, todos los términos están próximos unos a los otros. Cuando se aplica a una sucesión particular, esta aseveración puede ser, por supuesto, falsa o verdadera. El teorema afirma que aquellas sucesiones para las cuales la proposición es verdadera son precisamente las convergentes, y aquellas para las cuales es falsa son las divergentes.

Demostración: Necesidad. La condición ϵ- es necesaria. Se supone

que existe $A = \lim x_n$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ para el cual

$$|x_n - A| < \epsilon/2 \qquad \text{si } n > N.$$

Si se cumple que $n > N$ y $m > N$, entonces

$$|x_m - x_n| = |(x_m - A) - (x_n - A)| \leq |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Suficiencia. La condición ϵ- es suficiente. Se desea probar que $\lim x_n$ existe bajo la suposición de que se cumple la condición ϵ- . Esto es más difícil, ya que no se tiene un número A que sirva como candidato para $\lim x_n$. Para obtener tal número A se aplica el teorema de Bolzano-Weierstrass (6.1a). Para hacerlo debemos demostrar que la sucesión es acotada. Apliquemos la condición ϵ- con $\epsilon = 1$. Así, existe un N tal que

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \text{si } n > N, m > N.$$

De aquí que $\quad |x_n| - |x_m| \leq ||x_n| - |x_m|| \leq |x_n - x_m| < 1.$

o bien $\quad |x_n| \leq |x_m| + 1 = M_1.$

Manténgase m fijo. Entonces M_1 es una cota para todas las x_n para $n > N$. Solamente existe un número finito de x no cubiertas por esta cota. De aquí que, incrementando M_1 si es necesario, se obtiene un número M tal que

$$|x_n| < M \qquad \text{para todo } n.$$

Así que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada y, por lo tanto, tiene un punto límite el cual se denotará por A.

Ahora tenemos nuestro candidato. Sin embargo, aún no se ha demostrado que es un límite real. Con este fin recuérdese que, por el Teorema 6.1a, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en A. Una vez más, por la condición ϵ- aplicada para $\epsilon/2$, se tiene

$$|x_n - x_{n_k}| < \epsilon/2 \qquad \text{si } n > N(\epsilon/2) \quad \text{y} \quad n_k \geqslant k > N(\epsilon/2).$$

Ahora manteniendo n fijo y haciendo que $k \to \infty$, se obtiene

$$|x_n - A| \leqslant \epsilon/2 < \epsilon \qquad \text{si } n > N(\epsilon/2).$$

Esta es la definición de límite. ∎

El criterio de Cauchy se extiende fácilmente para cubrir la existencia de un límite de una función.

6.2b Teorema. Sea $f(x)$ definida en una vecindad agujereada de a (o en el caso de límites laterales necesita estar definida solamente en un lado de a). Una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista es que para cada $\epsilon > 0$ exista un $\delta(\epsilon)$ para el cual

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad \text{siempre que } 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |x' - a| < \delta.$$

Demostración. La demostración de este teorema contiene básicamente las mismas ideas que la demostración del precedente. La necesidad de la condición ϵ- se deja como ejercicio (B1). Nos concretaremos a dar un bosquejo de la demostración de la suficiencia. Escójase una sucesión $\{x_n\}$ de modo que $x_n \to a$. Entonces la sucesión asociada $\{y_n\}$, donde $y_n = f(x_n)$, satisfará la condición ϵ- del Teorema 6.2a, de manera que $\{y_n\}$ tiene un límite, el cual se denotará por A. A continuación considérese

$$|f(x) - f(x_n)| < \epsilon/2,$$

donde $\quad 0 < |x - a| < \delta\,(\epsilon/2)$

y $\quad 0 < |x_n - a| < \delta\,(\epsilon/2).$

Manténgase x fija y hágase $n \to \infty$. Entonces se obtiene

$$|f(x) - A| \leqslant \epsilon/2 < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$ ∎

EJEMPLO 1. Supóngase que $f(x)$ está definida en $\{0 < x < 1\}$ y satisface

$$|f(x) - f(x')| < 5\sqrt{|x - x'|}.$$

Demostrar que $\lim_{x \to 1-0} f(x)$ existe.

Solución. Demostraremos que la condición ϵ- del criterio de Cauchy—(Teorema 6.2b) se satisface. Considérense dos puntos x y x' en el intervalo de definición. Supóngase que x' es el mayor. Entonces

$$|f(x) - f(x')| < 5\sqrt{|x - x'|} = 5\sqrt{(x' - x)} \leqslant 5\sqrt{1 - x}$$

Se ve que si $0 < 1 - x < \epsilon^2/25$, entonces

$$0 < 1 - x' < \epsilon^2/25$$

y $\quad |f(x) - f(x')| < 5\sqrt{1 - x} < 5\sqrt{\epsilon^2/25} = \epsilon.$

EJEMPLO 2. Supóngase una sucesión $\{x_n\}$ la cual tiene la propiedad de que existe un r, $0 < r < 1$, para el cual

$$|x_{n+1} - x_n| < cr^n.$$

Demostrar que $\lim x_n$ existe.

Solución. Hagamos notar primero una trampa en la que podríamos

caer. Tal y como se sabe, $r^n \to 0$ conforme $n \to \infty$, de modo que existe un $N(\epsilon)$ para el cual

$$r^n < \epsilon/c \qquad \text{si } n > N.$$

Así,
$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Desafortunadamente, sin embargo, esto no prueba que el límite existe, ya que la condición ϵ- debe satisfacerse para *todo* m y $n > N$. Solamente se ha demostrado para un m muy especial, a saber $m = n + 1$. A continuación se dará una demostración correcta.

Considérese $|x_m - x_n|$. Supuesto que uno de m o n es el mayor, supóngase, sin perder generalidad, que $m > n$. Entonces

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots \\
&\qquad + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant cr^{m-1} + cr^{m-2} + \cdots + cr^n \\
&= cr^n[1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-n-1}] \\
&= cr^n \frac{1 - r^{m-n}}{1 - r} < \frac{cr^n}{1 - r}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, ya que $r^n \to 0$, existe un N tal que $r^n < (1 - r)\,\epsilon/c$ si $n > N$. Y para tales n se tiene

$$|x_m - x_n| < \frac{cr^n}{1 - r} < \epsilon.$$

EJERCICIOS A

1. Encontrar todos los puntos límite de las siguientes sucesiones:
   (*a*) $\{\operatorname{sen} n\pi/2 + (-1)^n/n\}$
   (*b*) $\left\{\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + (-1)^n + \frac{1}{2^n}\right\}$
2. Sea r_n el residuo entero ($0 \leqslant r_n \leqslant 9$) cuando n se divide entre 10. Encontrar todos los puntos límite de las siguientes sucesiones:
   (*a*) $\{r_n + 1/n\}$ (*b*) $\{r_n/4 + 1/3^n\}$
3. Encontrar todos los puntos límite de las siguientes funciones en $x = 0$:
   (*a*) $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (*b*) $\operatorname{sgn} x$
   (*c*) $\left|\cos\frac{1}{x}\right|$ (*d*) $\frac{1}{1 + e^{1/x}}$

EJERCICIOS B

1. Probar la necesidad en el Teorema 6.2b.
2. Sea $\lim x_n = A$ para la sucesión del Ejemplo 2. Dar una estimación para $|x_n - A|$ en términos de n y r.
3. Aplicar el criterio de Cauchy para probar la existencia de
$$\lim\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$
4. Probar que si f es uniformemente continua en $\{a < x < b\}$, entonces tanto $f(a + 0)$ como $f(b - 0)$ existen.
5. Supóngase que $\{x_n\}$ es una sucesión que satisface $|x_{n+1} - x_n| \leqslant c_n$ y que $\sum_1^n c_k = S_n$ es una sucesión convergente. Demostrar que $\{x_n\}$ converge.
6. Demostrar que si $\{a_n\}$ converge, entonces para todo $p \geqslant 1$
$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$$
7. Supóngase que f es derivable para toda x y que f' es una función acotada. Demostrar que f es uniformemente continua para toda x.

EJERCICIOS C

1. Supóngase que $x_1 > x_0 > 0$ y que para $n \geqslant 1$ se tiene
$$x_{n+1} = x_n + r^n x_{n-1} \qquad \text{donde } 0 < r < 1.$$
Demostrar que $\{x_n\}$ converge. *(Sugerencia:* Demostrar la convergencia, suponiendo que $\{x_n\}$ es acotada. Para demostrar que es acotada, probar por inducción que $x_{n+1} \leqslant x_1(1 + r)\ (1 + r^2)\cdots(1 + r^n)$, entonces aplique el Ejercicio B7 de la Sección 2.6.)
2. Probar el criterio de Cauchy para la convergencia en $+\infty$. Sea $f(x)$ definida para $x \geqslant x_0$. Una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ exista es que para todo $\epsilon > 0$ exista un $X(\epsilon)$ tal que
$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad \text{si } x > X \text{ y } x' > X.$$
3. Supóngase que $\{I_n\}$ es una sucesión de intervalos no vacíos, cerrados y acotados cada uno de los cuales está contenido en el precedente. Demostrar que si la longitud de I_n tiende a cero con n, existe exactamente un punto contenido en todos los intervalos. (Ver la demostración del Teorema 6.1a.)

6.3 LIMITE SUPERIOR Y LIMITE INFERIOR

Hemos visto que una sucesión $\{x_n\}$ que no tiene límite puede tener muchos puntos límite. Considérese que $\{x_n\}$ tiene puntos límite y sea C el conjunto de los puntos límite de $\{x_n\}$. Se desea examinar las cotas de este conjunto de puntos C. De hecho, C no necesita estar acotado (ver

Ejercicio B1), pero nos referiremos principalmente a los casos donde está acotado, por lo menos en un lado.

Supóngase que una sucesión dada $\{x_n\}$ está acotada superiormente y tiene puntos límite. Entonces C asimismo está acotado superiormente (¿por qué?) y así, por la Sección 1.5, C tiene un suprémum, el cual se denotará por Λ. Este número, Λ, recibe el nombre de **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$ y se expresará por

$$\Lambda = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

o bien

$$\Lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Como en el caso de los límites ordinarios, suprimiremos los símbolos $n \to \infty$, de manera que las fórmulas anteriores se escribirán

$$\Lambda = \limsup x_n$$

o bien

$$\Lambda = \overline{\lim}\, x_n.$$

En forma semejante, si $\{x_n\}$ está acotada inferiormente y tiene puntos límite, entonces su conjunto C de puntos límite está acotado inferiormente. Su ínfimum se llamará **límite inferior** de $\{x_n\}$ y se denotará por λ:

$$\lambda = \liminf x_n$$

o bien

$$\lambda = \underline{\lim}\, x_n,$$

donde también se ha suprimido $n \to \infty$.

Recordemos que no todo conjunto acotado superiormente tiene un máximo. Aplicado al caso que nos ocupa, esto significa que es concebible que Λ no pertenezca a C; esto es, Λ puede no ser un punto límite de $\{x_n\}$. En forma semejante, no es claro si λ es o no un punto límite de $\{x_n\}$. En realidad, tanto Λ como λ son puntos límite, cuando existen; estas observaciones simplemente puntualizan el hecho de que esto debe probarse. La demostración se discutirá en los ejercicios.

Con el objeto de establecer todos los hechos, discutiremos los casos impropios donde la sucesión puede no ser acotada. En gran parte simplemente se trata de nomenclatura; es decir, estableceremos ciertos términos usuales para describir tal situación. Así:

(*a*) Si $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, diremos que $\limsup x_n = +\infty$.

(*b*) Si $\{x_n\}$ no está acotada inferiormente, diremos que $\liminf x_n = -\infty$.

(*c*) Si $x_n \to -\infty$, diremos que $\limsup x_n = -\infty$.

(*d*) Si $x_n \to +\infty$, diremos que $\liminf x_n = +\infty$.

En general, cuando se dice que $\limsup x_n$ o $\liminf x_n$ existe debe entenderse en el sentido de las primeras definiciones. En ocasiones, para enfatizar, puede decirse que $\limsup x_n$ existe y es finito. Cuando se aplica una de las últimas definiciones, deberá puntualizarse específicamente que se está usando la forma extendida o impropia.

Tal vez la propiedad más importante de estos números Λ y λ se describe en el siguiente teorema. A grandes rasgos, se dice que para todo $\epsilon > 0$ todos los x_n de una sucesión (excepto un número finito), se encuentran abajo de $\Lambda + \epsilon$ y arriba de $\lambda - \epsilon$.

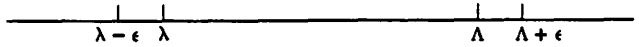
6.3a Teorema. Sea $\{x_n\}$ una sucesión para la cual Λ es finito. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_1(\epsilon)$ tal que

$$x_n < \Lambda + \epsilon \qquad \text{si } n > N_1$$

Y si λ es finito, entonces existe un $N_2(\epsilon)$ tal que

$$x_n > \lambda - \epsilon \qquad \text{si } n > N_2.$$

Demostración. Probaremos la primera proposición. Supóngase que no fuera así: supóngase que existiera un $\epsilon_0 > 0$ excepcional, de modo que no importara qué tan grande fuera N; siempre existe un $n > N$ para el cual $x_n \geqslant \Lambda + \epsilon_0$. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$, cuyos puntos todos se encuentran arriba de $\Lambda + \epsilon_0$. Pero esta subsucesión también está acotada superiormente, de aquí que, por el Teorema 6.1a, tiene un punto límite β para el cual evidentemente $\beta \geqslant \Lambda + \epsilon_0$. Pero esto contradice el hecho de que Λ es el suprémum del conjunto de los puntos límite de $\{x_n\}$. ∎



Una ojeada a la figura anterior convencerá al estudiante de la veracidad del siguiente teorema.

6.3b Teorema. Para que $\lim x_n$ exista, es necesario y suficiente que

$$\limsup x_n = \liminf x_n.$$

Demostración: Necesidad. Si $\lim x_n = A$ existe, entonces el conjunto de puntos límite de $\{x_n\}$ contiene exactamente un punto, a saber el propio A. De aquí que

$$\Lambda = \lambda = A.$$

Suficiencia. Supóngase que $\Lambda = \lambda$. Entonces, por el Teorema 6.3a, existe un N (tómese N como el mayor de N_1 y N_2 de ese teorema) tal que

$$\lambda - \epsilon < x_n < \Lambda + \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Supuesto que $\Lambda = \lambda$, esto puede escribirse nuevamente como

$$|x_n - \lambda| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$ ∎

El **límite superior** de una función en un punto puede definirse en forma

semejante. Así, si f está acotada superiormente en una vecindad de a, $\lim_{x\to a}$ sup $f(x)$ o bien $\overline{\lim_{x\to a}}\, f(x)$ se define como el suprémum de los puntos límite de f en a. Si f no está acotada superiormente en toda vecindad de a, se dice que

$$\limsup_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

De la misma manera se define $\liminf_{x\to a} f(x)$ o bien $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$, y $\limsup_{x\to\pm\infty} f(x)$ y $\liminf_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Los siguientes dos teoremas son los análogos a los dos anteriores. Sus demostraciones se dejan como ejercicios (B2).

6.3c Teorema. Sea f acotada superiormente en una vecindad agujereada de a. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta_1(\epsilon)$ tal que

$$f(x) < \limsup_{x\to a} f(x) + \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1,$$

y si f está acotada inferiormente existe un $\delta_2(\epsilon)$ tal que

$$f(x) > \liminf_{x\to a} f(x) - \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

6.3d Teorema. Para que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista, es necesario y suficiente que

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x).$$

EJERCICIOS A

1. Calcular lim sup x_n y lim inf x_n para las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ (b) $\left\{\cos\frac{n\pi}{4} + (-1)^n\right\}$

   (c) $\left\{\frac{[1+(-1)^{n+1}]}{2}\, n^{(-1)^n} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right\}$ (d) $\{n^{(-1)^n}\}$

   (e) $\{(-1)^{n+1}\, n^{(-1)^n}\}$ (f) $\{(-1)^n\, n^{(-1)^n}\}$.

2. Calcular $\limsup_{x\to 0} f(x)$ y $\liminf_{x\to 0} f(x)$ para las siguientes funciones:

   (a) $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. (b) $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$. (c) $\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que el conjunto de puntos límite de $\frac{1}{x}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$ en cero no está acotado superiormente.
2. Probar los Teoremas 6.3c y 6.3d.

EJERCICIOS C

1. Dadá una sucesión $\{x_n\}$, probar que:

   (a) $\limsup x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{k\geq n} x_k\right]$ (b) $\liminf x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{k\geq n} x_k\right]$.

2. Sea f definida en una vecindad de a, probar que:

   (a) $\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\sup_{0<|x-a|\leq\delta} f(x)\right]$ (b) $\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\inf_{0<|x-a|\leq\delta} f(x)\right]$

6.4 PROPIEDADES MAS PROFUNDAS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección se desea establecer algunas propiedades de funciones continuas definidas en intervalos acotados cerrados. Estas propiedades son un poco más difíciles de probar que las primeras propiedades establecidas en el Capítulo 3, de aquí el título de esta sección. Aquí se tienen dos fines principales. El primero es probar el Teorema 3.6b que asevera que una función continua en un intervalo acotado cerrado alcanza un máximo allí. Este hecho proporciona la terminación de las demostraciones del teorema de Rolle y el teorema del valor medio, los cuales se basan en el Teorema 3.6b. El segundo es probar que la continuidad en un intervalo acotado cerrado implica la continuidad uniforme. Empecemos con un teorema preliminar.

6.4a Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado I: $\{a \leq x \leq b\}$, entonces es acotada allí.

Demostración. Supóngase que, por contradicción, f no está acotada en I. Considérese el conjunto S de números c entre a y b para los cuales f está acotada en $\{a \leq x \leq c\}$. El conjunto S no es vacío porque, por la continuidad en $x = a$, con $\epsilon = 1$ se tiene una δ, de modo que

$$|f(x) - f(a)| < 1 \qquad \text{si } |x - a| < \delta_1.$$

Así,

$$|f(x)| < |f(a)| + 1 \qquad \text{si } |x - a| < \delta_1.$$

Definamos c_0 por

$$c_0 = \sup_S c.$$

Se desea demostrar que $c_0 = b$. Supóngase que no es así. Entonces también en c_0 existe un intervalo $\{c_0 - \delta \leq x \leq c_0 + \delta\}$ en el cual f está acotada por $M_1 = |f(c_0)| + 1$, por un argumento de continuidad semejante. Y supuesto que $c_0 - \delta < c_0$, se tiene que f está acotada en $\{a \leq x \leq c_0 - \delta\}$, digamos por M_2. Entonces, para $M = \text{máx}\,[M_1, M_2]$ se tiene

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{en } \{a \leq x \leq c_0 + \delta\}.$$

Ya que $c_0 + \delta > c_0$, esto contradice la definición de c_0 como sup c. Por lo tanto, $c_0 = b$ y f está acotada en I. ∎

Ahora abordaremos la demostración de que una función continua alcanza un máximo sobre un intervalo acotado cerrado.

6.4b Teorema. Si f es continua en un intervalo acotado cerrado $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces existe un punto x_0 en I para el cual

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Demostración. Por el Teorema 6.4a, f está acotada en I. De aquí que $M = \sup f(x)$ existe. Supóngase que no existe punto en I para el cual $f(x) = M$. Entonces $M - f(x)$ es positiva en todo punto en I y, por supuesto es continua allí. Esto implica, por el Teorema 3.2a(ii), que $\dfrac{1}{M - f(x)}$ es continua allí. Una vez más, por el Teorema 6.4a, $\dfrac{1}{M - f(x)}$ está acotado en I, digamos por B. Entonces

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant B \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

lo cual implica que

$$f(x) < M - \frac{1}{B} < M \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Esto contradice el hecho de que $M = \sup_I f(x)$. ∎

Recordemos la definición de continuidad uniforme que se dio en el Capítulo 3: Una función f es uniformemente continua en un conjunto D si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ (que depende solamente de ϵ y D), de modo que para x y x' en D

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x'| < \delta.$$

El teorema fundamental de la continuidad uniforme es el siguiente.

6.4c Teorema. Una función que es continua en un intervalo acotado cerrado $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$ es uniformemente continua allí.

Demostración. La prueba nuevamente es por contradicción. Supóngase que el teorema no fuera verdadero. Esto significaría que existe un ϵ excepcional, digamos ϵ_0, tal que para todo $\delta > 0$ existe un par de puntos x y x' en I con $|x - x'| < \delta$ para los cuales $|f(x) - f(x')| \geqslant \epsilon_0$. Tómese δ sucesivamente como 1, ½, ⅓, ... Así, existen

x_1, x_1' en I con $|x_1 - x_1'| < 1$ para los cuales $|f(x_1) - f(x_1')| \geqslant \epsilon_0$

x_2, x_2' en I con $|x_2 - x_2'| < 1/2$ para los cuales $|f(x_2) - f(x_2')| \geqslant \epsilon_0$

$\cdots$

x_n, x_n' en I con $|x_n - x_n'| < 1/n$ para los cuales $|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \epsilon_0$.

$\cdots$

Así se tienen dos sucesiones, $\{x_n\}$ y $\{x_n'\}$, en I para las cuales

$$|x_n - x_n'| < 1/n$$

y

$$|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \epsilon_0.$$

Ahora bien, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, porque $a \leqslant x_n \leqslant b$, y de aquí que tiene un punto límite, el cual se denotará por β. Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a β. Así,

$$\beta = \lim x_{n_k} \geqslant a \quad \text{puesto que } x_{n_k} \geqslant a$$

y

$$\beta = \lim x_{n_k} \leqslant b \quad \text{puesto que } x_{n_k} \leqslant b.$$

Esto significa que β está en I y, por lo tanto, f es continua en β. También

$$|\beta - x_{n_k}'| \leqslant |\beta - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_{n_k}'| < |\beta - x_{n_k}| + 1/n_k$$

Conforme $k \to \infty$, $n_k \to \infty$ y $x_{n_k} \to \beta$, de modo que $|\beta - x_{n_k}'| \to 0$. Esto significa que $x_{n_k}' \to \beta$. Entonces, debido a la continuidad de f en β,

$$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \to |f(\beta) - f(\beta)| = 0,$$

lo cual contradice la construcción de que

$$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| > \epsilon_0.$$ ∎

EJERCICIOS A

1. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas en los intervalos indicados:

(a) $\sqrt{x}$ $\quad \{0 < x < 1.\}$.

(b) $\begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \{0 < x < 1\}$.

(c) $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$ $\quad \{-1 < x < 1\}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$ $\quad \{-\pi < x < \pi\}$

(e) $x^3 \operatorname{sgn} x$ $\quad \{-\pi < x < \pi\}$

2. Demostrar que si $f(x)$ es uniformemente continua en un intervalo I, entonces es uniformemente continua en todo subintervalo de I.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que si $f(x)$ es continua en un intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$ y si $f(a + 0)$ y $f(b - 0)$ existen, entonces $f(x)$ es uniformemente continua en J.
2. Sea f diferenciable en un intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$. Demostrar que si f' tiene límite en J, entonces f es uniformemente continua en J.

7

Propiedades de las funciones diferenciables

7.1 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

En este capítulo se obtendrán algunas propiedades adicionales de las funciones diferenciables, muchas de las cuales son consecuencia del teorema del valor medio (3.6e). Empezaremos por establecer una extensión de este teorema conocida como **teorema del valor medio de Cauchy.**

7.1a Teorema. Supóngase que f y g son continuas en un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y derivable en el intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$. Entonces existe un punto β para el cual

$$[f(b) - f(a)]g'(\beta) = [g(b) - g(a)]f'(\beta).$$

Si además $g(b) \neq g(a)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ no son simultáneamente cero en J, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}.$$

Demostración. Aplicaremos el teorema de Rolle a la función F dada por

$$F(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)].$$

Es evidente que F es continua en I y derivable en J, puesto que f y g lo son. Y se verifica fácilmente que $F(b) = F(a)$. Por tanto, existe un punto β en J para el cual $F'(\beta) = 0$. Esto prueba la primera parte. Si $g(b) - g(a) \neq 0$ y si $f'(\beta)$ y $g'(\beta)$ no son ambas cero, entonces $g'(\beta)$ no puede

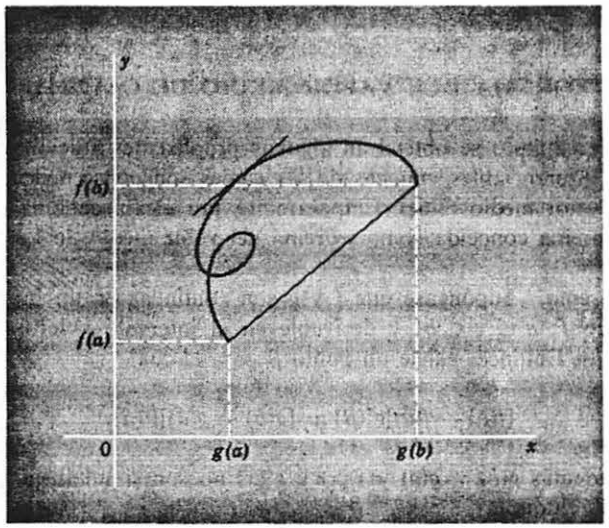
ser cero; porque si lo fuera, entonces $f'(\beta)$ también sería cero. Así, puede dividirse entre $g'(\beta)$ y $g(b) - g(a)$ para obtener la segunda fórmula. ∎

Aun cuando la demostración anterior es sencilla, depende de que se escriba correctamente la función F. Existe una interpretación geométrica de este resultado que ayuda a explicar la forma de F. Supóngase que se tiene una curva C dada por

$$x = g(t), \quad y = f(t) \qquad \{a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Las coordenadas de los puntos extremos son $[g(a), f(a)]$ y $[g(b), f(b)]$. La pendiente de la línea secante que une estos dos puntos es

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



Y si las funciones son suaves, la pendiente de la tangente en cualquier punto está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La igualdad sostenida por el teorema entonces se lee geométricamente de la manera siguiente: Entre dos puntos cualesquiera de una curva suave C, existe un tercer punto en el cual la línea tangente es paralela a la línea secante que une a los dos primeros. Siguiendo el proceso inverso no es difícil adivinar que la función F que se examina es precisamente la que acaba de escribirse.

7.2 LA REGLA DE L'HOSPITAL

Para calcular los límites de las razones, nuestra única fórmula es

$$\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \Big/ \left[\lim_{x \to a} g(x)\right].$$

Por supuesto que esta fórmula requiere que los dos límites del segundo miembro existan, y también que el denominador no sea cero. Muchos límites importantes e interesantes no llenan una u otra de estas condiciones, de manera que esta fórmula no es adecuada para su evaluación. Un ejemplo sencillo está dado por

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

el cual se aplicó con anterioridad y se estableció en el Capítulo 5.

En el siguiente teorema f y g están definidas en un intervalo abierto J, del cual a es un punto extremo. Se entiende que los límites son límites laterales conforme $x \to a$ con x, por supuesto, estando en J; y también pueden ser límites impropios, en el sentido de que el «valor» de un límite puede ser $+\infty$ o bien $-\infty$. Los límites también pueden ser conforme $x \to +\infty$ o bien $-\infty$, en cuyo caso J será un intervalo semi-infinito de la forma $\{x > X_0\}$ o también $\{x < X_0\}$. Este teorema se conoce como **regla de l'Hospital.**

7.2a Teorema. Sea J un intervalo como el descrito en los párrafos anteriores. Supóngase también que f y g son funciones derivables en J. para las cuales

(i) Tanto $g(x)$ como $g'(x)$ no se hacen cero en J,

(ii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

(iii) $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, o bien

(iii′) $g(x) \to \pm\infty$ conforme $x \to a$.

Entonces $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Demostración. Los casos diferentes cubiertos por este teorema se sumarizan en un argumento muy largo. Se darán las demostraciones de dos casos típicos para ilustrar el tipo de argumentos que se aducen:

Caso 1. a es un punto finito y se cumple la condición (iii) en lugar de la (iii′).

Aquí definimos $f(a) = g(a) = 0$ de manera que f y g son continuas en $x = a$. Entonces, para toda x en J, puede aplicarse el teorema del valor

medio de Cauchy al intervalo entre a y x. Así, para cada x en J existe un punto β entre a y x para el cual

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}.$$

Ahora bien, $\beta \to a$ conforme $x \to a$, de manera que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\beta \to a} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = A.$$

Caso 2. $a = +\infty$, $A = +\infty$ $\quad g(x) \to \pm\infty$.

Aquí se supone que f y g tienen las propiedades establecidas en J: $\{x > X_0\}$. Sea dado $M > 1$. Entonces existe un $X_1 \geqslant X_0$ para el cual

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geqslant 2M + 2 \qquad \text{si } x > X_1.$$

(El significado de la hipótesis de que $A = +\infty$— esto es, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$— es que esta razón se hace mayor que cualquier número prefijado si x es suficientemente grande.) Se escoge cualquier $x > X_1$ y en seguida b, de modo que $x > b > X_1$. Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo desde b hasta x, se ve que existe β entre b y x tal que

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} > 2M + 2.$$

Así,
$$\frac{f(x)/g(x) - f(b)/g(x)}{1 - g(b)/g(x)} > 2M + 2.$$

Si se mantiene b fijo, se ve que existe un X_2 tal que

$$\left|\frac{f(b)}{g(x)}\right| < 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{g(b)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{si } x > X_2,$$

supuesto que $|g(x)| \to +\infty$. Así, para $x > X = \text{máx}\,[X_1, X_2]$ se tiene

$$\frac{f(x)/g(x) + 1}{1 - \frac{1}{2}} > 2M + 2,$$

o bien
$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \qquad \text{si } x > X.$$

Ya que esto es verdadero para todo $M > 1$, es el significado de

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty.$$

En lugar de escribir los símbolos de límite a cada paso del cálculo de un límite, para la regla de l'Hospital es conveniente usar el símbolo $\sim$, el cual se lee «tiene el mismo límite que». Así la ecuación

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se transforma en $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ conforme $x \to a$.

El punto a en el cual se está calculando el límite tiene que expresarse explícitamente como se indica arriba, o bien hacerse notar en alguna forma.

Ejemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ si $a > 0$, $b > 0$. [Ver Ejercicio C1(c), Sección 5.2.]

Solución:

$$\frac{a^x - b^x}{x} \sim \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} \to \log a - \log b = \log \frac{a}{b}.$$

Aquí el símbolo $\sim$ indica el paso en el cual se aplicó la regla de l'Hospital; la flecha indica el paso hacia el límite. Se deja al estudiante el verificar que es aplicable la regla de l'Hospital. Tener cuidado en evitar expresiones disparatadas tales como

$$\frac{a^x - b^x}{x} = a^x \log a - b^x \log b = \log a - \log b.$$

El nuevo símbolo también es útil para eliminar factores de límites conocidos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Solución:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)x^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \sim \frac{1}{1 + \cos x} \to \frac{1}{2}.$$

Se puede evaluar el mismo límite por la regla de l'Hospital:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{\sin x}{2x} \to \frac{1}{2}.$$

En ocasiones, para evaluar algunos límites, es necesaria la aplicación repetida de la regla.

Ejemplo 3. Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \sim \frac{\cos x - 1}{3x^2} \sim \frac{-\operatorname{sen} x}{6x} \to -\frac{1}{6}.$$

La hipótesis debe satisfacerse en cada aplicación para poder aplicar la regla repetidamente.

EJEMPLO 4. Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solución:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\log(1+1/x)}{1/x}$$

$$\sim \frac{[x/(x+1)](-1/x^2)}{-1/x^2} = \frac{x}{1+x} \to 1.$$

Así, puesto que el logaritmo es una función continua,

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1.$$

Entonces, tomando exponenciales, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

EJEMPLO 5. Calcular $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Solución:

$$\log(\cos x)^{1/x^2} = \frac{\log\cos x}{x^2} \sim \frac{-\tan x}{2x} \to -\frac{1}{2}.$$

Aquí, como en el ejemplo anterior,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}.$$

EJERCICIO A

1. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\lim_{x\to 1/2}\frac{\cos \pi x}{2x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$ (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$ $\alpha>0$

(e) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$ $\alpha>0$ (f) $\lim_{x\to 0+}\frac{x^\alpha}{e^x-1}$ $\alpha>1$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{a^{x^2}-b^{x^2}}$ $a>0, b>0.$

(h) ¿Es $3^x/x^{100,000,000}$ grande o pequeño para toda x grande?

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{1-a^x}{1-b^x}$ $a>0, b>0$ (j) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{ang\,sen} x - x}$

(k) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$ (l) $\lim_{x\to 0+} x^x$

(m) $\lim_{x\to\infty}(1+a/x)^{bx}$ (n) $\lim_{x\to \pi/2-0}(\tan x)^{\operatorname{sen} 2x}$

(o) $\lim_{x\to \pi/2-0}(\tan x)^{\tan x}$ (p) $\lim_{x\to 0}(\sec x)^{1/x^2}$

EJERCICIOS B

1. Si f está definida en una vecindad de a, f' es continua allí y $f''(a)$ existe, demostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2} = f''(a).$$

2. Comparar el comportamiento de $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ en los siguientes casos:

(a) $f(x)=x^2\operatorname{sen} 1/x, g(x)=\tan x$ conforme $x\to 0$.

(b) $f(x)=x-\operatorname{sen} x, g(x)=x$ conforme $x\to\infty$.

Conciliar el comportamiento de estos ejemplos con la regla de l'Hospital.

3. Supóngase que f y g son continuas y tienen derivadas continuas hasta el n-ésimo orden en una vecindad de a. Supóngase que f y g y sus primeras $(n-1)$ derivadas se hacen cero en a, mientras que $g^{(n)}(a)\neq 0$. Demostrar que conforme $x\to a$, $f(x)/g(x)\to f^{(n)}(a)/g^{(n)}(a)$.

4. Sea f derivable en $\{x>x_0\}$, y supóngase que $f'(x)\to A$ conforme $x\to\infty$. Demostrar que $f(x)/x\to A$ conforme $x\to\infty$.

5. Sea f derivable en $\{x>x_0\}$, y supóngase que $f(x)\to A<\infty$ conforme $x\to\infty$ y $f'(x)\to B$, demostrar que $B=0$.

EJERCICIOS C

1. Si f es derivable en $\{x>x_0\}$ y $f(x)+f'(x)\to A$ conforme $x\to\infty$, demostrar que $f(x)\to A$ y $f'(x)\to 0$.

2. Considérese que f tiene n derivadas continuas en $\{x>x_0\}$, y supóngase que $f(x)/x^n\to A$ y $f^{(n)}(x)\to B$ conforme $x\to\infty$. Evaluar B en términos de A y n. También evaluar $\lim_{x\to\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{x^{n-k}}$ para $1\leqslant k\leqslant n$.

7.3 FORMULA DE TAYLOR CON RESIDUO

Se sabe que e^x tiene el valor 1 cuando $x=0$, es decir, $e^0=1$. Así, uno podría razonablemente preguntar ¿qué tan próximo se encuentra e^x a 1 cuando x es pequeño? ¿Es la diferencia aproximadamente de la magnitud

de la propia x, de x^2, de $\sqrt{x}$ o de $1/\log(1/x)$? El teorema del valor medio proporciona un indicio, ya que afirma que

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} = e^\beta,$$

donde β está entre 0 y x. Por tanto, para x pequeña debe tenerse β aún menor, de manera que e^β está cercano a 1 y $e^x - 1$ es aproximadamente igual a x. En efecto, de acuerdo con la regla de l'Hospital

$$\frac{e^x - 1}{x} \sim e^x \to 1 \qquad \text{conforme } x \to 0. \tag{1}$$

Así, interpretando el símbolo $\sim$ como «aproximadamente igual», se tiene que e^x es aproximadamente igual a $1 + x$ cuando x es pequeño.

Una vez más, puede inquirirse acerca de qué tan próximo es e^x a $1 + x$ para una pequeña x. Comparemos la diferencia con x^2. Aplicando otra vez la regla de l'Hospital, se obtiene

$$\frac{e^x - (1 + x)}{x^2} \sim \frac{e^x - 1}{2x} \to \frac{1}{2}, \tag{2}$$

donde se aplica (1) en el último paso de (2).

Esto sugiere que se compare la diferencia entre e^x y $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ con x^3:

$$\frac{e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)}{x^3} \sim \frac{e^x - (1 + x)}{3x^2} \to \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3!}, \tag{3}$$

donde se aplica (2) en el último paso de (3). Es evidente que podría continuarse.

Fácilmente pueden repetirse estos cálculos con cualquier función f suficientemente derivable en cualquier punto a. El teorema del valor medio sugiere que se compare $f(x) - f(a)$ con $x - a$. En verdad, la existencia de una derivada requiere que sean comparables:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a).$$

Esta expresión, como en el caso anterior, nos conduce a comparar $f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]$ con $(x - a)^2$:

$$\frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{(x - a)^2} \sim \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} \to \frac{1}{2}f''(a).$$

El estudiante observa lo que se obtiene. Pronto estamos comparando $f(x)$ con

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n.$$

El valor de n con el cual se termina este proceso depende de lo que se termina primero, el número de derivadas disponibles o nuestra paciencia. Pero en ningún lugar (a menos que f sea un polinomio) seremos capaces de terminar el proceso y obtener una igualdad entre f y el polinomio de aproximación en un intervalo. De aquí que se tienen las alternativas de continuar indefinidamente, como se hará cuando estudiemos las series infinitas, o detenerse después de un número finito de términos y escribir un término de corrección:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n + R_{n+1}.$$

Esta expresión se conoce como la **fórmula de Taylor con residuo,** la cual puede establecerse para cualquier función que tenga n derivadas. El residuo R_{n+1} es simplemente la diferencia entre f y el polinomio de aproximación. La forma y la magnitud de este residuo es la que nos interesa ahora. En particular, estamos interesados en la información acerca de R_{n+1} que nos ayudará a determinar la proximidad entre el polinomio y f. Empecemos con el siguiente teorema.

7.3a Teorema. Sean f y sus primeras $n + 1$ derivadas continuas en un intervalo cerrado I: $\{c \leqslant x \leqslant d\}$. Entonces, para toda x y toda a en I, se tiene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n + R_{n+1},$$

donde

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Demostración. Por el teorema 4.5b, se tiene

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Integremos por partes, haciendo

$$u = f'(t) \qquad dv = dt$$
$$du = f''(t)\,dt \qquad v = -(x - t).$$

Con lo cual se obtiene

$$f(x) = f(a) - f'(t)(x - t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x - t)\,dt$$
$$= f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x f''(t)(x - t)\,dt.$$

Repitiendo la integración por partes, derivando en cada ocasión a la derivada de f e integrando la potencia de $(x - t)$, se llega por inducción a la fórmula establecida. ∎

7.3b Corolario. Bajo la misma hipótesis de la proposición 7.3a,

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta)(x-a)^{n+1},$$

donde β se encuentra entre a y x.

Demostración. Mediante el teorema del valor medio generalizado para integrales, se tiene

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

La aplicación del teorema del valor medio requiere la continuidad de $f^{(n+1)}$. Sin embargo, la conclusión del corolario es válida si se supone solamente su existencia. El resultado, el cual se establece a continuación, en ocasiones se menciona como la **forma generalizada del teorema del valor medio.**

7.3c Teorema. Si f y sus primeras n derivadas son continuas en un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y si $f^{(n+1)}(x)$ existe en todo punto del intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$, entonces para toda x en I existe una β en J para la cual

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración. Sea $x \neq a$ un punto en I. Este punto se considerará en todo el resto de la demostración. En el intervalo cerrado desde a hasta x, se define la función F por

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

Se desea aplicar el teorema de Rolle (3.6d) a F. De acuerdo con este teorema, F debe ser derivable en $\{a < t < x\}$ y continua en $\{a \leqslant t \leqslant x\}$, todos los cuales se satisfacen y $F(a)$ debe ser igual a $F(x)$. Evidentemente $F(x) = 0$. Ahora se escoge A de modo que también $F(a) = 0$. Así, se escoge

$$A = \left\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right\}\frac{(n+1)!}{(x-a)^n}.$$

Entoces existe una β entre a y x para la cual $F'(\beta) = 0$.

Cuando se calcula $F'(t)$ se efectúan muchas cancelaciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}[(x-t)f'(t)] = (x-t)f''(t) - f'(t)$$

se cancela con $f'(t)$ del término precedente y con uno de los términos del que le sucede. Así se obtiene

$$F'(\beta) = -\frac{f^{(n+1)}(\beta)(x-\beta)^n}{n!} + \frac{(x-\beta)^n}{n!}A = 0.$$

Supuesto que $\beta \neq x$, puede dividirse entre $(x-\beta)^n/n!$, sustituir el valor previo establecido para A y despejar a $f(x)$. Con ello se obtiene la fórmula deseada. $\blacksquare$

En la proposición del teorema se tomó el punto a como el extremo inferior de un intervalo. Podría ser también un extremo superior. Así, si a fuera un punto interior, x podría estar en cualesquiera de sus lados.

La fórmula de Taylor en ocasiones se da en una notación ligeramente diferente. Haciendo $x - a = h$, entonces $x = a + h$ y se tiene

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\beta)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

El punto β se encuentra entre a y $a + h$. Cualquier punto de este tipo puede representarse como

$$\beta = a + \theta h \qquad \{0 < \theta < 1\}.$$

En efecto,
$$\theta = \frac{\beta - a}{h} = \frac{\beta - a}{x - a}.$$

Existen otras formas en las cuales puede escribirse el residuo, algunas de las cuales se discutirán en los problemas.

Una importante consecuencia de estas fórmulas para el residuo es que ahora pueden darse algunas cotas numéricas para determinar qué tan aproximado es el polinomio de aproximación de la fórmula de Taylor a la función. Por ejemplo,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\beta$$

donde β se encuentra entre 0 y x. Así, si

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

entonces
$$|e^x - P_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^\beta.$$

En particular, si $x < 0$, entonces $\beta < 0$ y $e^\beta < 1$; de aquí que

$$|e^x - P_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Y si $x > 0$, entonces $\beta < x$ y $e^{\beta} < e^{x}$; de aquí que

$$|e^x - P_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^x.$$

EJERCICIOS A

1. Escribir la fórmula de Taylor con residuo para las siguientes funciones en los puntos indicados. Haciendo $n = 6$, estimar la magnitud del residuo en cada caso:

(*a*) sen x 0 y $\pi/4$	(*b*) cos x 0 y $\pi/4$
(*c*) e^{-x} 0 y a	(*d*) e^x 0 y a
(*e*) senh x 0	(*f*) cosh x 0
(*g*) log $(1+x)$ 0	(*h*) $x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 2$ 1
(*i*) a^x 0	(*j*) $x^6 + 5x^3 + 4$ 2

2. Escribir los primeros tres términos diferentes de cero en la fórmula de Taylor para las siguientes funciones:

(*a*) sen x^2 0	(*b*) $\text{sen}^2 x$ 0
(*c*) sec x 0	(*d*) tan x 0
(*e*) ang sen x 0	(*f*) ang tan x 0
(*g*) $(1+x)^a$ 0	(*h*) $(1+x^2)^a$ 0
(*i*) e^{x^2} 0	(*j*) e^{-x^2} 0

3. Demostrar que en la fórmula de Taylor para sen x alrededor de $x = 0$, $R_{2n} = R_{2n+1}$; y para cos x, $R_{2n} = R_{2n-1}$.

EJERCICIOS B

1. Estudiar la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \csc x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

y demostrar que cerca de $x = 0$, $\csc x = 1/x + x/6 + \cdots$.

2. Obtener una fórmula semejante para cot x.

3. Sea f una función par definida en una vecindad del origen. Demostrar que en la fórmula de Taylor alrededor de 0 solamente se tienen las potencias pares de x. Y si f es impar, entonces solamente se tienen potencias impares. Supóngase, por supuesto, la existencia de las derivadas necesarias.

4. Considere que $(n+1)$ derivadas continuas en una vecindad N del origen. Sea su fórmula de Taylor con residuo,

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

ahora, el punto β depende de x. Así, $f^{(n+1)}(\beta(x))$ es una función de x. Denótese por $\psi(x)$. Demostrar que $\psi(x)$ tiene $(n+1)$ derivadas en N excepto en el origen.

5. En las siguientes funciones, demostrar que para toda x en el intervalo dado $R_{n+1} \to 0$ conforme $n \to \infty$ para la fórmula de Taylor centrada en $x = 0$:

(*a*) sen x $\{-\infty < x < \infty\}$	(*b*) e^x $\{-\infty < x < \infty\}$
(*c*) cos x $\{-\infty < x < \infty\}$	(*d*) log $(1+x)$ $\{-1 < x < 1\}$
(*e*) senh x $\{-\infty < x < \infty\}$	(*f*) cosh x $\{-\infty < x < \infty\}$

6. Si $n = 2$, aplicar la fórmula del Ejercicio A1(*i*) para calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

EJERCICIOS C

1. En el Ejercicio B4, si f tiene $n + k + 1$ derivadas en N, entonces $\psi(x)$ tiene $n + k + 1$ derivadas en N excepto en $x = 0$, donde tiene k derivadas.

2. Obtener los primeros términos de la fórmula de Taylor para f en el origen, si

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & x \neq 0 \\ e & x = 0. \end{cases}$$

3. Demostrar que, para una a pequeña, la ecuación sen $x = ax$ tiene una raíz cercana a π. Demostrar también que $\pi(1-a)$ y $\pi(1-a+a^2)$ son sucesivamente aproximaciones mejores para la raíz.

7.4 VALORES EXTREMOS

Hemos visto (Teorema 3.6a) que una condición necesaria para que una función derivable alcance un valor máximo o mínimo en un punto interior de un intervalo es que la primera derivada sea cero en el punto. Es evidente que este hecho no necesita cumplirse si la derivada deja de existir por lo menos en un punto del intervalo. Asimismo, no necesita cumplirse para un máximo o un mínimo que se alcanza en un punto extremo de un intervalo cerrado. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x$ en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ alcanza un máximo en 1 y un mínimo en 0, pero en ningún punto la derivada se hace cero.

En los ejercicios se considerarán algunos casos de valores extremos en los puntos extremos y en puntos interiores donde la derivada no es cero. Aquí se discutirán qué condiciones adicionales garantizarán que un punto en el cual la derivada es cero es un punto extremo de la función. Es decir, se darán las condiciones suficientes para distinguirlos entre los diversos tipos de puntos en los cuales la derivada se hace cero. Tal punto recibe el nombre de **punto crítico** de la función y se desea saber cuándo un punto crítico es un máximo, un mínimo o ninguno de los dos. Empezaremos por establecer un criterio aplicado en el cálculo elemental.

7.4a Teorema. Sea $f(x)$ derivable en un intervalo abierto J: $\{a<x<b\}$ y $f'(\beta) = 0$ para algún punto β en J, y supóngase que $f'(x) \geqslant 0$ para $x < \beta$ y $f'(x) \leqslant 0$ para $x > \beta$. Entonces

$$f(\beta) \geqslant f(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } J.$$

Y si $f'(x) > 0$ para $x < \beta$ y $f'(x) < (0)$ para $x > \beta$, entonces

$$f(\beta) > f(x) \qquad \text{para toda } x \neq \beta \text{ en } J.$$

Invirtiendo las desigualdades referentes a las derivadas, se tiene un mínimo débil o un mínimo estricto de acuerdo con que se tengan desigualdades débiles o estrictas.

Demostración. Considérese el caso de un máximo. Escójase cualquier x en J, $x \neq \beta$. Supóngase que $x < \beta$. Entonces, por el teorema del valor medio (3.6e), existe un punto α con $x < \alpha < \beta$ tal que

$$f(\beta) - f(x) = f'(\alpha)(\beta - x) \geqslant 0 \qquad \text{o bien} > 0$$

de acuerdo con que $f'(\alpha) \geqslant 0$ o bien > 0. Si $x > \beta$, entonces

$$f(\beta) - f(x) = f'(\alpha)(\beta - x) \geqslant 0 \qquad \text{o bien} > 0$$

de acuerdo con que $f'(\alpha) \leqslant 0$ o bien < 0. Evidentemente, el caso de un mínimo es semejante. ∎

Con base en este teorema se puede deducir la prueba usual de la segunda derivada para los puntos extremos. Sin embargo, la pasaremos por alto e iremos directamente hacia la prueba de la n-ésima derivada.

7.4b Teorema. Considérese que f tiene n derivadas continuas en un intervalo abierto J: $\{a < x < b\}$. Y supóngase que existe un punto β en J en el cual se tiene $f'(\beta) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(\beta) = 0$ y $f^{(n)}(\beta) \neq 0$. Entonces, si n es par, existe una vecindad N de β en la cual

$$f(\beta) > f(x) \text{ para toda } x \neq \beta \text{ en } N \qquad \text{si } f^{(n)}(\beta) < 0$$
$$f(\beta) < f(x) \text{ para toda } x \neq \beta \text{ en } N \qquad \text{si } f^{(n)}(\beta) > 0.$$

Si n es impar, no existe vecindad de β en la cual f logre un valor extremo en β.

Este teorema debe interpretarse, en relación con los puntos críticos, de la manera siguiente: Se localizan los puntos críticos β como soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ —desde luego que este problema no necesariamente es fácil— y habiendo localizado uno en β, digamos, se procede a examinar las derivadas superiores de f en β. Si la primera diferente de cero es de orden impar, no se tiene máximo ni mínimo; si es de orden par, entonces existe un máximo local en β si es negativa y un mínimo local si es positiva.

Demostración. Supuesto que $f^{(n)}(x)$ es continua y diferente de cero en β, existe una vecindad N de β en la cual no es cero y en la cual su signo es el mismo que el signo de $f^{(n)}(\beta)$. Ahora, sea x cualquier punto en N diferente de β. Entonces, de acuerdo con la fórmula de Taylor, se obtiene

$$f(x) = f(\beta) + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - \beta)^n,$$

donde z está entre β y x, y de aquí que se encuentra en N. Todos los términos intermedios se cancelan, ya que todas las derivadas hasta llegar a la de orden n se hacen cero en β.

Ahora podemos deducir la demostración de nuestro teorema a partir de esta fórmula, de la manera siguiente: Supóngase que n es impar. Entonces $f(x) - f(\beta)$ cambia de signo siempre que $(x - \beta)$ cambia de signo —es decir, cuando x cruza de un lado al otro de β—. De aquí que $f(x)-f(\beta)$ es positiva en un lado y negativa en el otro, o bien que $f(x)$ es mayor que $f(\beta)$ en un lado y menor en el otro. En qué forma sucede lo anterior —es decir, en cuál lado $f(x) > f(\beta)$— depende del signo de $f^{(n)}(z)$, y de aquí que depende del signo de $f^{(n)}(\beta)$.

Supóngase ahora que n es par. Esto implica que el signo de $(x - \beta)^n$ siempre es positivo y, por lo tanto, el signo de $f(x) - f(\beta)$ depende del signo de $f^{(n)}(z)$, y por tanto del de $f^{(n)}(\beta)$. En particular, $f(x) - f(\beta) > 0$ si $f^{(n)}(\beta) > 0$, y de aquí que se tiene un mínimo local. Y si $f^{(n)}(\beta) < 0$, se tiene un máximo local. ∎

El teorema se mantiene verdadero bajo la hipótesis más débil de que existen $(n - 1)$ derivadas en una vecindad de β y la n-ésima existe en β. Sin embargo, la demostración requiere un examen más cuidadoso de la situación (ver Ejercicio C1).

EJERCICIOS A

1. Localizar e investigar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ (b) $\frac{4}{x} - \frac{1}{x-1}$ (c) $\frac{x^4+4}{x^4+2}$

(d) $-\frac{1}{x} - \log x$ (e) $\operatorname{sen} x - \tan x$ (f) $\operatorname{sen} x^4$

(g) $e^{x^2} + e^{-x^2}$ (h) $\frac{x}{\log x}$ (i) $\frac{x^2}{\log x}$

(j) $x^n e^{-x^2}$ $(n > 0)$ (k) x^x (l) $x^{1/x}$

2. ¿Cuál es el área del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, con un lado del rectángulo a lo largo del diámetro del semicírculo?

3. Una taza con la forma de un cono circular recto con una abertura de 2θ y una

profundidad D se llena con un fluido. Dentro del cono se coloca cuidadosamente una bola de radio r. Encontrar r de tal manera que el volumen del fluido desplazado por la bola sea el mayor.

EJERCICIOS B

1. Localizar e identificar todos los puntos extremos de $\sqrt[75]{e^{(x^2-x)^{152}}}$.
2. Considérese que f es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y tiene derivadas laterales en todo punto. Sea $Rf'(x)$ la derivada lateral derecha y $Lf'(x)$ la derivada lateral izquierda. Demostrar que $Rf'(x) \leqslant 0$ y $Lf'(x) \geqslant 0$ en un máximo y que las desigualdades se invierten en un mínimo. Describir la situación en los puntos extremos a y b.
3. Sea $f(x)$ continua en una vecindad N de β. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que f adquiera un máximo en β es que

$$\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}\begin{cases}>0 & \text{si } h<0\\ <0 & \text{si } h>0,\end{cases}$$

y que para un mínimo las desigualdades para el cociente diferencia se invierten. En particular, demostrar que si $Rf'(\beta) = -\infty$ y $Lf'(\beta) = +\infty$, entonces f adquiere un máximo en β. (Ver Ejercicio 2 anterior para las definiciones de $Rf'(\beta)$ y $Lf'(\beta)$.

4. Aplicar el problema anterior para discutir los valores extremos de f y g en el origen, donde

$$f(x = \begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & x \neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases}e^{-1/x^2} & x \neq 0\\ 0 & x = 0.\end{cases}$$

EJERCICIO C

1. Probar el Teorema 7.4b, suponiendo que $f^{(n)}(x)$ solamente existe en β.

parte 2

CALCULO VECTORIAL

8

Vectores y curvas

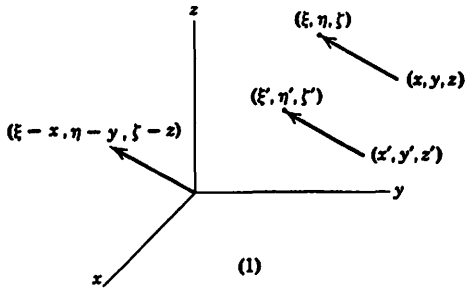
8.1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES

El concepto de vector es muy útil. Esta utilidad proviene de dos aspectos importantes de los vectores, a saber, que desarrollan un discernimiento altamente geométrico lo cual, por supuesto, es de desear, y que la notación vectorial permite escribir muchas fórmulas complicadas en una forma muy compacta. Esta economía en la notación viene acompañada de una mayor facilidad en el manejo de problemas difíciles.

Empezaremos con una descripción físico-geométrica de los vectores y algunas de sus propiedades más obvias y, posteriormente, nos encaminaremos hacia las definiciones precisas y las demostraciones. Físicamente, consideramos un vector como una «magnitud dirigida» y, geométricamente, como un «segmento dirigido». Los vectores se representan gráficamente mediante un segmento rectilíneo con una punta de flecha en un extremo, la cual apunta en la dirección del vector, mientras que la longitud del segmento representa su magnitud. La fuerza, dicen los físicos, tiene magnitud (kilogramos, por ejemplo) y dirección, y por lo tanto puede representarse como un vector.

Los desplazamientos son cantidades geométricas representadas mediante vectores. En efecto, en un sentido no técnico, la palabra vector significa «transportador». Así, geométricamente un vector es un desplazamiento que «transporta» un punto hacia otro. El desplazamiento desde el punto (x, y, z) hasta el punto (ξ, η, ζ) se representa por el segmento que une estos puntos con la punta de flecha en (ξ, η, ζ). La velocidad y la aceleración también son vectores, puesto que son la primera y segunda derivadas de un desplazamiento, respectivamente.

Se dice que un vector **a** y un vector **b** (se usarán «negritas» para denotar vectores) son iguales ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$) si tienen la misma magnitud y la misma dirección. Por tanto, el vector **a** desde (x, y, z) hasta (ξ, η, ζ) es igual al vector **b** desde (x', y', z') hasta (ξ', η', ζ') si $\xi - x = \xi' - x'$, $\eta - y = \eta' - y'$ y $\zeta - z = \zeta' - z'$, porque entonces tendrían la misma longitud y dirección.



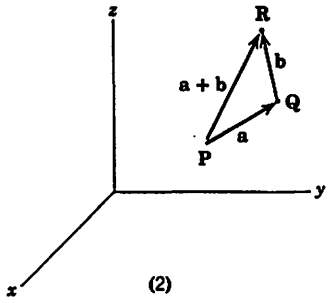
(1)

Esto nos permite considerar a todos los vectores como si emanaran del origen, si se desea; de hecho, también puede considerarse cualquier vector con el punto inicial qué se estime conveniente y con un punto terminal determinado por su longitud y dirección.

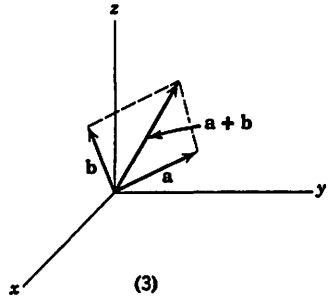
Si α es un número real y **a** es un vector desplazamiento, entonces $\alpha\mathbf{a}$ es el desplazamiento cuya magnitud es $|\alpha|$ veces la de **a** y está en la dirección de **a** si $\alpha > 0$, y en dirección opuesta a la de **a** si $\alpha < 0$. Se dice que $\alpha\mathbf{a}$ es un múltiplo **escalar** de **a**, dando el nombre de **escalares** a los números reales cuando se usan como multiplicadores de vectores.

La adición gráfica de vectores se sugiere por su interpretación como desplazamientos. Si **a** es un desplazamiento desde un punto **P** hasta un punto **Q**, y **b** es un segundo desplazamiento desde **Q** hasta **R**, entonces debe ser equivalente al desplazamiento desde **P** hasta **R**. Esto es equivalente a la regla del paralelogramo: si **a** y **b** tienen un punto inicial común, entonces **a** + **b** es la diagonal del paralelogramo determinado que tiene **a** y **b** como lados adyacentes.

Esta imagen geométrica de un vector nunca debe perderse de vista. Servirá como guía en la discusión más formal que sigue. La mayor parte de nuestra atención se enfocará hacia los vectores tridimensionales. Sin embargo, existe solamente un concepto que no se llevará hacia n dimensiones, donde n puede ser cualquier entero positivo. Ese concepto es el



(2)



(3)

de producto vectorial o producto cruz. Se formularán todas las definiciones, y teoremas para tres dimensiones y posteriormente se comentará acerca de las otras dimensiones. Pero deberá mantenerse en mente, conforme se estudia este capítulo, que el considerar 3 dimensiones solamente es esencial en la discusión de los productos vectoriales.

Una terna ordenada de números reales (a_1, a_2, a_3) recibirá el nombre de **vector a**, y el número a_n se llamará **n-ésima componente** de **a**. La colección de todas las ternas ordenadas con las reglas siguientes se llamará **espacio vectorial tridimensional.**

REGLAS. Si **a** es (a_1, a_2, a_3) y **b** es (b_1, b_2, b_3), entonces

(1) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ significa $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.
(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
(3) Si α es real, entonces $\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$.
(4) $-\mathbf{a}$ significa $(-1)\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$.
(5) $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$.

Las reglas 1, 2, 3 y 4 son las definiciones de la igualdad de vectores, de la adición vectorial, de la multiplicación de un vector por un escalar y del negativo de un vector, respectivamente. La regla 5 es para establecer una notación; introduce un símbolo especial para un vector especial.

Observemos que las siguientes propiedades se cumplen para nuestro espacio vectorial.

8.1a Teorema.

(i) La adición de vectores es conmutativa: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
(ii) La adición de vectores es asociativa: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
(iii) Existe un vector único **O** para el cual $\mathbf{a} + \mathbf{O} = \mathbf{a}$, para todo **a**.
(iv) Para cada **a** existe un vector único $-\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{O}$.

8.1b Teorema. Para todo escalar α y todo vector **a**, existe un vector llamado el producto de α y **a**, denotado por $\alpha\mathbf{a}$, con las siguientes propiedades:

(i) La multiplicación por escalares es distributiva:

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

(ii) La multiplicación de escalares por vectores es distributiva:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$$

(iii) La multiplicación es asociativa:

$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}).$$

(iv) $0\mathbf{a} = \mathbf{O}$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Las demostraciones de estos teoremas son sencillas. Por ejemplo, demostraremos la parte (i) del Teorema 8.1a, así:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b} &= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\\ &= (b_1+a_1, b_2+a_2, b_3+a_3)\\ &= \mathbf{b}+\mathbf{a}.\end{aligned}$$

La igualdad intermedia se basa en la propiedad conmutativa de los números reales; las otras dos igualdades se basan en la definición de la adición vectorial. Las demostraciones restantes son igualmente sencillas y se dejan para los problemas.

La razón para distinguir precisamente estas sencillas propiedades es ésta: el Teorema 8.1a dice que los vectores forman lo que se llama un **grupo Abeliano** bajo la adición y el Teorema 8.1b dice que forman un **espacio lineal** sobre el campo de los números reales. (Es posible que estos términos sean desconocidos para el estudiante, pero los aprenderá en otros cursos.)

Además, lo que es más importante para el estudio del presente capítulo, todo conjunto de objetos (esto es, objetos matemáticos) para los cuales la adición y la multiplicación escalar están definidas y satisfacen los Teoremas 8.1a y 8.1b recibe el nombre de **espacio vectorial.** Este es el punto de vista abstracto para el estudio de los espacios vectoriales. Se verá que algunas cosas sorprendentes resultan espacios vectoriales bajo esta definición.

Existen muchas formas para medir el tamaño de un vector. Por ejemplo, podría usarse el valor absoluto de la componente mayor. Esta medida del tamaño da origen al así llamado **espacio vectorial de Minkowski** (ver Ejercicio C1, Sección 8.3). Sin embargo, usaremos una medida más conocida de tamaño, a saber la **longitud Euclideana** de un vector **a**, denotada por $|\mathbf{a}|$ y definida por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Un vector de longitud 1 se llama **vector unitario.**

Con esta definición de longitud adjunta al conjunto de reglas referentes a los espacios vectoriales, el nuestro se transforma en un **espacio vectorial Euclideano tridimensional** y se denota por E_3.

8.1c Teorema. $\mathbf{a} = \mathbf{O}$ si y solamente si $|\mathbf{a}| = 0$.

Demostración. Si $\mathbf{a} = \mathbf{O}$, entonces

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

y así

$$|\mathbf{a}| = 0.$$

Inversamente, si $|\mathbf{a}| = 0$, entonces

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0.$$

En consecuencia,

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad \text{(¿por qué?)}$$

y así

$$\mathbf{a} = \mathbf{O}.$$

∎

Regresemos brevemente a la relación entre la geometría y los vectores. En ocasiones se denotarán las componentes de un vector por x, y y z, respectivamente. Por tanto, el punto (x, y, z) y el vector $\mathbf{P}$ con componentes x, y y z son realmente el mismo objeto, a saber la terna ordenada de números (x, y, z). La distinción entre los dos es, en gran parte, un intento. Usaremos la palabra «punto» cuando estemos interesados principalmente en describir una posición, y la palabra «vector» cuando la terna sea la adecuada para ser relacionada con uno u otro de los tipos de cálculos vectoriales cuya descripción es el objeto principal de este capítulo, aunque frecuentemente combinaremos estos dos puntos de vista. El vector $\mathbf{P} = (x, y, z)$ se llama **vector de posición** del punto $\mathbf{P} = (x, y, z)$.

De esta manera, «punto» y «vector» se usarán indistintamente, aunque generalmente la selección del término perjudique nuestro punto de vista, en el sentido descrito anteriormente. En particular, si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son puntos (es decir, vectores) con coordenadas (es decir, componentes) (x, y, z) y (ξ, η, ζ) respectivamente, entonces $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ es el vector $(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$ y puede imaginarse como el vector que une $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y apunta hacia $\mathbf{Q}$.

La notación vectorial frecuentemente simplifica las demostraciones de proposiciones geométricas elementales, como se ilustra a continuación.

EJEMPLO. Sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_4$ cuatro puntos en el espacio. Demostrar que los puntos medios de los segmentos $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_3$ a $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_4$ a $\mathbf{P}_1$ son los vértices de un paralelogramo.

Sean, respectivamente, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ y $\mathbf{Q}_4$ los puntos medios. Entonces puede verse (¿cómo?) que

$$\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)/2 \qquad \mathbf{Q}_2 = (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)/2$$
$$\mathbf{Q}_3 = (\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4)/2 \qquad \mathbf{Q}_4 = (\mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_1)/2.$$

Así, el vector de $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ está dado por

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)/2,$$

y el vector de $\mathbf{Q}_4$ a $\mathbf{Q}_3$ por

$$\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_4 = (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)/2.$$

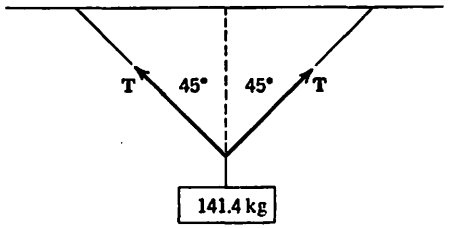
De aquí que los segmentos de $\mathbf{Q}_2$ a $\mathbf{Q}_1$ y de $\mathbf{Q}_3$ a $\mathbf{Q}_4$ son paralelos e iguales. Los otros dos lados son, en forma semejante, paralelos e iguales, de modo que la figura es un paralelogramo.

EJERCICIOS A

1. Encontrar un vector unitario en la dirección de cada uno de los siguientes:

   (*a*) (2, 4, −1) (*b*) (1, 1, 1) (*c*) (3, −1, 0)

2. Un peso de 141.4 kg se suspende como se muestra en la figura. Encontrar la tensión T. Aplicar la ley física de que las fuerzas se balancean en un estado de equilibrio.



3. Probar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto el cual las divide, respectivamente, en la razón 2:1.
4. Probar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan respectivamente.
5. Probar que las bisectrices de los ángulos de un triángulo se encuentran en un punto.
6. ¿Conduce la Regla 2 para la adición de vectores hacia la regla del paralelogramo?

EJERCICIOS B

1. Sea **a** un vector dado diferente de cero. Demostrar que el conjunto de vectores de la forma $\alpha\mathbf{a}$, donde α es un escalar, forma un espacio vectorial en el sentido de que satisface las conclusiones de los Teoremas 8.1a y 8.1b. Geométricamente, ¿qué representa este conjunto de vectores? (Este conjunto recibe el nombre de **subespacio unidimensional** de E_3.)
2. Sean **a** y **b** dos vectores diferentes de cero, ninguno de los cuales es un múltiplo escalar del otro. Demostrar que el conjunto de vectores de la forma $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, forma un espacio vectorial. ¿Qué representa geométricamente este conjunto de vectores? (Este conjunto se llama **subespacio bidimensional** de E_3.)

EJERCICIO C

1. Demostrar que el conjunto de funciones definidas en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ forma un espacio vectorial, donde los vectores individuales son funciones y los escalares son números reales.

8.2 MULTIPLICACIONES DE VECTORES

Ahora, es conveniente introducir tres vectores unidad importantísimos,

en términos de los cuales todo vector puede expresarse de una manera única. Se definen **i**, **j**, **k** por

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$
$$\mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

8.2a Teorema. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Inversamente, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Demostración. Es evidente que

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Leyendo estas ecuaciones hacia adelante se prueba la primera parte; leyéndolas hacia atrás se prueba la segunda parte. ∎

El primer tipo de producto de dos vectores que definimos es el **producto interno, escalar** o **punto.** Se denota por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y se define por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

8.2b Teorema. El producto interno satisface las siguientes reglas:

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (ley conmutativa).
(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (ley distributiva).
(iii) $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (ley asociativa).
(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

La demostración es trivial y se deja para los ejercicios. Nótese que los vectores especiales **i**, **j**, **k** satisfacen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

La magnitud de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ puede estimarse en términos de $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$. Este resultado se conoce como **desigualdad de Cauchy-Schwarz.**

8.2c Teorema. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, y la igualdad se cumple si, y solamente si, uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro.

Demostración. Si $\mathbf{a} = \mathbf{O}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{O}$, entonces ambos miembros de la desigualdad son 0 y se cumple la igualdad (y también uno es 0 veces el otro). De aquí que se suponga para el resto de la demostración que $\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$.

Para todos los números reales x, definamos la función q por

$$q(x) = |x\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2. \tag{1}$$

Entonces se obtiene

$$q(x) = (x\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (x\mathbf{a} + \mathbf{b}) = x^2|\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}x + |\mathbf{b}|^2.$$

Esta expresión se transforma, completando el cuadrado, en

$$q(x) = |\mathbf{a}|^2(x + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}|^2)^2 + [|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2]/|\mathbf{a}|^2. \tag{2}$$

Es evidente, a partir de (1), que $q(x) \geqslant 0$ y, de (2), que el valor mínimo de q es el último término en (2). De aquí que

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geqslant 0.$$

Transponiendo y extrayendo raíz, se obtiene

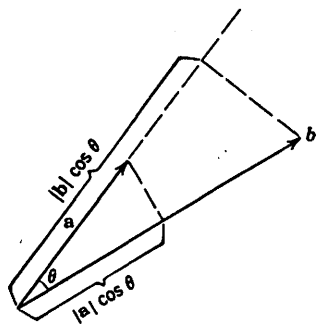
$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

Ahora bien, la igualdad se cumple si, y solamente si, el valor mínimo de q es cero. Por el teorema 8.1c, q puede ser cero si, y solamente si, existe un x_0 para el cual $x_0\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{O}$ — esto es, $\mathbf{b} = (-x_0)\mathbf{a}$. ∎

La desigualdad de Cauchy-Schwarz puede reescribirse

$$-1 \leqslant \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \leqslant 1.$$

Con base en esta expresión es evidente que existe un ángulo único θ en $\{0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ para el cual $\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. Se define este ángulo θ como **el ángulo entre a y b.** Ahora podemos interpretar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ geométricamente: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$ = la longitud de la proyección de **a** sobre **b** multiplicada por la longitud de **b**; o bien, alternativamente, $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$ = la longitud de la proyección de **b** sobre **a** multiplicada por la longitud de **a**, el signo es positivo o negativo de acuerdo con que $\theta > \pi/2$ o bien $\theta < \pi/2$. La proyección de **a** sobre **b** se llama la **componente** de **a** en la dirección de **b.**



Nótese que tiene sentido geométrico el definir θ como se hizo porque, por la ley del coseno,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta,$$

y mediante cálculos vectoriales,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

de donde se ve inmediatamente que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta.$$

De hecho, pudo haberse seguido este camino en primer término para probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sin embargo, preferimos usar una demostración algebraica la cual es independiente de la dimensión, aprovechando la geometría sólo como una interpretación.

Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, se concluye que uno de los dos vectores es cero o bien que $\theta = \pi/2$. En cualquiera de los dos casos se dice que los vectores son **ortogonales,** otra forma de decir «perpendicular». Si un conjunto de vectores tiene la propiedad de que todo par de vectores en él es ortogonal, entonces recibe el nombre de **conjunto ortogonal de vectores.**

8.2d Corolario. El conjunto **i, j, k** forma un conjunto ortogonal de vectores.

Demostración:

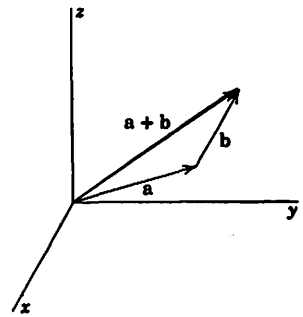
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

En forma semejante $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0.$ ∎

Partiendo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puede probarse otra desigualdad muy útil. Geométricamente, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el tercer lado de un triángulo cuyos otros dos lados son **a** y **b.** Por tanto, parece obvio que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

y que la igualdad debe cumplirse si el triángulo degenera en un segmento, con **a** o bien **b** como múltiplo no negativo del otro. Por razones obvias, este resultado se llama **desigualdad del triángulo.**



8.2e Teorema. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, y la igualdad se cumple si, y solamente si, uno de los vectores es un múltiplo no negativo del otro.

Demostración:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2\\ &< |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2\\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2.\end{aligned}$$

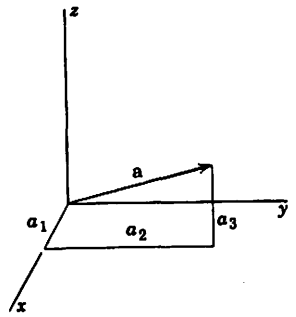
∎

Explicar cuidadosamente las desigualdades de la demostración; en particular, ¿cómo se cubre el caso de la igualdad? (Ver Ejercicio A4.)

Es evidente que la longitud de un vector no es menor que cualquiera de sus componentes: $|\mathbf{a}| \geqslant |a_m|$. Con base en la desigualdad del triángulo, puede demostrarse que su longitud no es mayor que la suma de los valores absolutos de sus componentes.

8.2f Corolario.

$$|\mathbf{a}| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$



Demostración. La demostración de este corolario se deja como un ejercicio (B6). ∎

Otro tipo de multiplicación de vectores es el **producto vectorial** o **producto cruz.** Se denota por $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ y se define por

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1),\\ &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},\end{aligned}$$

lo cual se ve fácilmente como el desarrollo de un determinante:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},$$

forma que es más fácil de recordar. Puesto que los elementos de un renglón de este determinante son vectores, tomamos como su definición el desarrollo dado por la fórmula precedente. Las conocidas reglas referentes a los determinantes deberán establecerse nuevamente, ya que consideran determinantes con elementos numéricos. En gran parte, este determinante se usa como un artificio nemotécnico y restringiremos nuestros cálculos a situaciones muy sencillas en las cuales el desarrollo haga notorio que su uso es válido.

A continuación estableceremos algunas propiedades elementales del producto vectorial.

8.2g Teorema.

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

(2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

(3) $\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

(4) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{O}$.

(4′) $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{O}$.

(5) $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

[Nótese que las permutaciones cíclicas de **i**, **j**, **k** llevan cualquier parte de (5) hacia las otras dos.]

Demostración. (1) Intercambiando las *aes* y las *bes* en cualquiera de las expresiones para $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ se cambia su signo.

$$\begin{aligned}(2)\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{i}&\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1+c_1 & b_3+c_3\end{vmatrix}\\ &+ \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1+c_1 & b_2+c_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

y todos los demás determinantes pueden descomponerse en forma semejante. Así, es evidente que pueden rearreglarse para formar $\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

(3) El escalar α entra simplemente como un factor común y puede factorizarse.

(4) Se ve fácilmente que en $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ se hacen cero. (4′) se deduce inmediatamente a partir de (4).

(5) Mediante el cálculo directo se obtiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{k}.$$

Las demás son igual de sencillas. ∎

Las cinco partes de este teorema constituyen las reglas operacionales de los productos vectoriales.

8.2h Corolario. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

Demostración. Formando el producto interno $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ se obtiene

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

El determinante es igual a cero puesto que tiene dos renglones idénticos. En forma semejante $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

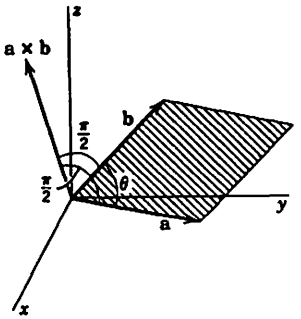
8.2i Teorema. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ sen θ, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 \\ &\quad + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\text{sen}^2\,\theta &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \end{aligned}$$



Desarrollando esta expresión se ve que es la misma que la obtenida al calcular $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$. ∎

Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular al plano de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, cuya magnitud es el área del paralelogramo con lados $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. También resulta que la dirección en la cual apunta puede determinarse por la llamada **regla de la mano derecha**, que a continuación se describirá.

Primero, supongamos que nuestro sistema coordenado es un sistema «dextrógiro», como en todas nuestras figuras. Esto puede imaginarse colocando los dedos medio, índice y pulgar de la mano derecha de manera que sean mutuamente perpendiculares. Si el dedo medio se apunta a lo largo del eje x y el pulgar a lo largo del eje y, entonces el dedo índice apunta a lo largo del eje z.

En un sistema coordenado de este tipo, la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es la siguiente. Empúñese suavemente la mano derecha con el pulgar salido. Si se curvan los dedos en la dirección de la rotación de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$ (en un ángulo menor que π), el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Una regla equivalente es que si los dedos medio y pulgar de la mano derecha se apuntan en la dirección de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente, entonces el dedo índice, sostenido perpendicularmente al plano de los dedos pulgar y medio, apuntará en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Supóngase que $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Entonces, mediante un cálculo sencillo se encuentra que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2\mathbf{k}$; es decir, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está en la dirección de $\mathbf{k}$ o de $-\mathbf{k}$, de acuerdo con que el signo de b_2 sea positivo o negativo. Así, se ve que las reglas se cumplen si $\mathbf{a}$ está en la dirección de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{b}$ está en el plano de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Para cualquier otra posición de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, argumentamos heurísticamente de la manera siguiente: Manteniendo fijo el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y fijas sus longitudes, giremos los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ continuamente hasta que $\mathbf{a}$ apunte en la dirección de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{b}$ quede en el plano de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que evidentemente es una función continua de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, debe moverse continuamente. Puesto que siempre es perpendicular al plano de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta, ya sea como lo prescriben nuestras reglas o en la dirección opuesta. Además, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ varía continuamente y nuestra regla describe su dirección en la posición final. Por continuidad, entonces, la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ debe estar dada siempre por esa regla.

8.3 LOS TRIPLES PRODUCTOS

El **triple producto escalar** de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, en ese orden, es $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. El paréntesis puede suprimirse, puesto que solamente existe un orden para el cual la multiplicación tiene sentido. Las propiedades elementales importantes del triple producto escalar se probarán en el siguiente teorema.

8.3a Teorema.

(i) $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(ii) Cualquier permutación cíclica de **a**, **b** y **c** deja invariante al triple producto:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(iii) El intercambio del producto interno y vectorial deja invariante al triple producto escalar.

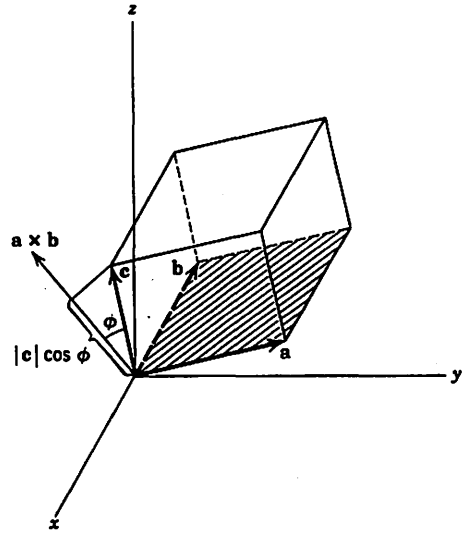
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

Demostración:

(i) Esta demostración es evidente a partir de la representación de $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ como determinante.

(ii) Este hecho se deduce de (i), ya que una permutación cíclica de los renglones de un determinante no cambia el valor del determinante.

(iii) De (ii), $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, basándose la última igualdad en la ley conmutativa para los productos internos. ∎



El triple producto escalar tiene un significado geométrico muy sencillo, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\pm$ el volumen del paralelepípedo con aristas **a**, **b** y **c**. Puede observarse este hecho de la siguiente manera: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es un vector cuya magnitud es el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**, y el cual es perpendicular al plano de ese paralelogramo. Entonces $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ es la proyección de **c** sobre $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, multiplicada por $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Así, si ϕ es el ángulo entre **c** y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ se tiene $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\cos\phi$. Pero $|\mathbf{c}|\cos\phi$ es la altura del paralelepípedo cuya base es el paralelogramo determinado por **a** y **b**. De donde $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\pm$ el volumen; se toma el signo positivo si $\phi<\pi/2$ y el negativo si $\phi>\pi/2$. Es decir, se escoge el signo positivo si **c** y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ apuntan hacia el mismo lado del plano de **a** y **b**; de otra forma se escoge el signo negativo.

Los **triples productos vectoriales** de **a**, **b** y **c**, en ese orden, son $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ y $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. Aquí los paréntesis son necesarios. Puesto que este es simplemente un producto vectorial iterado, sus propiedades están determinadas por el producto vectorial. Sin embargo, existe una fórmula muy útil para calcularlos, la cual deduciremos a continuación.

Es evidente que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ es un vector ortogonal a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ y de aquí que es un vector en el plano de **b** y **c**. Por lo tanto, debe poderse expresar como una combinación lineal (es decir, una suma de múltiplos) de **b** y **c**. En forma semejante, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ debe ser una combinación lineal de **a** y **b**. El teorema siguiente da las fórmulas precisas.

8.3b Teorema.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Demostración. Probaremos este teorema demostrando que las componentes de ambos miembros son las mismas. La primera componente de un vector está dada por el producto escalar de ese vector con **i**. Así se demostrará que

$$\mathbf{i}\cdot(\text{primer miembro})=\mathbf{i}\cdot(\text{segundo miembro}).$$

Ahora bien

$$\mathbf{i}\cdot[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$
$$=a_2(b_1c_2-b_2c_1)+a_3(b_1c_3-b_3c_1)$$
$$=b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_1$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{i}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{i}\cdot\mathbf{c})$$
$$=\mathbf{i}\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}].$$

La demostración para las demás componentes es semejante. Y la demostración de la segunda ecuación se deduce de la primera por la antisimetría del producto vectorial —es decir, dado que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. ∎

Ambas fórmulas pueden resumirse verbalmente mediante el siguiente artificio: Denótese el vector exterior al paréntesis como el «externo», el interior al paréntesis más cercano al externo como el «cercano», y el otro como el «lejano». Entonces ambas fórmulas se expresan por

triple producto vectorial =

$$= (\text{externo} \cdot \text{lejano})\ \text{cercano} - (\text{externo} \cdot \text{cercano})\ \text{lejano}.$$

EJERCICIOS A

1. Calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ y $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, y verificar que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ y que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ para los vectores a y b que se dan a continuación.
   (*a*) $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$; $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ (*b*) $\mathbf{a} = (5, 2, -1)$; $\mathbf{b} = (10, 4, -2)$
   (*c*) $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$; $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$ (*d*) $\mathbf{a} = (1, 4, 2)$; $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$
   En cada caso encontrar $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre a y b.
2. Haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcular las siguientes expresiones
   (*a*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (*b*) $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (*c*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
   (*d*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (*e*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$ (*f*) $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$
   (*g*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (*h*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (*i*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
   (*j*) $\mathbf{c} \times 2\mathbf{c}$
3. ¿Bajo qué condiciones será $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{O}$?
4. Explicar en detalle las desigualdades usadas para probar el Teorema 8.2e.
5. Calcular $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.
6. Demostrar que $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - \mathbf{k}$ forman un conjunto ortogonal.
7. Explicar geométricamente por qué $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ puede también expresarse como una combinación lineal (una suma de múltiplos) de a y b, y también de c y d. ¿Qué puede decirse acerca de la línea a lo largo de la cual se encuentra este vector?
8. Sean P, Q, R tres puntos en el espacio. Interpretar el significado geométrico de $(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{R})$.
9. Demostrar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)/2$
   y $= (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2)/4$.
10. Realizar la demostración para la componente j en el Teorema 8.3b.
11. Demostrar que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{O}$.
12. Escribir la desigualdad del triángulo en términos de las componentes.

EJERCICIOS B

1. Probar que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$.

2. Verificar que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ está en el plano de a y b y es ortogonal a a.
3. Sea á un vector diferente de cero. Demostrar que, para todo b
   $$\mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})/|\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2.$$
   Explicar el significado geométrico de cada término.
4. Obtener las dos fórmulas indicadas en A7.
5. ¿Cuándo se cumple que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$?
6. Probar que para sumas finitas de vectores
   $$|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \cdots| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + \cdots,$$
   y deducir la demostración del Corolario 8.2f

EJERCICIOS C

1. El espacio de Minkowski M_3 es un espacio vectorial tridimensional con una definición diferente de la magnitud vectorial. En lugar de tomar $|\mathbf{a}|$ como la longitud Euclideana se toma
   $$|\mathbf{a}| = \max\,[|a_1|, |a_2|, |a_3|],$$
   la cual se llamará **longitud de Minkowski** de a. Probar que la longitud de Minkowski satisface la desigualdad del triángulo: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.
2. Considerando C_0 como el espacio de funciones continuas en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ (ver Ejercicio C1, Sección 8.1), definir la norma de f por $\|f\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$.
   Probar la desigualdad del triángulo $\|f + g\| < \|f\| + \|g\|$.
3. Considerando C_1 como el espacio de funciones continuas en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$, definir $\|f\|$ por
   $$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$
   Probar la desigualdad del triángulo $\|f + g\| < \|f\| + \|g\|$.
4. Considerando C_2 como el espacio de funciones continuas en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ y denotando el producto interno de f y g por $(f, g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$, definir $\|f\|$ por
   $$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx} = \sqrt{(f, f)}.$$
   Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para C_2
   $$|(f, g)| \leqslant \|f\|\,\|g\|,$$
   y a partir de esta expresión deducir la desigualdad del triángulo
   $$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

8.4 INDEPENDENCIA LINEAL. BASES. ORIENTACION

Supóngase que se tiene un conjunto finito de vectores $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_n$. Entonces una suma
$$\alpha_1\mathbf{V}_1 + \alpha_2\mathbf{V}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{V}_n,$$

donde las α son escalares, se llama una **combinación lineal** de los **V**. Se dice que el conjunto de vectores es **linealmente independiente** si

$$\alpha_1\mathbf{V}_1 + \alpha_2\mathbf{V}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{V}_n = \mathbf{O} \tag{1}$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ —es decir, ninguna combinación lineal puede hacerse cero a menos que todos los coeficientes sean cero. De otra forma se dirá que es **linealmente dependiente.** En este caso existe un conjunto de α, no todas cero, para las cuales se cumple (1).

Para un conjunto de dos vectores, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, la dependencia lineal significa que existen un α_1 y un α_2, no ambos cero, para los cuales

$$\alpha_1\mathbf{V}_1 + \alpha_2\mathbf{V}_2 = \mathbf{O}.$$

Si, por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$\mathbf{V}_1 = -(\alpha_2/\alpha_1)\mathbf{V}_2.$$

Aquí la dependencia lineal significa que un vector es un múltiplo del otro. En este caso también se dice que los vectores son **colineales,** puesto que se encuentran en la misma línea que pasa por el origen. Por tanto, la colinealidad y la no colinealidad son equivalentes a la dependencia lineal y a la independencia lineal.

En forma semejante, si un conjunto de tres vectores es linealmente dependiente, puede despejarse a uno en términos de los otros dos, de modo que aquél se encuentra en el plano de estos dos. En este caso se dice que los vectores son **coplanares.** Si son linealmente independientes, se dice que son **no coplanares.** Geométricamente es evidente que cuatro vectores cualesquiera en un espacio de tres dimensiones deben ser linealmente dependientes. La demostración de esta conclusión se deja como ejercicio.

8.4a Teorema. Los vectores **i, j, k** forman un conjunto linealmente independiente.

Demostración. Supóngase que existen tres escalares α_1, α_2, α_3 de manera que

$$\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} = \mathbf{O}.$$

Entonces se deduce

$$\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{O} = (0, 0, 0),$$

y por la definición de igualdad de vectores se tiene

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \qquad \blacksquare$$

Si un conjunto de vectores satisface estas dos condiciones: (1) es linealmente independiente y (2) todo vector puede expresarse como una combinación lineal de sus vectores, entonces el conjunto se llama una **base.** Esto simplemente significa que, en cierto sentido, el conjunto contiene el menor número de vectores en términos de los cuales pueden expresarse los demás vectores.

8.4b Teorema. El conjunto **i, j, k** constituye una base en E_3.

Demostración. Esta proposición queda demostrada por el contenido de los Teoremas 8.2a y 8.4a. $\blacksquare$

Geométricamente es evidente que cualquier conjunto de tres vectores ortogonales (1) puede constituir con igual propiedad una base en E_3. Por simplicidad los tomaremos como vectores unitarios. Un conjunto de vectores unitarios se dice que es **normal** y un conjunto ortogonal de vectores unitarios es **ortonormal.**

8.4c Teorema. Sea **i′, j′, k′** un conjunto ortonormal de tres vectores en E_3. Entonces forman una base.

Demostración. Primero se observa que **i′, j′, k′** deben ser linealmente independientes (Ejercicio B7). Falta por demostrar que todo vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ puede expresarse en términos de **i′, j′, k′.** Para el efecto, es suficiente que puedan expresarse los vectores base **i, j, k** en términos de **i′, j′, k′** (¿por qué?). Demostraremos cómo puede expresarse **i** en esta forma.

Puesto que **i, j, k** forman una base (Teorema 8.4b), es posible expresar **i′, j′, k′** en términos de **i, j, k.** Sean

$$\mathbf{i}' = \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\mathbf{j}' = \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k} \tag{2}$$

$$\mathbf{k}' = \alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}. \tag{3}$$

Supóngase que fuera posible expresar **i** como una combinación lineal de **i′, j′, k′.** Entonces sea

$$\mathbf{i} = \beta_1\mathbf{i}' + \beta_2\mathbf{j}' + \beta_3\mathbf{k}'. \tag{4}$$

Calculando $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'$ de (1), se obtiene

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \alpha_{11};$$

y de (4),

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \beta_1.$$

De aquí que $\beta_1 = \alpha_{11}$.

En forma semejante, $\beta_2 = \alpha_{21}$, $\beta_3 = \alpha_{31}$.

De donde, si **i** tiene una representación (4), entonces (4) debe reducirse a

$$\mathbf{i} = \alpha_{11}\mathbf{i}' + \alpha_{21}\mathbf{j}' + \alpha_{31}\mathbf{k}'. \tag{5}$$

Ahora se demostrará que (5) es un resultado correcto. Para el efecto, sustitúyanse **i′, j′, k′** dados en (1), (2), (3) en (5) para obtener

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\mathbf{i}' + \alpha_{21}\mathbf{j}' + \alpha_{31}\mathbf{k}' &= \alpha_{11}(\alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k}) \\ &\quad + \alpha_{21}(\alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k}) + \alpha_{31}(\alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{i}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2) + \mathbf{j}(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32})\end{aligned}$$

$$+ \mathbf{k}(\alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{33})$$
$$= \mathbf{i}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}') + \mathbf{j}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}') + \mathbf{k}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}') = \mathbf{i},$$

basándose la última igualdad en la ortonormalidad de $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$.

Sea $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ una base ortonormal en E_3. Entonces $\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Pero, ya que es ortogonal tanto a $\mathbf{i}'$ como a $\mathbf{j}'$, debe ser paralelo a $\mathbf{k}'$, es decir, un múltiplo escalar de $\mathbf{k}'$. Ahora bien, ambos tienen longitud 1, de manera que debe tenerse

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{k}'$$

o bien

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = -\mathbf{k}'.$$

Se dice que la base está **orientada positivamente** o bien **negativamente** de acuerdo con que $\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = +\mathbf{k}'$ o bien $-\mathbf{k}'$. Esta afirmación también puede expresarse mediante el triple producto escalar: la base $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ está orientada positivamente o negativamente de acuerdo con que

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = +1$$

o bien

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = -1.$$

Puede extenderse el concepto de orientación para una terna linealmente independiente y arbitraria de vectores: una terna ordenada $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ de vectores está **orientada positivamente** o **negativamente** de acuerdo con que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} > 0$$

o bien

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} < 0.$$

En particular, nótese que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ forman una terna positiva, puesto que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2.$$

La orientación tiene un significado geométrico. Una terna positiva está orientada de manera que $\mathbf{c}$ apunta hacia el mismo lado del plano de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como el propio $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (¿por qué?) y, en consecuencia, el lado del plano hacia el cual apunta $\mathbf{c}$ puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha descrita anteriormente.

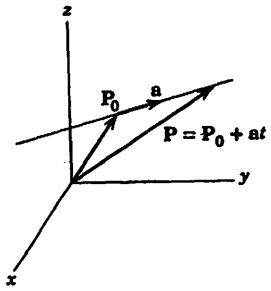
8.5 GEOMETRIA ANALITICA VECTORIAL

Muchas de las fórmulas de la geometría analítica pueden establecerse sucintamente en términos vectoriales. En esta sección se indicará breve e informalmente cómo puede hacerse en algunos casos sencillos, referentes a planos y rectas.

En la geometría analítica, una recta generalmente se especifica dando las ecuaciones de dos planos los cuales se intersectan a lo largo de la recta,

o bien se da en forma simétrica o paramétrica. Las ecuaciones paramétricas de una recta son de la forma

$$x = x_0 + a_1 t$$
$$y = y_0 + a_2 t$$
$$z = z_0 + a_3 t,$$



donde $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto sobre la recta y a_1, a_2, a_3 son sus números directores. Estas son las ecuaciones de las componentes de

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Esta ecuación se llamará **ecuación vectorial** de la recta. Si $|\mathbf{a}| = 1$, entonces t es la distancia del punto $\mathbf{P}$, a lo largo de la recta, desde $\mathbf{P}_0$, medida positivamente en la dirección de $\mathbf{a}$ y negativamente en la dirección de $-\mathbf{a}$ (¿por qué?).

Si las ecuaciones se dan en la forma simétrica, a saber

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_2},$$

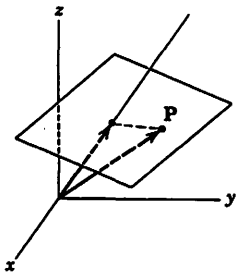
puede hacerse el valor común de estas razones igual a t y reducirse a la forma paramétrica.

Finalmente, si la recta está determinada dando dos planos que pasan por ella, existen ciertas formas usuales, aprendidas por el estudiante en la geometría analítica, para reducirlos a los planos de proyección y, a continuación, obtener la forma simétrica.

Un plano en la forma $a_1x + a_2y + a_3z = d$ es evidente que puede escribirse

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = d.$$

Así, la proyección de $\mathbf{P}$ sobre $\mathbf{a}$ es una constante, de manera que, evidentemente, $\mathbf{a}$ es el vector normal al plano. Si $\mathbf{a}$ se normaliza para tener lon-



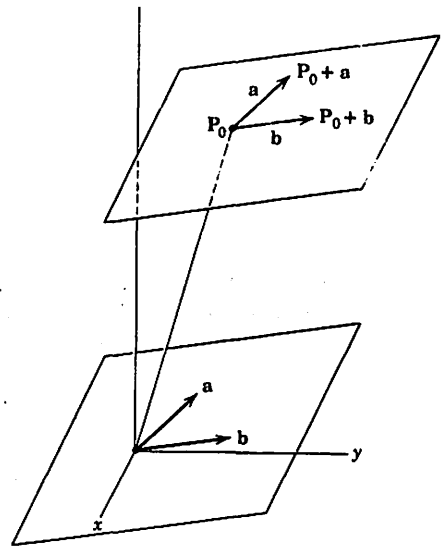
gitud uno, entonces $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{P}$ sobre $\mathbf{a}$. En este caso $d = \pm$ la distancia perpendicular del origen al plano. Geométricamente, ¿qué determina el signo de d? [Ver Ejercicio A5 (e).]

El plano determinado por dos vectores, es decir, el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son no colineales, puede escribirse como

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

(ver Ejercicio C2). Otro plano que pasa por un punto $\mathbf{P}_0$ y paralelo al otro puede escribirse

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$



8.6 ESPACIOS VECTORIALES DE OTRAS DIMENSIONES: E_n

La teoría del espacio vectorial Euclideano bidimensional E_2 se obtiene a partir de la teoría para E_3 simplemente al suprimir la tercera componente. Así, los vectores en E_2 son parejas ordenadas (a_1, a_2) o bien números reales. Estos pueden representarse en la forma $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, donde $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$. De aquí que toda el álgebra vectorial que no pertenece al producto cruz se traslada inmediatamente.

Los espacios de dimensiones superiores son, tal vez, más difíciles de imaginar, pero el formalismo es casi idéntico al de E_3. El espacio vectorial Euclideano tetradimensional E_4 es la colección de todas las ordenadas cuádruples de números reales (a_1, a_2, a_3, a_4). Las reglas dadas para E_3 en la página 173 pueden establecerse otra vez para E_4, agregando simplemente una componente extra en el paréntesis, y la longitud de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ está dada por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.$$

En general, el espacio vectorial Euclideano n-dimensional es la colección de todas las n-adas ordenadas de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen nuestras reglas y para las cuales la longitud de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ está dada por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ dados por

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

constituyen una base en términos de la cual pueden expresarse todos los vectores en E_n.

El producto interno está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_1^n a_mb_m.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, se cumple, porque la demostración fue independiente de la dimensión. En términos de sumas, esta desigualdad se transforma en

$$\left|\sum_1^n a_mb_m\right| < \sqrt{\sum_1^n a_m^2}\sqrt{\sum_1^n b_m^2}.$$

El ángulo θ cntre a y b se define por $\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, y los dos vectores son ortogonales si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ —es decir, si $\mathbf{a}$ o bien $\mathbf{b} = \mathbf{O}$, o si $\theta = \pi/2$. La desigualdad del triángulo, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, también se cumple, dado que en la demostración tampoco intervino la dimensión.

Pero, tampoco el producto cruz se traslada. Todas las demás partes del álgebra vectorial se considerarán como si se hubieran probado para E_n

y no vacilaremos en aplicar cualquiera, o todos nuestros resultados que no estén relacionados con los productos vectoriales, para los espacios vectoriales de dimensión arbitraria.

EJERCICIOS A

1. ¿Qué conjuntos se describen mediante las siguientes expresiones?
   (*a*) $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < c$ (*b*) $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = c$
   (*c*) $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| > c$ (*d*) $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| + |\mathbf{P} - \mathbf{P}_1| = c$
   (*e*) $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| - |\mathbf{P} - \mathbf{P}_1| = c$
2. Escribir una ecuación vectorial para la recta que pasa por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.
3. Escribir una ecuación vectorial para la recta que pasa por $\mathbf{P}_1$ y es perpendicular al plano de $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$.
4. Escribir la ecuación escalar del plano que pasa por $\mathbf{P}_0 = (1, 2, -1)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{a} = (5, 2, -2)$.
5. Considérese un plano dado en la forma $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = d$:
   (*a*) ¿Cuál es el significado geométrico de $d/|\mathbf{a}|$?
   (*b*) ¿Cuál es el significado geométrico de $\mathbf{P}_0 = d\mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2$?
   (*c*) Si $\mathbf{P}$ es un punto en el plano ¿qué son los vectores $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$?
   (*d*) Si $\mathbf{P}$ es un punto en el plano, calcular $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{a}$.
   (*e*) Determinar las condiciones bajo las cuales $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ estarán en lados opuestos del plano.
6. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots, \mathbf{e}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en E_n. Demostrar que ninguno de ellos es cero.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que cuatro vectores cualesquiera en E_3 forman un conjunto linealmente dependiente. Demostrar que, en general, $n + 1$ vectores cualesquiera en E_n forman un conjunto linealmente dependiente.
2. Dados $\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ y $\mathbf{c}$, ¿cuál es el lugar geométrico de todos los puntos $\mathbf{P}$ para los cuales $\mathbf{a} \times \mathbf{P} = \mathbf{c}$?
3. ¿Puede definirse un procedimiento de división que complemente a la multiplicación vectorial? Es decir, dados $\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ y $\mathbf{c}$ ¿puede encontrarse un $\mathbf{b}$ único tal que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$?
4. Demostrar que los vectores $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ forman una base en E_3. Dar una fórmula que exprese cualquier vector $\mathbf{a}$ en términos de estos vectores.
5. Sea $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ una base ortonormal. Demostrar que si

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{k}',$$

entonces

$$\mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{i}'$$
$$\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{j}';$$

pero si

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = -\mathbf{k}',$$

entonces

$$\mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = -\mathbf{i}'$$
$$\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = -\mathbf{j}'.$$

6. Sean $\mathbf{a} = a_1'\mathbf{i}' + a_2'\mathbf{j}' + a_3'\mathbf{k}'$, $\mathbf{b} = b_1'\mathbf{i}' + b_2'\mathbf{j}' + b_3'\mathbf{k}'$. Demostrar que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3'$$

y

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix}$$

donde el signo está dado por la orientación de $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$.

7. Demostrar que todo conjunto ortogonal en E_n que no contiene a $\mathbf{O}$ es linealmente independiente.
8. Sea $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ una base ortonormal en E_3, considérese que estos vectores están expresados en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ por las ecuaciones (1), (2), (3) de la Sección 8.4. Demostrar que

$$\mathbf{i} = \alpha_{11}\mathbf{i}' + \alpha_{21}\mathbf{j}' + \alpha_{31}\mathbf{k}'$$
$$\mathbf{j} = \alpha_{12}\mathbf{i}' + \alpha_{22}\mathbf{j}' + \alpha_{31}\mathbf{k}'$$
$$\mathbf{k} = \alpha_{13}\mathbf{i}' + \alpha_{23}\mathbf{j}' + \alpha_{33}\mathbf{k}'.$$

9. Demostrar que el determinante de las α en el Ejercicio B8 es $+1$ o bien -1, de acuerdo con que $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ sea una terna orientada positivamente o negativamente. También demostrar que

$$\sum_n \alpha_{mn}^2 = 1 \qquad \sum_m \alpha_{mn}\alpha_{mp} = 0 \qquad \text{si } n \neq p$$
$$\sum_m \alpha_{mn}^2 = 1 \qquad \sum_n \alpha_{mn}\alpha_{pn} = 0 \qquad \text{si } m \neq p.$$

10. Sea $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y también $\mathbf{a} = a_1'\mathbf{i}' + a_2'\mathbf{j}' + a_3'\mathbf{k}'$. Demostrar que

$$a_1' = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3 \quad \text{y} \quad a_1 = \alpha_{11}a_1' + \alpha_{21}a_2' + \alpha_{31}a_3'$$
$$a_2' = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3 \qquad a_2 = \alpha_{12}a_1' + \alpha_{22}a_2' + \alpha_{32}a_3'$$
$$a_3' = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 \qquad a_3 = \alpha_{13}a_1' + \alpha_{23}a_2' + \alpha_{33}a_3'.$$

EJERCICIOS C

1. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tres vectores linealmente independientes en E_n. Definir $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ por

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$
$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}'}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}'}{|\mathbf{b}'|^2}\mathbf{b}',$$

y demostrar que el conjunto $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ es ortogonal. Este procedimiento para construir un conjunto ortogonal se llama **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**. Demostrar posteriormente que $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ definidos por

$$\mathbf{i}' = \mathbf{a}'/|\mathbf{a}'|$$
$$\mathbf{j}' = \mathbf{b}'/|\mathbf{b}'|$$
$$\mathbf{k}' = \mathbf{c}'/|\mathbf{c}'|$$

es un conjunto ortonormal y de aquí concluir que tres vectores cualesquiera linealmente independientes en E_3 forman una base.

2. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que **a**, **b**, **c** sean coplanares es que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$. Aplicar el resultado obtenido en el ejercicio C1 anterior.

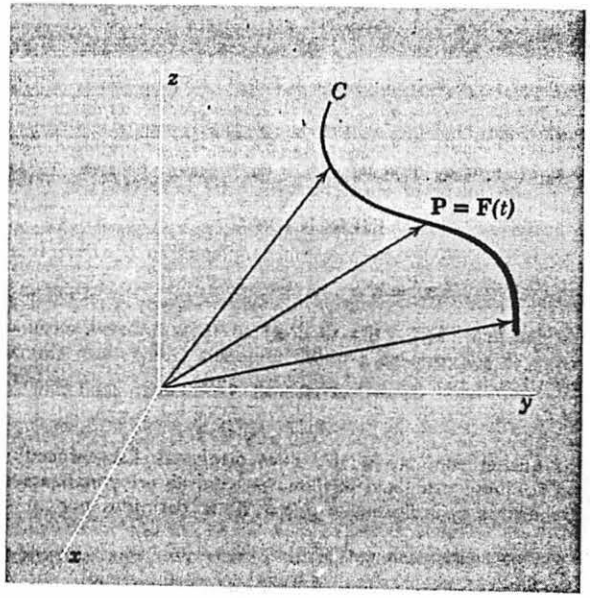
8.7 FUNCIONES VECTORIALES. CURVAS

Si a cada número real t en algún dominio —digamos un intervalo $I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$— se le asocia un vector **P** en E_3 (o bien E_n), el conjunto de parejas ordenadas $(t, \mathbf{P})$, donde t está en I y **P** es el vector correspondiente, se llama **función vectorial** en I. Se denota por **F** y está dada simbólicamente por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad \{a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{1}$$

El punto **P** correspondiente a t recibe el nombre de **valor** de **F** en t, y el conjunto de puntos **P** en E_3, los cuales son valores de **F** para algún t en I, se llama **rango** de **F**. Se dirá que **F** es continua en t_0 en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, t_0)$ tal que $|\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)| < \epsilon$ para todo t en I para el cual $|t - t_0| < \delta$.

Especificar un vector para cada t significa especificar tres números reales para cada t, a saber las componentes del vector. Por tanto, la ecuación (1) es equivalente a especificar cada componente como una función de t



$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t). \tag{2}$$

El estudiante debe convencerse por sí mismo que requerir que **F** sea continua en un punto t_0 es requerir que las tres funciones f, g y h sean continuas en t_0. (Ver Ejercicio B1. Aplicar el Corolario 8.2f.)

Si **F** es continua en I, se dará el nombre de **curva** al rango de **F**, **parámetro de la curva** a t e **intervalo del parámetro** a I. Seguramente el estudiante habrá reconocido las ecuaciones (2) como la forma paramétrica usual de las ecuaciones de una curva.

Ahora bien, una curva puede ser un conjunto muy complicado, de hecho, existen curvas que llenan un cubo. Tal curva recibe el nombre de **curva llena-espacio** o **curva de Peano.** (Sí, el mismo Peano cuyo nombre se asoció con los axiomas para los números naturales.)

Para referencia, a continuación se establecerán algunas definiciones.

Una **curva cerrada** es una curva dada por (1) con la propiedad de que $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(b)$; esto es, el punto terminal sobre la curva coincide con el punto inicial.

Un **arco simple** (o bien, una **curva simple sencilla no cerrada**) es una curva dada por (1) con la propiedad de que $\mathbf{F}(t_1) = \mathbf{F}(t_2)$ implica $t_1 = t_2$; es decir, la curva no se «cruza» a sí misma, ni siquiera se «toca».

Una **curva cerrada simple** o **curva de Jordan** es una curva cerrada con la propiedad de que $\mathbf{F}(t_1) = \mathbf{F}(t_2)$ implica que (1) $t_1 = t_2$ o bien (2) $t_1 = a$ y $t_2 = b$ (o puede ser en sentido contrario: $t_2 = a$ y $t_1 = b$). Una circunferencia es el ejemplo más sencillo de una curva de Jordan:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

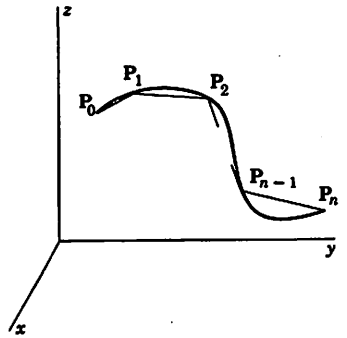
8.8 CURVAS RECTIFICABLES Y LONGITUD DE ARCO

Sea f una función real definida en un intervalo $I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$ y sea Δ una partición de I:

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Entonces, si las sumas

$$\sum_{\Delta} |f(t_m) - f(t_{m-1})| \tag{1}$$



son todas acotadas se dirá que f tiene **variación acotada** sobre I. La **variación** de f sobre I se define como el suprémum de los valores de las sumas tomados sobre todas las particiones de I:

$$V_f = \sup \sum_{\Delta} |f(t_k) - f(t_{k-1})|. \tag{2}$$

Puede hacerse una definición semejante en el caso de una función vectorial. Sin embargo, en relación con las funciones vectoriales continuas (es decir, con curvas) esta definición tiene un significado geométrico muy importante, como se verá a continuación.

Sea C una curva dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad \{a \leqslant t \leqslant b\},$$

y sea Δ una partición del intervalo del parámetro:

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Sean los puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots \mathbf{P}_n$ dados por

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{F}(t_m) \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

La suma análoga a la suma (1) es

$$L_\Delta = \sum_{\Delta} |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})| = \sum_{\Delta} |\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{m-1}|, \tag{1'}$$

y de la última forma se ve que esta suma es la longitud de la «línea quebrada» o «línea poligonal» inscrita en C y dirigida de un $\mathbf{P}_m$ al siguiente. Esta suma, en cierta forma, debe ser una aproximación a la longitud de la curva. De hecho, estamos usando este acercamiento para definir la longitud de la curva. Si los números L_Δ, definidos por (1') están acotados para todas las particiones Δ, entonces se dice que la curva C es **rectificable** y que la **longitud** de la curva está dada por

$$L_C = \sup L_\Delta = \sup \sum_{\Delta} |\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{m-1}|. \tag{2'}$$

Si los números L_Δ no están acotados, se dice que la curva **no es rectificable** o que no tiene longitud de arco.

Ahora es evidente que existe una íntima relación entre la rectificabilidad y la variación acotada, como se demostrará en el siguiente teorema.

8.8a Teorema. Sea C una curva dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad I: \{a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Una condición necesaria y suficiente para que C sea rectificable es que f, g y h tengan variación acotada.

Demostración. Necesidad. Supóngase que C es rectificable y que L_C, dado por (2'), existe. Sea Δ cualquier partición de I. Entonces

$$|f(t_m) - f(t_{m-1})| \leqslant |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})|,$$

dado que un vector tiene una longitud mayor que cualquiera de sus componentes. Por tanto,

$$\sum_{\Delta} |f(t_m) - f(t_{m-1})| \leqslant \sum_{\Delta} |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})| < L_C.$$

De aquí que f tiene variación acotada, así como también g y h, por el mismo argumento.

Suficiencia. Supóngase que f, g y h tienen variación acotada. Esto significa que V_f, tal y como se definió en (2), existe; así como también V_g y V_h. Entonces, por el Corolario 8.2f,

$$|\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})| < |f(t_m) - f(t_{m-1})| + |g(t_m) - g(t_{m-1})| + |h(t_m) - h(t_{m-1})|.$$

Sumando sobre Δ y aplicando (2), se obtiene

$$\sum_{\Delta} |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})| < V_f + V_g + V_h. \quad \blacksquare$$

Ahora bien, es de esperar que si se corta una curva rectificable en un punto, entonces las dos secciones deben ser rectificables y la longitud total debe ser la suma de las longitudes de las dos secciones. En verdad, este es el caso.

8.8b Teorema. Sea C una curva rectificable dada por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(t)$, $I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$. Sea c un punto intermedio en I y denótese por C_1 y C_2 las dos curvas dadas respectivamente por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad I_1: \{a \leqslant t \leqslant c\}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad I_2: \{c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Entonces tanto C_1 como C_2 son rectificables y

$$L_C = L_{C1} + L_{C2}.$$

Demostración. Sean Δ_1 y Δ_2 particiones de I_1 y I_2, respectivamente. Juntas forman una partición Δ de I. Así,

(3) $$L_{\Delta_1} + L_{\Delta_2} = L_\Delta \leq L_C,$$

de modo que

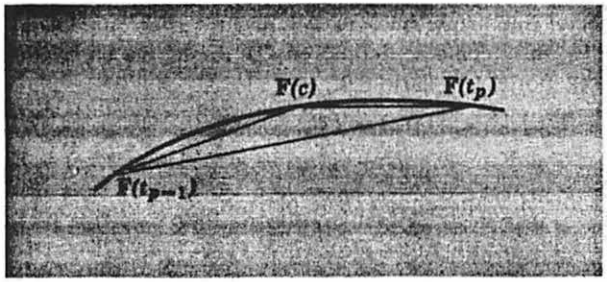
$$L_{\Delta_1} \leq L_C - L_{\Delta_2}.$$

Si se mantiene Δ_2 fija, se ve que el conjunto de números $L_{\Delta 1}$ es acotado de manera que C_1 es rectificable. Intercambiando Δ_1 y Δ_2 se ve, mediante el mismo argumento, que C_2 es rectificable. Entonces, puesto que se cumple (3) para todas las particiones Δ_1 y Δ_2, inmediatamente se tiene

(4) $$L_{C1} + L_{C2} \leqslant L_C.$$

Para obtener la desigualdad inversa de (4), sea Δ cualquier partición de I. El punto intermedio c caerá en algún intervalo t, digamos t_p y t_{p-1}. Entonces, introduciendo c como un punto adicional de partición, se tiene por la desigualdad del triángulo

(5) $$|\mathbf{F}(t_p) - \mathbf{F}(t_{p-1})| \leq |\mathbf{F}(t_p) - \mathbf{F}(c)| + |\mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(t_{p-1})|.$$



Esto también crea particiones Δ_1 de I_1 y Δ_2 de I_2 por el cual se tiene, por (5)

$$L_\Delta \leq L_{\Delta_1} + L_{\Delta_2} \leq L_{C_1} + L_{C_2}.$$

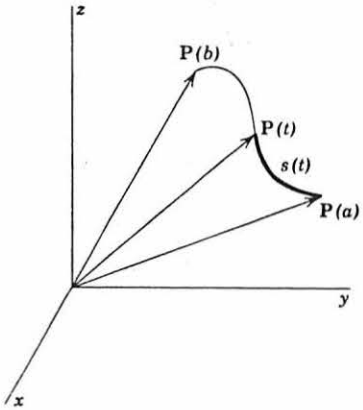
A partir de esta expresión es evidente que

(6) $$L_C \leqslant L_{C1} + L_{C2}.$$

Entonces (4) y (6) juntas completan la demostración. ∎

8.9 CURVAS DIFERENCIABLES

Mucho puede demostrarse acerca de la longitud de arco sin otra hipótesis más que la rectificabilidad —por ejemplo, que la longitud de arco es una función continua del parámetro de la curva, t, y que una curva siempre puede reparametrizarse de manera que la longitud de arco $s(t)$ (longitud sobre el intervalo desde a hasta t) sea una función de t estrictamente creciente. Esto significa que t puede expresarse en términos de s, de manera que la longitud de arco siempre puede introducirse como un parámetro de la curva en una curva rectificable. La demostración de estos hechos



sería un poco largo, sin embargo, ahora volveremos nuestra atención hacia las curvas diferenciables. Se establecerán éstas y otras propiedades para tales curvas.

Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial definida en $I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$. Se dirá que $\mathbf{F}$ es **diferenciable** en un punto t_0 en I si

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)}{h} = \mathbf{F}'(t_0)$$

existe. El valor de este límite, cuando existe, se llamará **derivada** de $\mathbf{F}$ en t_0. $\mathbf{F}$ es diferenciable en I si es diferenciable en todo punto en I, por supuesto que las derivadas en los extremos son derivadas laterales.

8.9a Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una función vectorial $\mathbf{F} = (f, g, h)$ sea diferenciable es que f, g y h sean diferenciables.

Demostración. Necesidad. Sea $\mathbf{F}'(t_0) = \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)}{h} - \mathbf{a}\right| > \left|\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - a_1\right|.$$

Conforme $h \to 0$, el primer miembro tiende hacia cero. De aquí que también el segundo miembro debe tender hacia cero y se concluye que

$$f'(t_0) = a_1.$$

De manera semejante,

$$g'(t_0) = a_2$$
$$h'(t_0) = a_3.$$

Suficiencia. Supóngase que $f'(t_0) = a_1$, $g'(t_0) = a_2$ y $h'(t_0) = a_3$. Definir $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y estimar

$$\left|\frac{\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)}{h} - \mathbf{a}\right|.$$

Por el Corolario 8.2f, se ve que $\mathbf{F}$ es diferenciable en t_0 y que

$$\mathbf{F}'(t_0) = \mathbf{a}. \qquad \blacksquare$$

La analogía entre nuestras discusiones de longitud de arco e integración debe ser evidente. A continuación se demostrará que si C está dada

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$$

donde $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable en I, entonces su longitud de arco está dada por una integral.

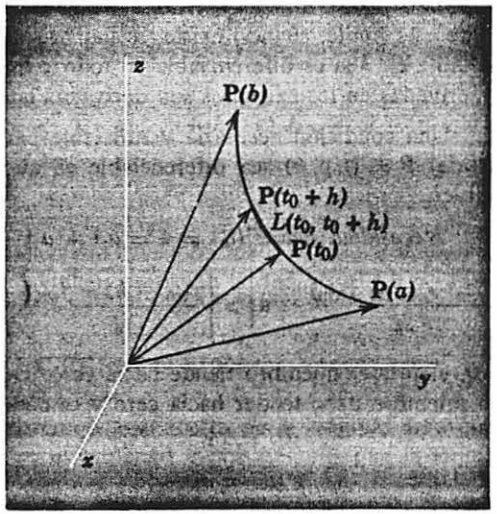
8.9b Teorema. Sea C dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \qquad I: \{a \leqslant t \leqslant b\},$$

donde $\mathbf{F}$ es diferenciable en I y $\mathbf{F}'$ es continua en I. Entonces

$$L_C = \int_a^b |\mathbf{F}'(t)|\, dt.$$

Demostración. Considérese que $s(t_0)$ representa la longitud de arco



sobre esa parte de C definida por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(t)$, $\{a \leqslant t \leqslant t_0\}$. Entonces, debido a la aditividad de la longitud de arco (Teorema 8.8b),

$$s(t_0 + h) - s(t_0) = L(t_0,\ t_0 + h)$$

donde $L(t_0,\ t_0 + h)$ es la longitud del segmento de C entre t_0 y $t_0 + h$.

Procederemos a estimar esta longitud desde arriba y desde abajo. Primero el lado fácil:

$$L(t_0,\ t_0 + h) \geqslant |\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)| = h\left|\left[\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)\right]/h\right|.$$

Por lo tanto, dado que $L(t_0,\ t_0 + h) = s(t_0 + h) - s(t_0)$,

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \geqslant \left|\left[\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)\right]/h\right|. \tag{7}$$

Para estimar desde arriba, sea Δ una partición del intervalo desde t_0 hasta $t_0 + h$. Entonces

$$\sum_{\Delta} |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})|$$
$$= \sum_{\Delta} \sqrt{[f(t_m) - f(t_{m-1})]^2 + [g(t_m) - g(t_{m-1})]^2 + [h(t_m) - h(t_{m-1})]^2}$$

Por el teorema del valor medio, esta expresión puede escribirse en la forma

$$\sum_{\Delta} \sqrt{f'^2(\xi_m) + g'^2(\eta_m) + h'^2(\zeta_m)} \qquad (t_m - t_{m-1}),$$

donde ξ_m, η_m, ζ_m todos están en $\{t_{m-1} \leqslant t \leqslant t_m\}$.

Ahora bien, f', g', h' son continuas; de aquí que existe un punto ξ entre t_0 y $t_0 + h$ en el cual f'^2 alcanza su máximo para ese intervalo, un punto η en el cual g'^2 alcanza su máximo y un punto ζ en el cual h'^2 alcanza su máximo. Entonces, estimando la última expresión, se obtiene

$$\sum_{\Delta} |\mathbf{F}(t_m) - \mathbf{F}(t_{m-1})| \leqslant \sqrt{f'^2(\xi) + g'^2(\eta) + h'^2(\zeta)} \sum_{\Delta} (t_m - t_{m-1})$$
$$= \sqrt{f'^2(\xi) + g'^2(\eta) + h'^2(\zeta)}\, h$$

Ahora, la suma de la izquierda es una suma de aproximación para $L(t_0,\ t_0 + h)$; de aquí que el segundo miembro constituye una cota superior para todas esas sumas. Por tanto, se obtiene

$$s(t_0 + h) - s(t) = L(t_0,\ t_0 + h) \leqslant \sqrt{f'^2(\xi) + g'^2(\eta) + h'^2(\zeta)}\, h. \tag{8}$$

De (7) y (8) se obtiene

$$\left|\left[\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)\right]/h\right| \leqslant [s(t_0 + h) - s(t_0)]/h$$
$$\leqslant \sqrt{f'^2(\xi) + g'^2(\eta) + h'^2(\zeta)}.$$

Conforme $h \to 0$, se tiene que ξ, η, ζ cada uno tiende hacia t_0. De donde, ambos miembros de esta desigualdad se transforman en $|\mathbf{F}'(t_0)|$, de modo que finalmente se ve que

$$s'(t_0) = |\mathbf{F}'(t_0)| = \sqrt{f'^2(t_0) + g'^2(t_0) + h'^2(t_0)}$$

para todo t_0 en $I: \{a \leqslant t \leqslant b\}$. Pero, por hipótesis, $|\mathbf{F}'(t)|$, es una función continua y, por lo tanto, una función integrable sobre I. Entonces, por el Teorema 4.5b,

$$s(b) - s(a) = L_C = \int_a^b |\mathbf{F}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt. \quad \blacksquare$$

De paso, comentemos otra forma de demostrar este último teorema. Podría haberse definido L_C por $L_C = \lim_{\|\Delta\| \to 0} L_\Delta$. En efecto, puede probarse que esta definición es equivalente a la que se dio, pero hacerlo sería casi tan difícil, aplicando en gran parte el mismo tipo de argumento, como probar que una integral es el límite de una suma de Riemann.

Definiendo en esta forma la longitud de arco, se observa que las aproximaciones L son de forma muy semejante a la de las sumas de Riemann. Son tan semejantes que pueden llevarse a esa forma con un error que tiende hacia cero conforme $\|\Delta\| \to 0$.

Ahora sería conveniente tener a la longitud de arco como un parámetro de la curva. Así, empecemos por dar las condiciones bajo las cuales podemos hacerlo. Como se indicó anteriormente, esto siempre es posible para las curvas rectificables, pero dar la demostración únicamente sobre la hipótesis de la rectificabilidad está un poco más allá del alcance de este libro.

8.9c Teorema. Sea C una curva descrita por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad I: \{a < t < b\},$$

donde $\mathbf{F}'(t)$ es continua y nunca se hace cero. Entonces la longitud de arco puede introducirse como un parámetro de la curva y $|d\mathbf{F}/ds| = 1$.

Demostración. Por el Teorema 8.9b, se tiene $s'(t) = |\mathbf{F}'(t)| > 0$. Así, $s(t)$ es monótona estrictamente creciente y continua. Por tanto, tiene una función inversa única $t(s)$ donde $t'(s)$ existe y es positiva en $\{0 \leqslant s \leqslant L_C\}$. De donde C está dada por

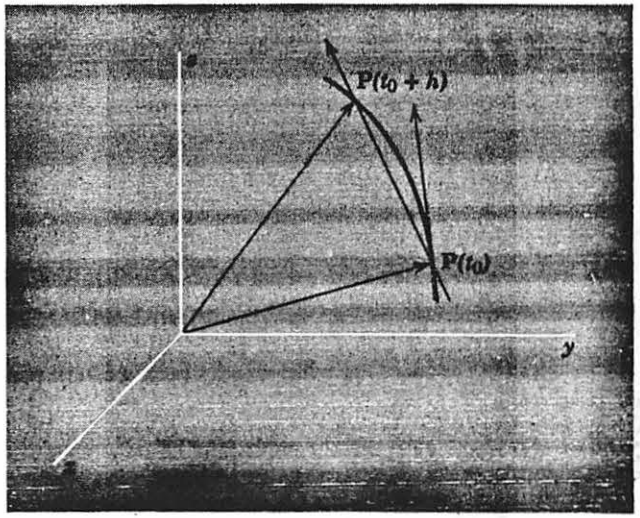
$$\mathbf{P} = \mathbf{F}[t(s)] = f[t(s)]\mathbf{i} + g[t(s)]\mathbf{j} + h[t(s)]\mathbf{k} \qquad \{0 < s < L_C\},$$

y por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = [f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}]\frac{dt}{ds} = \mathbf{F}'(t)/s'(t).$$

De donde

$$\left|\frac{d\mathbf{F}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{F}'(t)|}{s'(t)} = 1. \quad \blacksquare$$



Geométricamente, el cociente diferencia

$$[\mathbf{F}(t_0 + h) - \mathbf{F}(t_0)]/h$$

puede interpretarse como un vector con su punto inicial en $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{F}(t_0)$ y apuntando desde allí en la dirección de $\mathbf{P}(t_0 + h) = \mathbf{F}(t_0 + h)$. Por tanto, representa un vector secante de la curva en $\mathbf{P}(t_0)$. Conforme $h \to 0$, el punto $\mathbf{P}(t_0 + h) = \mathbf{F}(t_0 + h)$ se desliza hacia abajo de la curva y en el límite coincide con $\mathbf{P}(t_0)$. La posición límite del vector se llama **vector tangente.** Está dado por $\mathbf{F}'(t_0)$. En particular, el vector

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

se llama **vector tangente unitario,** porque su longitud es uno, de acuerdo con el Teorema 8.9c. Puede calcularse mediante la fórmula

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}'(t)/s'(t) = \mathbf{F}'(t)/|\mathbf{F}'(t)|.$$

Supóngase ahora que $\mathbf{F}$ tiene derivadas superiores. Obsérvese que

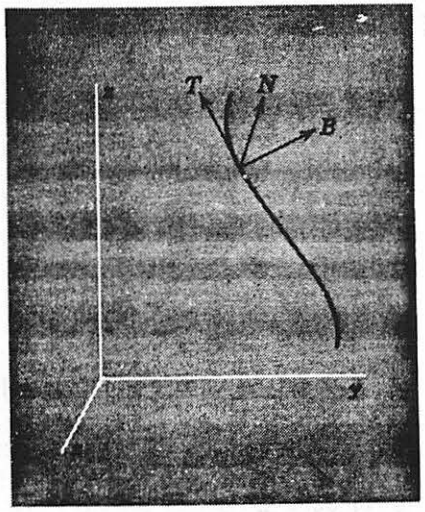
$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1.$$

Así [ver Ejercicio A1(b)]

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

o, en la forma coordenada,

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$



De donde $d\mathbf{T}/ds = \mathbf{O}$ o bien $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/ds$ son ortogonales. En todos los puntos donde $d\mathbf{T}/ds \neq \mathbf{O}$, se define al vector unitario $\mathbf{N}$ en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$ como

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

De donde

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N},$$

donde κ es una función escalar de s (o de t) a lo largo de C, llamada **curvatura.** El vector $\mathbf{N}$ se llama **normal principal** de C en el punto donde se evalúa. El vector $\mathbf{B}$ definido por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ recibe el nombre de **binormal.** La triple **T, N, B** forma una terna de vectores orientada positivamente.

Si $\mathbf{P} = \mathbf{F}(t)$ describe el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de C, donde t representa el tiempo, entonces los vectores $\mathbf{V} \equiv d\mathbf{P}/dt$ y $\mathbf{a} \equiv d^2\mathbf{P}/dt^2$ reciben el nombre de **velocidad** y **aceleración** de la partícula, respectivamente.

Se concluye este capítulo con algunas observaciones acerca de la integración vectorial. Sea $\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ una función valuada vectorialmente definida en I: $\{a \leqslant t \leqslant b\}$, y sea

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

una partición de I. En cada intervalo de partición I_k: $\{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k\}$ se escoge un punto τ_k y se forma la suma

$$\mathbf{S}_\Delta(\mathbf{F}, \tau) = \sum_\Delta \mathbf{F}(\tau_k)\,\Delta_k t.$$

Si $\mathbf{J} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \mathbf{S}_\Delta$ existe, se dice que $\mathbf{J}$ es la integral de $\mathbf{F}$ sobre I y se denota por

$$\mathbf{J} = \int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt$$

Debe aclararse que una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{F}$ sea integrable es que f, g y h sean integrables. En este caso

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \mathbf{i}\int_a^b f(t)\,dt + \mathbf{j}\int_a^b g(t)\,dt + \mathbf{k}\int_a^b h(t)\,dt.$$

EJERCICIOS A

1. Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ funciones vectoriales diferenciables y α una función escalar diferenciable. Probar que

   (*a*) $\dfrac{d}{dt}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\dfrac{d\mathbf{F}}{dt} + \dfrac{d\alpha}{dt}\mathbf{F}$

   (*b*) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\cdot\dfrac{d\mathbf{G}}{dt} + \mathbf{G}\cdot\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}$

   (*c*) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times\dfrac{d\mathbf{G}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G}$

2. Demostrar que si f es una función monótona en I: $\{a \leqslant t \leqslant b\}$, entonces f tiene variación acotada allí y $V_f = |f(b) - f(a)|$.
3. Encontrar **T, N** y **B** para cada una de las siguientes curvas:

   (*a*) $\mathbf{P} = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$
   (*b*) $\mathbf{P} = \operatorname{sen} at\mathbf{i} + \cos bt\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

4. Hacer un esquema de la curva del ejercicio 3(*a*) anterior mostrando **T, N** y **B** en el punto donde $t = \pi/2$.
5. Considerando que t representa el tiempo en el Ejercicio A3, calcular la velocidad y la aceleración en términos de **T, N** y **B.**
6. Sea C una curva dada por $\mathbf{P} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Calcular $s(t)$ como una integral donde s se mide desde el origen.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que para que una función vectorial $\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ sea continua, una condición necesaria y suficiente es que f, g y h sean continuas.
2. Probar que el vector aceleración **a** siempre está en el plano de **T** y **N,** y que, de hecho, la componente de **a** en la dirección de **N** es no negativa. Explicar el significado geométrico de este hecho.

3. Demostrar que:
   (*a*) Si f tiene una derivada acotada en I: $\{a \leq t \leq b\}$, entonces f tiene variación acotada allí.
   (*b*) Si f' es continua en I, entonces
$$V_f = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

EJERCICIOS C

1. Sea C dada por
$$\mathbf{P} = t^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \qquad 0 < t < 1$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{O} \qquad t = 0$$
Demostrar que C es rectificable si, y solamente si, $\alpha > 1$.
2. Sea C dada por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(t)$, donde $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable tres veces. Demostrar que $d\mathbf{B}/ds$ está en la dirección de $\mathbf{N}$, de modo que existe un escalar τ (llamado torsión) tal que
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$
Probar las fórmulas de Frenet
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

9

Funciones de varias variables. Límites y continuidad

9.1 UN POCO DE TOPOLOGIA: CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

Ahora, será necesario extender hacia las dimensiones superiores algunos de los conceptos de conjuntos de puntos los cuales fueron útiles en una dimensión. Estableceremos nuestras proposiciones (definiciones, teoremas, etc.), de manera que puedan aplicarse con igual propiedad en dos, tres y en dimensiones superiores. La mayor parte de nuestros ejemplos e ilustraciones serán bidimensionales. Usaremos la notación vectorial libremente y se pensará que tales vectores son de 2, 3 o más dimensiones de acuerdo con la dimensión del espacio bajo consideración. Puesto que los productos cruz no se aplican aquí, no tendremos dificultad en realizar las operaciones vectoriales necesarias.

Debido al gran número de definiciones dadas en esta sección será difícil asimilarlas todas al mismo tiempo. Por lo tanto, el estudiante deberá regresar constantemente cuantas veces sea necesario hasta que se familiarice con los términos técnicos definidos aquí.

Por **vecindad** de un punto $\mathbf{P}_0$ se entiende el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P}$ que se encuentran dentro de alguna distancia fija, digamos δ, de $\mathbf{P}_0$; es decir, todos los puntos $\mathbf{P}$ tales que $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta$. Esto significa que
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$
en dos dimensiones. En tres se transforma en
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta,$$

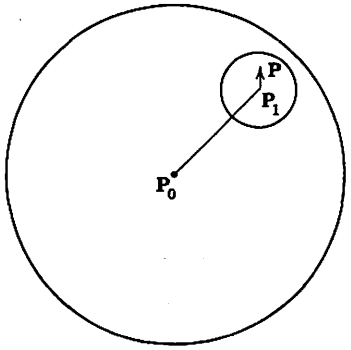
y en dimensiones superiores se describe la condición mediante fórmulas análogas. Por tanto, una vecindad de $\mathbf{P}_0$ es el interior de un círculo o de una esfera con centro en $\mathbf{P}_0$.

Una **vecindad agujerada** de un punto $\mathbf{P}_0$ es una vecindad de $\mathbf{P}_0$ de la cual se ha suprimido el propio $\mathbf{P}_0$.

Se dice que un punto $\mathbf{P}_0$ es un **punto interior** de un conjunto S si existe una vecindad de $\mathbf{P}_0$ que se encuentra completamente en S.

Un conjunto S es un **conjunto abierto** si en su totalidad consiste de puntos interiores.

EJEMPLO. Demostrar que el conjunto S de puntos $\mathbf{P}$, para los cuales $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < a$, es un conjunto abierto.



Solución. Geométricamente es suficientemente claro, pero se desea dar un argumento no geométrico.

Para demostrar que el conjunto es abierto se debe demostrar que todo punto es un punto interior; es decir, se debe demostrar que todo punto en S tiene una vecindad que también pertenece al conjunto. Así, sea $\mathbf{P}_1$ cualquier punto del conjunto. Entonces

$$|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0| < a.$$

Ahora escójase δ de modo que

$$|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0| + \delta < a.$$

Es decir, escójase δ de modo que

$$\delta < a - |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|.$$

Ahora bien, sea $\mathbf{P}$ cualquier punto en la vecindad δ de $\mathbf{P}_1$. Se desea concluir que $\mathbf{P}$ pertenece a S. Decir que $\mathbf{P}$ está en la vecindad δ de $\mathbf{P}_1$ significa que $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_1| < \delta$. De aquí que

$$\begin{aligned} |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| &= |(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)| \\ &\leqslant |\mathbf{P} - \mathbf{P}_1| + |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0| < \delta + (a - \delta) = a. \end{aligned}$$

Así se ha demostrado que $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < a$, lo cual significa que $\mathbf{P}_1$ pertenece

a S. Esto, a su vez, significa que se ha encontrado una vecindad de $\mathbf{P}_1$ que está completamente en S.

El **complemento** CS de un conjunto S es el conjunto de todos los puntos que no pertenecen a S.

EJEMPLO. Si S es una vecindad $\{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta\}$, entonces CS se describe por,

$$\{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| \geqslant \delta\}.$$

Un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto.

Un punto $\mathbf{Q}$ es un **punto frontera** de un conjunto S ($\mathbf{Q}$ puede ser o no un punto de S) si *toda* vecindad de $\mathbf{Q}$ contiene al mismo tiempo (1) puntos de S y (2) puntos de CS. El conjunto de puntos frontera de un conjunto S es su **frontera.**

EJEMPLO. Sea otra vez S una vecindad $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta$. Entonces la frontera de S es el conjunto de puntos $\mathbf{Q}$ para los cuales

$$|\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0| = \delta.$$

Este hecho es geométricamente evidente. ¿Puede usted demostrarlo?

9.1a Teorema. Para todo conjunto S, la frontera de S y la de CS son idénticas.

Demostración. La demostración es inmediata a partir de la definición, ya que el complemento de CS es el propio S,

$$CCS = S. \qquad \blacksquare$$

9.1b Teorema. Si S es abierto entonces S a ninguno de sus puntos frontera contiene.

Demostración. Es evidente que ninguno de los puntos frontera de un conjunto S puede ser un punto interior de S (comprobar las definiciones). Puesto que S en su totalidad consiste de puntos interiores, no puede contener puntos frontera. $\blacksquare$

9.1c Teorema. Si S es cerrado contiene a todos sus puntos frontera.

Demostración. Sea CS el complemento de S. Entonces CS es abierto por la definición de conjunto cerrado. Por el Teorema 9.1a, S y CS tienen la misma frontera. Y por el Teorema 9.1b, CS no contiene puntos de la frontera; así, S debe contener toda la frontera. $\blacksquare$

Un **segmento lineal** que une los puntos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es el conjunto de puntos $\mathbf{P}$ dados por

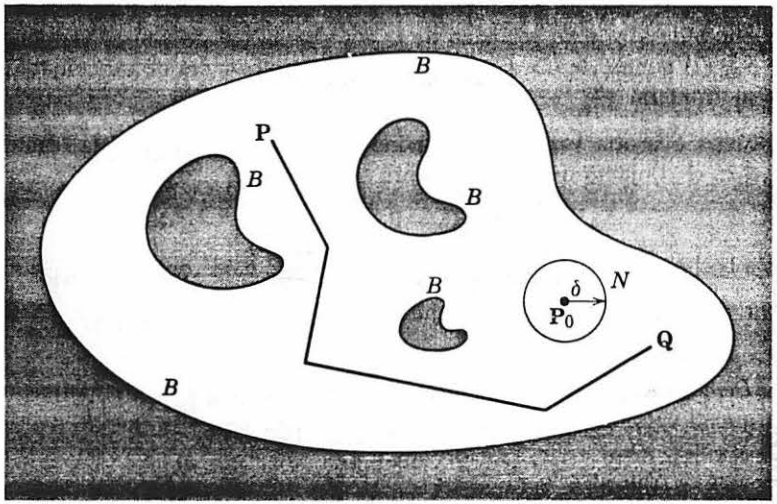
$$\mathbf{P} = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \qquad \{0 < t < 1\}.$$

$\mathbf{P}_1$ se llama **punto inicial** y $\mathbf{P}_2$ es el **punto terminal.**

Una **línea quebrada** o **línea poligonal** es un número finito de segmentos unidos extremo con extremo.

Una **región** R es un conjunto abierto en el cual dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal que se encuentra enteramente en R.

EJEMPLO. Una vecindad es una región, pero dos vecindades ajenas (es decir, que no tienen puntos en común) forman un conjunto abierto que no es una región.



Una región mostrando conectibilidad, la frontera B y una vecindad N.

Una **región cerrada** es una región junto con su frontera. Una **región parcialmente cerrada** es aquella que incluye parte pero no toda su frontera.

Una advertencia: puesto que se ha enfatizado acerca de los conjuntos abiertos y cerrados, el estudiante no debe engañarse y pensar que un conjunto debe ser clasificado en alguna de estas dos clases. Este no es el caso. Dé algunos ejemplos de conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

Otro concepto que en ocasiones se encontrará útil es el de diámetro de un conjunto acotado. En primer lugar, un conjunto S es **acotado** si existe un número M tal que

$$|\mathbf{P}| < M \qquad \text{para todo } \mathbf{P} \text{ en } S.$$

En este caso se dice que sup $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$, donde el supremum se calcula sobre todos los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en S, es el **diámetro** de S.

Existe un famoso teorema, conocido como **teorema de la curva de Jordan,** que relaciona los conceptos de región y curva en E_2 —esto es, en el plano—. Establece que toda curva de Jordan (curva cerrada simple; ver Sección 8.7) separa al plano en dos regiones ajenas, una acotada y una no acotada, las cuales tienen a la curva como frontera común. La acotada recibe el nombre de **interior** de la curva y la no acotada, **exterior.**

Aunque geométricamente es obvio, este teorema es sorprendentemente difícil de probar.

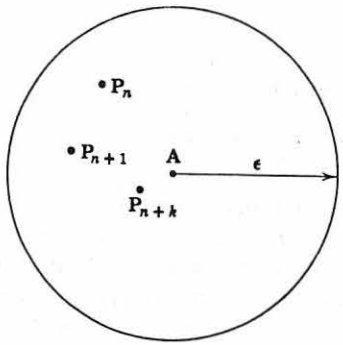
Otro punto que tal vez es difícil de apreciar es que la frontera de una región en E_2 no necesita ser una curva. Puede ser mucho más complicada. En efecto, existen regiones en las cuales ninguna parte de su frontera es una curva. Sin embargo, nuestras consideraciones no se referirán a la patología de los conjuntos planos. Nos restringiremos a situaciones relativamente sencillas donde tales fenómenos extraños no se consideran o no tienen importancia.

9.2 UN POCO MAS DE TOPOLOGIA: SUCESIONES, VALORES LIMITE, PUNTOS DE ACUMULACION, CRITERIO DE CAUCHY

Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial cuyo dominio —es decir, el conjunto de t para los cuales $\mathbf{F}(t)$ está definida —es el conjunto de todos los enteros mayores o iguales que algún n_0. Tal función se llamará **sucesión** de vectores y se denotará por $\{\mathbf{P}_n\}$ donde los vectores $\mathbf{P}_n$ están dados por

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{F}(n) \qquad n \geqslant n_0.$$

El número n_0 se indicará explícitamente o implícitamente.



Se dirá que la sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ tiene un límite $\mathbf{A}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que

$$|\mathbf{P}_n - \mathbf{A}| < \epsilon \qquad \text{siempre que } n > N.$$

Las notaciones usuales para los límites se toman como

$$\lim \mathbf{P}_n = \mathbf{A}$$

o bien

$$\mathbf{P}_n \to \mathbf{A}.$$

Como en el caso de las sucesiones de números reales, es conveniente definir el concepto de **valor límite** o **punto límite** de una sucesión $\mathbf{P}_n$. Se dirá que un punto $\mathbf{A}$ es un valor límite o punto límite de una sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ si existe una subsucesión $\{\mathbf{P}_{n_k}\}$ que converge a $\mathbf{A}$.

El concepto análogo para los conjuntos es el siguiente: se dice que un punto $\mathbf{A}$ es un **punto de acumulación** de un conjunto S si toda vecindad agujerada de $\mathbf{A}$ contiene puntos de S. Una definición equivalente (ver Ejercicio B8) es que exista una sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ con $\mathbf{P}_n$ en S para toda n, y $\mathbf{P}_n \neq \mathbf{P}_m$ si $n \neq m$, tal que $\mathbf{P}_n \to \mathbf{A}$.

Formularemos la definición en términos de una vecindad agujerada, de manera que excluiremos los puntos aislados de S como puntos de acumulación, donde por **punto aislado** de S se entiende un punto $\mathbf{P}$ de S tal que exista una vecindad N de $\mathbf{P}$ en la cual no se encuentren otros puntos de S.

9.2a Teorema. Sea R una región. Entonces cualquier punto frontera de R es también un punto de acumulación de R.

Demostración. Supóngase que R es una región abierta. Sea $\mathbf{Q}$ un punto frontera y dado $\epsilon > 0$. Entonces, por la definición de punto frontera, existe un punto $\mathbf{P}$ en R para el cual $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \epsilon$. Pero $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$, de modo que $\mathbf{P}$ está en la vecindad ϵ agujerada de $\mathbf{Q}$. Así que el teorema queda demostrado para las regiones abiertas. La demostración para las regiones cerradas o parcialmente cerradas se deja de ejercicio (B9). ∎

Una importante propiedad de los conjuntos cerrados está dada por el siguiente teorema. Proporciona una característica de los conjuntos cerrados que se aplicará repetidas veces.

9.2b Teorema. Si S es un conjunto cerrado, entonces contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración. Sea $\mathbf{Q}$ un punto de acumulación de S y supóngase (por contradicción) que $\mathbf{Q}$ no está en S. Entonces $\mathbf{Q}$ está en CS el cual es abierto. Como una consecuencia de que CS es abierto, existe una vecindad de $\mathbf{Q}$ que se encuentra en CS y la cual, por lo tanto, no puede contener puntos del propio S. Esta es una contradicción, puesto que toda vecindad de un punto de acumulación de S contiene puntos de S. ∎

El criterio de Cauchy es tan útil en esta discusión de espacios de dimensión superior como en una dimensión y se deduce fácilmente a partir del caso unidimensional.

9.2c Teorema. Para que $\{\mathbf{P}_n\}$ tenga un límite, es necesario y suficiente que para todo $\epsilon > 0$ exista un $N(\epsilon)$ para el cual

$$|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m| < \epsilon \qquad \text{siempre que } n > N,\ m > N.$$

Demostración. Necesidad. Supóngase que $\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}$. Esto significa que para todo ϵ existe un $N(\epsilon)$ tal que

$$|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{si } n > N(\epsilon).$$

Entonces $|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m| < |\mathbf{P}_n - \mathbf{P}| + |\mathbf{P}_m - \mathbf{P}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{si } n, m > N.$

Suficiencia. (Para E_3). Supóngase que $\{\mathbf{P}_n\}$ satisface la condición ϵ del criterio de Cauchy. Entonces es evidente que [aquí tomamos $\mathbf{P}_n = (x_n, y_n, z_n)$]

$$|x_n - x_m| < |\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m| < \epsilon \qquad \text{si } n, m > N,$$

de manera que $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales que satisface el criterio de Cauchy. En consecuencia, $\{x_n\}$ tiene un límite, el cual puede denotarse por x. En forma semejante, existen números y y z tales que $y_n \to y$ y $z_n \to z$. Ahora, definamos $\mathbf{P}$ por $\mathbf{P} = (x, y, z)$ y considérese

$$|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}| < |x_n - x| + |y_n - y| + |z_n - z|. \qquad \text{(¿Cómo?)}$$

Entonces, es evidente que

$$|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

El siguiente teorema generaliza el principio de los intervalos anidados.

9.2d Teorema. Sea S_n una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos, cada uno de los cuales está contenido en el anterior, y tales que el diámetro de S_n tiende hacia cero conforme $n \to \infty$. Entonces existe exactamente un punto $\mathbf{P}$ con la propiedad de que $\mathbf{P}$ está en S_n para todo n.

Demostración. Escójase una sucesión de puntos de la siguiente manera: Sea $\mathbf{P}_1$ en S_1, $\mathbf{P}_2$ en S_2, ..., $\mathbf{P}_n$ en S_n, ... Entonces, dado $\epsilon > 0$, escójase N tan grande que el diámetro de S_N sea $< \epsilon$. Entonces, para $m \geqslant n > N$ se tiene $\mathbf{P}_n$ y $\mathbf{P}_m$, ambos en S_N (¿Por qué?). Así que

$$|\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_n| < \epsilon,$$

y, por el criterio de Cauchy, $\{\mathbf{P}_n\}$ tiene un límite que puede denotarse por $\mathbf{Q}$. Para ver que $\mathbf{Q}$ está en S_n, obsérvese que $\mathbf{P}_m$ está en S_n para todo $m \geqslant n$. Por tanto, $\mathbf{Q}$ es el límite de una sucesión de puntos de S_n; esto es, $\mathbf{Q}$ es un punto de acumulación de S_n. Pero, supuesto que S_n es cerrado, $\mathbf{Q}$ debe estar en S_n.

Falta solamente por demostrar que no existe otro punto $\mathbf{Q}'$, por ejemplo, que esté en todo S_n. Supóngase que existiera. Entonces, sea

$|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'| = \delta > 0$. Escójase n tan grande que el diámetro de S_n sea menor que $\delta/2$. Pero entonces

$$\delta = |\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'| \leqslant \text{diámetro de } S_n < \delta/2.$$

Esta contradicción completa la demostración. ∎

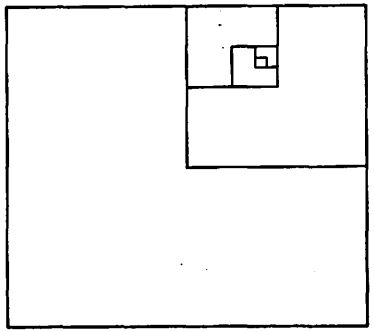
El **teorema de Bolzano-Weierstrass** para las dimensiones superiores puede establecerse en la misma forma que para una dimensión

9.2e Teorema. Un conjunto infinito acotado tiene por lo menos un punto de acumulación y una sucesión acotada tiene por lo menos un punto límite.

Demostración. (Ver Teorema 6.1a). Se desarrollará la demostración para los conjuntos en E_2. Denotemos el conjunto por D. Supuesto que es acotado, existe un gran cuadrado $S_0: \{-a \leqslant x \leqslant a,\ -a \leqslant y \leqslant a\}$ el cual contiene a D. Ahora, divídase S_0 en cuatro (en E_n serían 2^n) cuadrados, bisectando cada dimensión:

$$\begin{Bmatrix} -a < x < 0 \\ -a < y < 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} -a < x < 0 \\ 0 < y < a \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 < x < a \\ -a < y < 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 < x < a \\ 0 < y < a \end{Bmatrix}$$

En por lo menos uno de estos cuadrados debe existir un número infinito de puntos de D (¿por qué?). Escojamos ese cuadrado y denotémoslo por S_1



y escojamos un punto de D en S_1 y denotémoslo por $\mathbf{P}_1$. Una vez más, divídase S_1 en cuatro cuadrados bisectando cada uno de sus lados. Por lo menos uno de los cuatro cuadrados resultantes debe contener un número infinito de puntos de D. Denótese ese cuadrado por S_2 y escójase en él un punto $\mathbf{P}_2$ de D, asegurándose de que $\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_1$. Iterar este procedimiento: Con ello se construye una sucesión de cuadrados S_n de diámetro $\sqrt{2}a/2^{n-1}$, con puntos $\mathbf{P}_n$ en S_n. Por tanto, de acuerdo con el teorema anterior, la sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ tiene un límite $\mathbf{P}$.

Para ver que $\mathbf{P}$ es un punto de acumulación de D, sea N una vecindad cualquiera de $\mathbf{P}$. Por la definición de convergencia, existe un n_0 tal que todos los $\mathbf{P}_n$ están en $n \geqslant n_0$. Pero cuando más un $\mathbf{P}_n$ puede ser igual a $\mathbf{P}$ (¿por qué?). De aquí que existen puntos de D en la vecindad agujerada de $\mathbf{P}$ formada eliminando $\mathbf{P}$ de N. ∎

EJERCICIOS A

1. Sin demostraciones detalladas, decir por qué:
   (*a*) El cuadrado $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ es abierto en E_2.
   (*b*) El cuadrado $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ es cerrado en E_2.
2. Escribir sin demostración los puntos de acumulación de
   $$(1/n,\ 1/m), \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots.$$
3. Describir el conjunto de puntos $\mathbf{P}$ para los cuales
   $$|\mathbf{P} - \mathbf{Q}_1| + |\mathbf{P} - \mathbf{Q}_2| < c,$$
   donde están dados $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ y c.
4. Sea S el conjunto de puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ para los cuales
   $$\{x^2 + y^2 \leqslant 1\} \text{ y } \{x^2 + (y-1)^2 > 1\}.$$
   ¿Cuál es la frontera de S? ¿S es abierto o cerrado? ¿Por qué?
5. Dar un ejemplo de un conjunto en E_2 que no tenga puntos interiores.

EJERCICIOS B

1. Probar las proposiciones del ejercicio A1 anterior.
2. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es abierto en E_2:
   (*a*) $\{x^2 + 4y^2 < 4\}$ (*b*) $\{y^2 < 4x\}$.
3. Demostrar que el conjunto en E_2 descrito por $\{x^2 + y^2 = 1\}$ es cerrado.
4. Probar la respuesta al Ejercicio A2.
5. Sea $\{\mathbf{P}_n\}$ una sucesión de puntos. Demostrar que (1) $|\mathbf{P}_n| \to \infty$ o bien (2) $\{\mathbf{P}_n\}$ tiene un valor límite finito.
6. ¿Cuál es la frontera del conjunto S en E_2 descrito por $\{x^2 + y^2 = 1\}$?
7. Demostrar que el conjunto de puntos de acumulación de un conjunto S consiste de su frontera junto con su interior.
8. Probar la equivalencia de las dos definiciones de punto de acumulación. (Ver la última parte de la demostración del Teorema 9.2e.)
9. Completar la demostración del Teorema 9.2a.

EJERCICIOS C

1. Sea S cualquier conjunto. Demostrar que la frontera de S es cerrada.
2. Sea S cualquier conjunto y P cualquier punto de S. Demostrar que P es un punto interior o un punto frontera.
3. Demostrar que si S contiene puntos, ninguno de los cuales es punto frontera, es abierto.
4. Demostrar que, si un conjunto S contiene todos sus puntos frontera, es cerrado.

9.3 LIMITES

En el Capítulo 2 se discutió qué se entiende por función de una sola variable real. Ahora se desea extender esta idea para definir una función de varias variables reales o, lo que viene a ser la misma cosa, una función de un punto en un espacio vectorial Euclideano de varias dimensiones. Nuestro interés principal se enfocará hacia los espacios de dos y tres dimensiones, y nuestros ejemplos serán en estos espacios.

Sea S_1 un conjunto de números reales y S_2 un conjunto en un espacio vectorial Euclideano. Supóngase que a cada $\mathbf{P}$ en S_2 le corresponde un w en S_1. El conjunto de todas las parejas $(\mathbf{P}, w)$, donde $\mathbf{P}$ está en S_2 y w es el valor correspondiente en S_1, se llama **función** y se denota por f, como en la Sección 2.1. Los valores funcionales se denotan por

$$w = f(\mathbf{P})$$

o bien, de manera equivalente,

$$w = f(x, y), \quad w = f(x, y, z), \ldots,$$

de acuerdo con la dimensión del espacio.

El lenguaje para discutir las funciones se traspasa, sin cambios, del caso unidimensional. En particular, mencionaremos que el conjunto de $\mathbf{P}$ para el cual f está definida se llama **dominio** de la función y se denotará por D. El conjunto de valores de la función —es decir, el conjunto de w el cual corresponde a algún $\mathbf{P}$ en D— se llama **rango** de f y se denota por R.

A continuación volveremos nuestra atención hacia los límites de funciones. La mayor parte de los teoremas se establecen y demuestran para funciones definidas sobre conjuntos con algunas restricciones. Sin embargo, el estudiante puede encontrar más sencillo imaginarse el dominio de cualquiera de las funciones como una región —abierta, cerrada o parcialmente cerrada— y no sacará conclusiones equivocadas por esta simplificación.

Sea f definida en un dominio D y sea $\mathbf{P}_0$ un punto de acumulación de D. Entonces se dice que f tiene un **límite** A conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, \mathbf{P}_0)$ para el cual

$$|f(\mathbf{P}) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta \text{ y } \mathbf{P} \text{ esté en } D.$$

Expresaremos esto simbólicamente como

$$\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0} f(\mathbf{P}) = A \quad \text{o bien} \quad f(\mathbf{P}) \to A \quad \text{conforme} \quad \mathbf{P} \to \mathbf{P}_0.$$

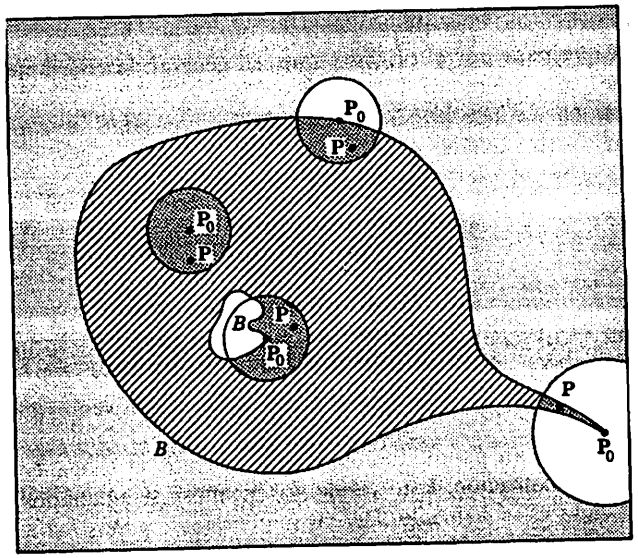
Geométricamente, la condición $\epsilon - \delta$ puede establecerse así: para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad N de $\mathbf{P}_0$ tal que $|f(\mathbf{P}) - A| < \epsilon$, si $\mathbf{P}$ está en la parte común de D y N. La figura ilustra la situación para un punto interior $\mathbf{P}_0'$ y para puntos frontera $\mathbf{P}_0$.

EJEMPLO 1. Sea $f(\mathbf{P}) = f(x,y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$.

Solución. El dominio de esta función es todo el plano (E_2) excepto el origen. Tomemos $\mathbf{P}_0 = (0,0)$ e investiguemos el límite de $f(\mathbf{P})$ conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces se desea demostrar que existe un δ tal que

(1) $\quad |f(\mathbf{P})| > \epsilon \quad$ siempre que $|\mathbf{P}| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.



Ahora bien, es evidente que

$$x^2 < x^2 + y^2$$

y

$$y^2 < x^2 + y^2,$$

de manera que

$$|f(\mathbf{P})| = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} < \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2) < \epsilon$$

si $\quad |\mathbf{P}| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\epsilon}.$

Así que (1) se ha satisfecho con $\delta = \sqrt{\epsilon}$ y se ve que

$$\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{O}} f(\mathbf{P}) = 0$$

EJEMPLO 2. Sea $f(\mathbf{P}) = xy/(x^2 + y^2)$.

Solución. También en este ejemplo, el dominio de f es E_2 excepto en el origen, y asimismo, examinemos los valores de f cerca del origen'—esto es, cerca de $\mathbf{P}_0 = (0,0)$.

Si introducimos coordenadas polares $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, entonces f toma la forma

$$xy/(x^2 + y^2) = \rho\cos\theta\,\rho\operatorname{sen}\theta/\rho^2 = \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Aquí, por supuesto,

$$\rho = |\mathbf{P}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observando esta fórmula es evidente que f es constante sobre toda línea recta que pasa por el origen y que, en general, la constante es diferente sobre líneas diferentes. Entonces, es evidente que los valores de f no pueden mantenerse tan próximos a cualquier constante A simplemente restringiendo ρ. De donde, en este caso, $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} f(\mathbf{P})$ no existe.

Un método alternativo es sustituir $y = ax$. Entonces se tiene

$$f(x, ax) = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Otra vez se ve que f tiene valores constantes diferentes sobre líneas que pasan por el origen, de modo que el límite no puede existir.

Aquí es pertinente una observación. Frecuentemente vemos o escuchamos la afirmación de que, para que un límite de una función de varias variables exista en un punto, debe ser independiente de la manera en que se realice la aproximación. Esto puede ser engañoso si «manera» se interpreta demasiado estrechamente. Definitivamente es engañoso si «manera» se reemplaza por «dirección». Se tienen funciones para las cuales el límite existirá aproximándose a lo largo de cada línea recta que conduce hacia un punto $\mathbf{P}_0$, para las cuales todos estos límites son iguales y, sin embargo, para las cuales el límite en el sentido bidimensional no existe. Esto significa que al pensar acerca de los límites en los espacios bidimensional y superiores, el estudiante debe pensar en términos del punto $\mathbf{P}$ «que se aproxima» cercano a $\mathbf{P}_0$ en lugar de pensar en términos de la aproximación a lo largo de varias direcciones.

EJEMPLO 3. Definir f sobre todo el plano (E_2) por

$$f(\mathbf{P}) = f(x, y) = \begin{cases} (|x|/y^2)e^{-|x|/y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Solución. Sobre la línea $x = 0$, se tiene $f(0, y) = 0$ y el límite es cero

conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0 = \mathbf{O} = (0, 0)$ a lo largo de esta línea. Sobre cualquier otra línea $x = ay$ que pasa por el origen se tiene

$$f(ay, y) = (|ay|/y^2)e^{-|ay|/y^2} = (|a/y|)e^{-|a/y|},$$

y el límite de esta expresión conforme $y \to 0$ fácilmente se ve que es 0, aplicando la regla de l'Hospital, por ejemplo.

Así, se tiene que $f(\mathbf{P})$ tiende hacia cero, conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{O}$ a lo largo de cualquier línea recta que conduce hacia $\mathbf{O}$. Pero a lo largo de la parábola $x = y^2$ se tiene

$$f(y^2, y) = y^2/y^2e^{-y^2/y^2} = e^{-1}.$$

De aquí que f es idénticamente e^{-1} a lo largo de una curva que pasa por el origen y es evidente que $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{O}} f(\mathbf{P})$ no puede ser cero.

9.4 FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR

Una vez más, por última vez, extenderemos el concepto de función. Sea S_1 un conjunto en un espacio vectorial Euclideano de m dimensiones, por ejemplo, y S_2 un conjunto en un espacio vectorial Euclideano de n dimensiones. Supóngase que a cada punto $\mathbf{P}$ en S_2 le corresponde un punto $\mathbf{Q}$ en S_1. El conjunto de todas las parejas ordenadas $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ se llamará **función vectorial** de $\mathbf{P}$ de S_2 a S_1 y se simboliza por $\mathbf{F}$. Los **valores** de $\mathbf{F}$ son vectores $\mathbf{Q}$ en S_1 y se denotan por

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{P}). \tag{1}$$

El punto $\mathbf{Q}$ que corresponde a un particular $\mathbf{P}$ en S_2 se llamará **valor de F**. El conjunto S_2 donde $\mathbf{F}$ está definida es su **dominio** y el conjunto de puntos $\mathbf{Q}$ en S_1, los cuales son valores de $\mathbf{F}$ se llama **rango de F**.

En ocasiones a una función vectorial se le da el nombre de **mapeo** de S_2 en o sobre (ver Sección 2.1) S_1 y se denota así:

$$\mathbf{F}\colon S_2 \to S_1.$$

El estudiante debe entender que la definición de la función vectorial $\mathbf{F}$ requiere la definición de m funciones reales de n variables reales. Denotemos $\mathbf{P}$ por la n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{Q}$ por la m-ada $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Supuesto que los valores de $\mathbf{F}$ se encuentran en E_m, debe tener m componentes, cada una de las cuales depende de $\mathbf{P}$. Así, (1) podría expresarse como

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = [f_1(\mathbf{P}), f_2(\mathbf{P}), \ldots, f_m(\mathbf{P})]. \tag{2}$$

lo cual, a su vez, puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

En consecuencia, el sistema (3) es equivalente a (1).

Los límites de las funciones vectoriales pueden definirse en términos de **F** o de las funciones componentes f_j, $j = 1, \ldots, m$. Tal y como el estudiante puede suponer, es más fácil escribir la proposición en la forma vectorial. Se dejará para los ejercicios el demostrar que las dos son equivalentes. La definición formal de límite es la siguiente:

Sea **F** una función vectorial definida en un dominio D en E_n y la cual tiene valores en E_m, y sea $\mathbf{P}_0$ un punto de acumulación de D. Entonces se dice que $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ tiene un **límite A** conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, \mathbf{P}_0)$ para el cual

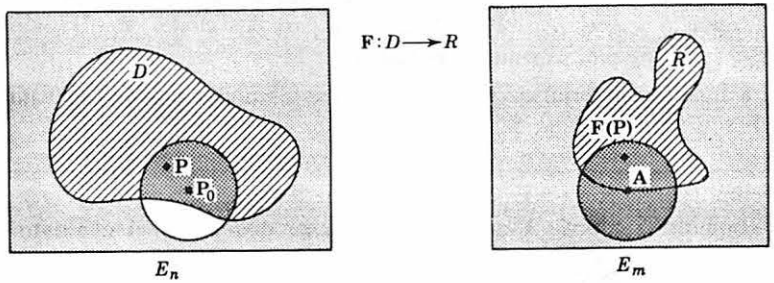
$$|\mathbf{F}(\mathbf{P}) - \mathbf{A}| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta \quad \text{y} \quad \mathbf{P} \text{ esté en } D.$$

En este caso se escribe

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) \to \mathbf{A} \quad \text{conforme} \quad \mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$$

o bien

$$\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0} \mathbf{F}(\mathbf{P}) = \mathbf{A}.$$



Continuidad de una función vectorial

Geométricamente, la condición $\epsilon - \delta$ puede establecerse de la manera siguiente: para toda vecindad N_1, de **A** en E_m existe una vecindad N_2 de $\mathbf{P}_0$ en E_n tal que $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ está en N_1, siempre que **P** esté en la parte común de D y N_2.

EJERCICIOS A

1. Describir el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones de valores reales:
   (*a*) $\operatorname{sen} 1/(x^2 + y^2)$ (*b*) $\operatorname{ang\,sen}(x^2 + y^2)$
   (*c*) $\operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ (*d*) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
   (*e*) $\sqrt{1 - x^2 + y^2}$ (*f*) $\log(1 + xy)$
2. Describir el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones de valores vectoriales:
   (*a*) $5xy\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ (*b*) $\operatorname{sen}(x + y)\mathbf{i} + \cos(x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   (*c*) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$
   (*d*) $[x^2 + w^2, y^2 + z^2 - 1, w^2 + x^2 + y^2 + z^2, x - w]$

3. Para cada una de las funciones siguientes, calcular el límite conforme $(x, y) \to (0,0)$ o bien demostrar que no existe:
   (*a*) $\dfrac{x - y}{x + y}$ (*b*) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (*c*) $\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(x^2 + |xy|)$
   (*d*) $\begin{cases} x^2 + y^2 & x \text{ o bien } y \text{ irracional} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$
   (*e*) $\dfrac{5x^2y + 6x^7 + 3x^4y^3 + x^8(y^4 - x)}{(x^2 + y^2)^3}$ (*f*) $\dfrac{x \operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$
   (*g*) $\dfrac{\operatorname{sen} xy}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$ (*h*) $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}$ (*i*) $\dfrac{x \tan xy}{2 - \cos x - \cos y}$
4. Sea f continua en una vecindad de $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ en E_2. Demostrar que $f(x, y_0)$ define una función continua de x cerca de x_0.

EJERCICIOS B

1. En cada uno de los casos del Ejercicio A3 en donde el límite A exista, calcular un $\delta(\varepsilon)$ tal que $|f(\mathbf{P}) - \mathbf{A}| < \varepsilon$ si $|\mathbf{P}| < \delta$.
2. Encontrar el rango de cada una de las siguientes funciones vectoriales.
   (*a*) $\operatorname{sen} x^2\mathbf{i} + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}$,
   (*b*) $\operatorname{sen} x \cos y\mathbf{i} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\mathbf{j} + \cos x\mathbf{k}$.
3. Examinar $x^4y^4/(x^4+y^2)^3$ sobre cada una de las líneas rectas que pasan por el origen. ¿Tiene un límite esta función en (0,0)?
4. Considérese la función $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en el conjunto $D:\{|y| < x^2\}$. Demostrar que en D, esta función tiene un límite en el origen.
5. Podría decirse que una función de valores vectoriales **F** tiene un límite en $\mathbf{P}_0$ si cada una de sus componentes lo tiene. Demostrar que esto es equivalente a la definición dada en el texto.
6. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{(1 + 4x)(1 + 6y)} - 1}{2x + 3y}$.

9.5 OPERACIONES CON LIMITES

Como complemento, se establecerán los teoremas sobre operaciones con límites para funciones vectoriales los cuales son análogos a los teoremas operacionales de la Sección 2.5. La mayor parte de las demostraciones se omiten, ya que solamente difieren de las demostraciones de la Sección 2.5 en el significado de los signos de valor absoluto: | |. Además, aun cuando se establecieron para funciones de valores reales, algunas de ellas (las cuales se indicarán) se trasladarán a las funciones de valores vectoriales.

9.5.a Teorema. Supóngase que f está definida en un dominio D, $\mathbf{P}_0$ es

un punto de acumulación de D y $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} f(\mathbf{P}) = A$. Sea $\{\mathbf{P}_n\}$ una sucesión de puntos en D tales que $\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_0$, y definir $z_n = f(\mathbf{P}_n)$.

Entonces $z_n \to A$.

Demostración. Sea dado $\epsilon > 0$. Entonces existe un δ para el cual $|f(\mathbf{P}) - A| < \epsilon$ si $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta$, $\mathbf{P}$ en D.

Con δ así determinado, existe un $N[\delta(\epsilon)]$ para el cual $|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0| < \delta$ si $n > N$. Así que para $n > N$ se tiene

$$|z_n - A| = |f(\mathbf{P}_n) - A| < \epsilon,$$

puesto que $|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0| < \delta$. ∎

Así también, aunque no se probará este teorema, es correcto decir que si para toda sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ que tiende hacia $\mathbf{P}_0$ se tiene $f(\mathbf{P}_n) \to A$, entonces

$$\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} f(\mathbf{P}) = A.$$

En los teoremas que siguen, se supone que f y g son funciones de valores reales definidas en un dominio D y $\mathbf{P}_0$ es un punto de acumulación de D. Se entiende que los límites de f y g son límites conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$ y se supone que existen. Esto implica la existencia de los demás límites.

9.5b Teorema. Si $\lim f(\mathbf{P}) = A$ existe, entonces existe una vecindad agujerada de $\mathbf{P}_0$ tal que f es acotada en la parte común de D y la vecindad.

9.5c Teorema. $\lim [f(\mathbf{P}) \pm g(\mathbf{P})] = \lim f(\mathbf{P}) \pm \lim g(\mathbf{P})$.

9.5d Teorema. $\lim f(\mathbf{P})g(\mathbf{P}) = (\lim f(\mathbf{P}))(\lim g(\mathbf{P}))$.

9.5e Teorema. $\lim f(\mathbf{P})/g(\mathbf{P}) = \lim f(\mathbf{P})/\lim g(\mathbf{P})$ si $\lim g(\mathbf{P}) \neq 0$.

9.5f Teorema. $\lim |f(\mathbf{P})| = |\lim f(P)|$.

9.5g Teorema. Si $f(\mathbf{P}) \geqslant 0$, entonces $\lim f(\mathbf{P}) \geqslant 0$.

9.5h Teorema. Si $f(\mathbf{P}) \geqslant g(\mathbf{P})$, entonces $\lim f(\mathbf{P}) \geqslant \lim g(\mathbf{P})$.

9.5i Teorema. Si $f(\mathbf{P}) \geqslant 0$, entonces $\lim \sqrt{f(\mathbf{P})} = \sqrt{\lim f(\mathbf{P})}$.

9.5j Teorema. Si f y g se reemplazan por funciones de valores vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$, entonces se mantienen las conclusiones de los Teoremas 9.5a, b, c, f. El Teorema 9.5d se cumple si la multiplicación es interna o vectorial y el Teorema 9.5e es válido si f se reemplaza por $\mathbf{F}$.

9.6 CONTINUIDAD

Ahora enfocaremos nuestra atención hacia el concepto de continuidad de una función de varias variables —es decir, de una función de un vector. Una vez más, el formalismo es casi el mismo que para una función real de una variable real.

Una función f definida en un dominio D es **continua** allí si

$$\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{P}_0)$$

para todo punto $\mathbf{P}_0$ en D. En términos de ϵ, esta expresión δ se transforma en: f es continua en D si para todo $\epsilon > 0$ y cada $\mathbf{P}_0$ en D existe un $\delta(\epsilon, \mathbf{P}_0)$ para el cual $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}_0)| < \epsilon$ siempre que $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta$ y $\mathbf{P}$ esté en D.

El concepto de continuidad uniforme se deduce inmediatamente: Si en la definición precedente se puede encontrar un $\delta(\epsilon, D)$ tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}_0)| < \epsilon$ para todo $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_0$ en D y para los cuales $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta$, se dice que f es **uniformemente continua** en D.

Precisamente las mismas definiciones se cumplen para las funciones de valores vectoriales $\mathbf{F}$.

9.6a Teorema. Sean f y g funciones continuas. Entonces:

(i) $f + g$, $f - g$ y fg son continuas.
(ii) $|f|$ es continua.
(iii) f/g es continua si $g \neq 0$.
(iv) $\sqrt{f}$ es continua si $f \geqslant 0$.

Demostración. Las demostraciones son casi idénticas a las demostraciones de los teoremas en la Sección 9.5. ∎

También debe puntualizarse que si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funciones de valores vectoriales continuas, entonces (i) se cumple si la multiplicación es un producto interno o vectorial; (ii) se cumple y (iii) se cumple para $\mathbf{F}/g$ donde g es una función continua diferente de cero y de valores escalares.

A continuación estableceremos las propiedades más profundas de las funciones continuas que son análogas a las de los teoremas de la Sección 6.4.

9.6b Teorema. Si f (o bien $\mathbf{F}$) es una función continua en un conjunto cerrado acotado D, es acotada allí.

Demostración. Desarrollaremos la demostración para f; es la misma

exactamente para **F**. Supóngase que f no fuera acotada. Entonces existe un

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1 \text{ en } D \text{ para el cual } |f(\mathbf{P}_1)| \geqslant 1\\
&\mathbf{P}_2 \text{ en } D \text{ para el cual } |f(\mathbf{P}_2)| \geqslant 2\\
&\quad\vdots\\
&\mathbf{P}_n \text{ en } D \text{ para el cual } |f(\mathbf{P}_n)| \geqslant n.\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos construido una sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ para la cual $|f(\mathbf{P}_n)| \to \infty$. Pero $\{\mathbf{P}_n\}$ es una sucesión acotada y, por lo tanto, tiene un punto límite $\mathbf{P}_0$ (¿por qué?) y $\mathbf{P}_0$ está en D supuesto que D es cerrado. Entonces se tiene una subsucesión $\{\mathbf{P}_{n_k}\}$ que converge hacia $\mathbf{P}_0$. Para esta subsucesión se tiene, debido a la continuidad, que

$$|f(\mathbf{P}_{n_k})| \to |f(\mathbf{P}_0)|,$$

y simultáneamente que

$$|f(\mathbf{P}_{n_k})| \to \infty.$$

Esta contradicción completa la demostración. ∎

El siguiente teorema se restringe a las funciones de valores reales.

9.6c Teorema. Sea f continua en un conjunto cerrado acotado D. Entonces existe un punto $\mathbf{P}_0$ en D y un punto $\mathbf{P}_1$ en D para los cuales

$$f(\mathbf{P}_0) \leqslant f(\mathbf{P}) \leqslant f(\mathbf{P}_1) \qquad \text{para todo } \mathbf{P} \text{ en } D.$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 9.6b, f es acotada, de modo que $\sup_D f$ y $\inf_D f$ son finitos. Se demostrará que existe un punto $\mathbf{P}_0$ para el cual $f(\mathbf{P}_0) = \inf_D f$. La demostración de que el suprémum se alcanza es semejante.

Sea $m = \inf_D f$, y supóngase, por contradicción, que no existiera ese punto $\mathbf{P}_0$ para el cual $f(\mathbf{P}_0) = m$. Entonces $f(\mathbf{P}) - m$ es una función continua positiva; de aquí que $1/(f(\mathbf{P}) - m)$ también lo es [Teorema 9.6a (iii)]. Por tanto, esta última función es acotada, digamos por B:

$$1/[f(\mathbf{P}) - m] \leqslant B \qquad \text{en } D.$$

Así que $f(\mathbf{P}) \geqslant m + 1/B > m$ lo cual contradice el hecho de que $m = \inf_D f$. ∎

El último teorema de esta sección se refiere a la propiedad más importante de las funciones continuas, la cual estableceremos.

9.6d Teorema. Una función f (o bien una función de valores vectoriales, **F**) la cual es continua en un conjunto cerrado acotado D es uniformemente continua allí.

Demostración. Debe demostrarse que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, D)$ tal que para todo **P**, **Q** en D

$$|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad |\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta.$$

Nuevamente, la demostración es por contradicción: supóngase que el teorema no fuera verdadero. Esto significaría que existe un excepcional $\epsilon > 0$, digamos ϵ_0, tal que para todo $\delta > 0$ existen un par de puntos **P**, **Q** en D con $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$ para los cuales $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| \geqslant \epsilon_0$. Con δ sucesivamente igual a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 1/n, \ldots$, existen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1 \text{ con } |\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1| < 1 \quad \text{para los cuales } |f(\mathbf{P}_1) - f(\mathbf{Q}_1)| \geqslant \epsilon_0\\
&\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2 \text{ con } |\mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_2| < \tfrac{1}{2} \quad \text{para los cuales } |f(\mathbf{P}_2) - f(\mathbf{Q}_2)| > \epsilon_0\\
&\quad\vdots\\
&\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n \text{ con } |\mathbf{P}_n - \mathbf{Q}_n| < 1/n \text{ para los cuales } |f(\mathbf{P}_n) - f(\mathbf{Q}_n)| > \epsilon_0.\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Como en la demostración del Teorema 9.6b, la sucesión $\{\mathbf{P}_n\}$ es acotada y, por lo tanto, tiene una subsucesión convergente $\{\mathbf{P}_{n_k}\}$ cuyo límite $\mathbf{P}_0$ está en D, supuesto que D es cerrado. Ahora, también $\mathbf{Q}_{n_k} \to P_0$, supuesto que

$$|\mathbf{Q}_{n_k} - \mathbf{P}_0| < |\mathbf{Q}_{n_k} - \mathbf{P}_{n_k}| + |\mathbf{P}_{n_k} - \mathbf{P}_0| \to 0 \quad \text{conforme } k \to \infty.$$

Entonces, debido a la continuidad, se tiene

$$|f(\mathbf{P}_{n_k}) - f(\mathbf{Q}_{n_k})| \to |f(\mathbf{P}_0) - f(\mathbf{P}_0)| = 0,$$

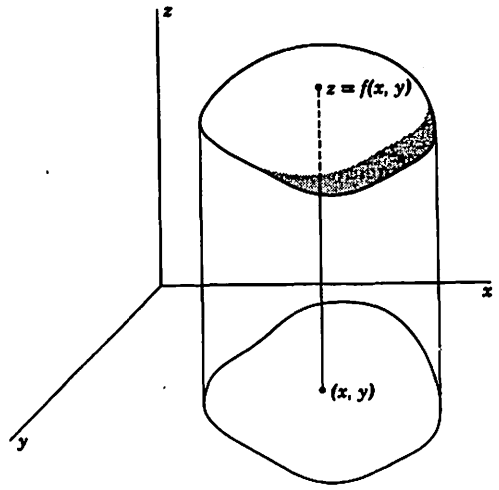
lo cual contradice la construcción de que

$$|f(\mathbf{P}_{n_k}) - f(\mathbf{Q}_{n_k})| \geqslant \epsilon_0.$$

9.7 DESCRIPCION GEOMETRICA DE UNA FUNCION

Decir que una función real está definida en su dominio D, el cual puede imaginarse como una región o como una región cerrada, es decir que a cada punto **P** en esta región se le asocia un número. Esto puede representarse, en el caso de una función definida en un dominio bidimensional, como una altura arriba (o abajo si el valor es negativo) del dominio plano. Es decir, la realización gráfica de la función es un conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional caracterizado por el hecho

de que están relacionados a través de la ecuación $z = f(x, y)$ — en otras palabras, una **superficie.**



Para dimensiones superiores, la relación formal se mantiene: a cada punto **P** en el dominio tridimensional se le asocia un número, el valor de la función en ese punto. Pero la representación de este valor paralelo a un eje coordenado adicional está más allá de nuestra capacidad. Sin embargo, existe un útil artificio, especialmente para las funciones continuas de tres y más variables. Pensemos ahora en una función definida en algún dominio tridimensional —esto es, en algún volumen en el espacio. Ahora pasemos entre estos puntos y tracemos una delgada línea que una todos los puntos **P** para los cuales, por ejemplo, $f(\mathbf{P}) = 5$. Es decir, fijemos nuestra atención sobre un subconjunto de los puntos donde f está definida, a saber, aquéllos en los cuales su valor es 5. Entonces, esto da un conjunto de puntos caracterizados por

$$f(x, y, z) = 5.$$

Si pensamos que esta relación se resuelve para z, observamos que define una superficie. Esta superficie recibe el nombre de **superficie de nivel** de la función. Haciendo

$$f(x, y, z) = C$$

se da una nueva superficie de nivel para cada valor de C. Examinando estas superficies de nivel se obtiene alguna información acerca del comportamiento de la función.

Esta idea también es útil en dos dimensiones. Aquí la geometría tal vez es un poco más clara. Grafiquemos

$$z = f(x, y)$$

como una superficie arriba de un dominio en el plano x, y; en la misma forma que un mapa en relieve de un área montañosa se representa arriba de una base plana al nivel del mar. Si nos imaginamos un plano paralelo al plano de la base que corta esta superficie a una altura C, la curva en la cual la corta está dada por

$$f(x, y) = C.$$

Esta expresión puede representarse como una curva en el plano xy. Para diferentes valores de C se obtienen curvas diferentes, cada una de las cuales es una curva de nivel. Esto es precisamente lo que hace un cartógrafo cuando traza un mapa de contornos. Las líneas que representan los contornos son las curvas de nivel del relieve terrestre que se representan en el mapa.

EJERCICIOS A

1. ¿Cómo debe definirse $f(0,0)$ para hacer que f sea continua en el origen?
   (*a*) $x^3/(x^2 + y^2)$ (*b*) $|x|^{1+\epsilon}y/\sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}$
   (*c*) $|y|^{1+\epsilon}x/(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y)$ (*d*) $(1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2})/(x^2 + y^2)$
2. Trazar las curvas de nivel para cada una de las funciones siguientes:
   (*a*) $\log(x^2 + y^2)$ (*b*) $e^{x^2+y^2}$
   (*c*) $e^{x^2} \cdot e^{y}$ (*d*) $e^{-1/|x-y|}$
   (*e*) $x + y - [x + y]$ (los corchetes indican la función máximo entero)
   (*f*) $(2x + 2y)/(x^2 + y^2)$ (*h*) $\sqrt{1 - x^2 + y}$
   (*i*) Si se conocen las curvas de nivel de una función, ¿se conoce la función? [Ver los ejercicios (*a*) y (*b*) anteriores] ¿Qué otra cosa es necesario conocer?
3. ¿Dónde son discontinuas $x + y - [x + y]$ y $[x + y] + [-x - y]$?
4. Si f es continua en una región D y positiva en un punto $\mathbf{P}_0$ de D, demuestre que hay una vecindad de $\mathbf{P}_0$ en la que f es positiva.
5. ¿Bajo qué condiciones $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})|$ será menor que 10^{-10}?
   (*a*) $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
   (*b*) $x^2 + xy + y^2$ en el círculo $|x^2 + y^2| \leq 100$.

EJERCICIOS B

1. Supóngase que f es continua en una región y no es cero. Demostrar que tiene solamente un signo en esta región.
2. Sea f definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & x^2 + y^2 < 1 \\ \exp\{-(x^2 + y^2 - 1)^{-1}\} & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$
   (*a*) ¿Es f uniformemente continua en todo círculo?
   (*b*) ¿Es uniformemente continua en E_2?

3. Sea f definida por

$$f(x, y) = (1 - \cos \sqrt{xy})/y \qquad y \neq 0.$$

¿Es posible definir f cuando $y = 0$ de modo que sea continua?

4. Sea f una función de una sola variable real la cual tiene una derivada continua en $\{a < x < b\}$. Definir g en el cuadrado $\{a < x < b, a < y < b\}$ excepto cuando $x = y$ por

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

¿Puede definirse g para $x = y$ de modo que sea continua en el cuadrado?

5. Sea f definida por $f(x,y) = (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)/(\tan x - \tan y)$ en el cuadrado $\{0 < x < \pi/4, 0 < y < \pi/4\}$ excepto cuando $x = y$. ¿Puede definirse f para $x = y$ de modo que sea continua en el cuadrado?

EJERCICIOS C

1. Sea f una función continua acotada de valores reales definida en una región D. Si $M = \sup_D f$, $m = \inf_D f$, y $m < \mu < M$, entonces existe un punto $\mathbf{P}$ en D para el cual $f(\mathbf{P}) = \mu$. (*Sugerencia:* Comprobar la definición de región.)

2. Sea f uniformemente continua en la esfera $\{|\mathbf{P}| < 1\}$ en un espacio vectorial Euclideano. Por tanto, existe un δ uniforme tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon$ siempre que $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$, si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ están en la esfera. Demostrar que f puede definirse sobre la frontera $\{|\mathbf{P}| = 1\}$ de modo que sea uniformemente continua en la esfera cerrada $\{|\mathbf{P}| \leq 1\}$ y que, de hecho, entonces se tiene $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| \leq \epsilon$ siempre que $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$ (la misma δ) si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ están en la esfera cerrada.

3. Sea $\mathbf{F}$ una función continua de valores vectoriales cuyo dominio es una región cerrada D y sea $\mathbf{G}$ una función de valores vectoriales cuyo rango está contenido en D. Entonces, si $\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0} \mathbf{G}(\mathbf{P}) = \mathbf{A}$, demostrar que

(*a*) $\mathbf{A}$ está en D (*b*) $\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0} \mathbf{F}[\mathbf{G}(\mathbf{P})] = \mathbf{F}(\mathbf{A})$

4. Sea f una función de valores reales definida sobre una región D. Si existe un número α, $0 < \alpha \leq 1$ y un número M tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < M|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^\alpha$, se dice que f satisface una **condición de Hölder** con exponente α. Demostrar que si f y g satisfacen una condición de Hölder sobre D, entonces también la satisfacen:

(*a*) $f \pm g$ (*b*) fg (*c*) f/g

si g es acotada fuera de cero en D.

10

Funciones diferenciables

10.1 DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función de dos variables definida en una vecindad de un punto $\mathbf{P}_0 = (a, b)$. Si hacemos $y = b$, entonces f se transforma en una función de una sola variable x en una vecindad de $x = a$. Podemos preguntar si esta función de una sola variable tiene una derivada en a. Esto significa, por supuesto, que estamos preguntando acerca de la existencia de

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Si este límite existe se llamará **derivada parcial** de f respecto a x en (a, b) y su valor se denotará por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad f_x(a, b) \qquad f_1(a, b)$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{P}_0) \qquad f_x(\mathbf{P}_0) \qquad f_1(\mathbf{P}_0).$$

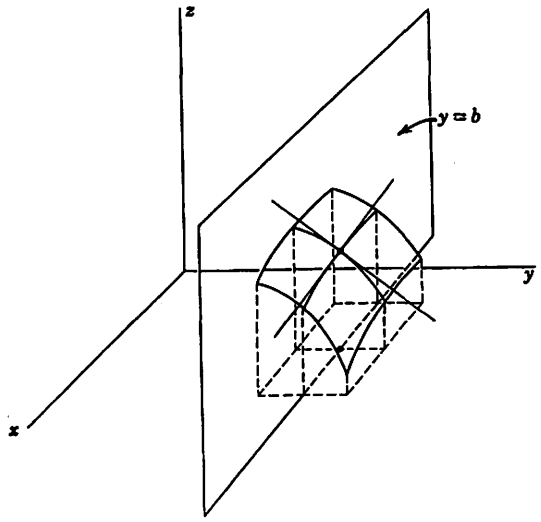
Sobre el conjunto de puntos $\mathbf{P}$ donde $f_1(\mathbf{P})$ existe, estos valores definen una función la cual se llamará **derivada parcial** de f respecto a x y se denotará por

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_x, \text{o bien } f_1.$$

En forma semejante, si

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

existe, se denota por $f_2(a, b)$, $f_2(\mathbf{P}_0)$ y así sucesivamente. La función definida por la parcial respecto a y se denota por f_y, f_2 o bien $\frac{\partial f}{\partial y}$.



Las derivadas parciales heredan su significado geométrico del correspondiente a las derivadas ordinarias. La derivada de una función de una variable, F, en un punto a es la pendiente de la línea tangente a la curva descrita por $z = F(x)$ en $x = a$. Así, $f_1(a, b)$ es la pendiente de la línea tangente a la curva descrita por $z = f(x, b)$ en el plano descrito por $y = b$ —es decir, la curva de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = b$.

Las segundas derivadas se definen como las derivadas de las primeras derivadas y las terceras derivadas como derivadas de las segundas derivadas. El orden de una derivada es el número total de derivaciones realizadas para calcular la derivada en cuestión. La notación de las derivadas es la siguiente:

$$\text{Primeras derivadas} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = f_2 \end{cases}$$

$$\text{Segundas derivadas} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx} = f_{21} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy} = f_{12} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22} \end{cases}$$

$$\text{Terceras derivadas} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} = f_{111} \\ \vdots \end{cases}$$

EJEMPLO 1. Calcular las derivadas parciales de la función f dada por

$$f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \operatorname{sen} y + \cos xy.$$

Solución:

$$f_1(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3 \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} xy$$

$$f_2(x, y) = 2x^3y + x^4 \cos y - x \operatorname{sen} xy$$

$$f_{11}(x, y) = 6xy^2 + 12x^2 \operatorname{sen} y - y^2 \cos xy$$

$$f_{12}(x, y) = 6x^2y + 4x^3 \cos y - \operatorname{sen} xy - xy \cos xy$$

$$f_{21}(x, y) = 6x^2y + 4x^3 \cos y - \operatorname{sen} xy - xy \cos xy$$

$$f_{22}(x, y) = 2x^3 - x^4 \operatorname{sen} y - x^2 \cos xy$$

$$f_{111}(x, y) = 6y^2 + 24x \operatorname{sen} y + y^3 \operatorname{sen} xy$$

$$\vdots$$

EJEMPLO 2. Supóngase que existe una función z que satisface la ecuación

$$x^3 - xy^2 + yz^2 - z^3 = 5$$

y que las derivadas parciales de z existen. Calcular z_1 y z_2.

Solución. Derivando con respecto a x, se obtiene

$$3x^2 - y^2 + 2yzz_1 - 3z^2z_1 = 0,$$

de la cual se obtiene

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - 3x^2}{2yz - 3z^2} \qquad \text{si } 2yz \neq 3z^2.$$

En forma semejante,

$$z_2 = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy - z^2}{2yz - 3z^2} \qquad \text{si } 2yz \neq 3z^2.$$

EJEMPLO 3. Supóngase que u y v son dos funciones dadas de x y y las cuales satisfacen las ecuaciones

$$u^2 - v^2 = x$$

$$2uv = y.$$

Calcular u_1, u_2, v_1 y v_2, suponiendo que existen.

Solución. Derivando con respecto a x, se obtiene

$$2uu_1 - 2vv_1 = 1$$
$$vu_1 + uv_1 = 0.$$

Resolviendo para u_1 y v_1 mediante la regla de Cramer se llega a

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 0 & u \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{u}{2(u^2 + v^2)},$$

y

$$v_1 = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ v & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{-v}{2(u^2 + v^2)}.$$

Derivando el sistema original con respecto a y, puede resolverse para u_2 y v_2 para obtener

$$u_2 = \frac{v}{2(u^2 + v^2)}$$

y

$$v_2 = \frac{u}{2(u^2 + v^2)}.$$

Antes de seguir adelante debe hacerse notar que aunque nuestra discusión y nuestros ejemplos se refieren únicamente a funciones de dos variables independientes, sin embargo, las ideas se extienden inmediatamente para las funciones en dimensiones superiores. Por ejemplo, si f está definida en una vecindad tridimensional de un punto $\mathbf{P}_0 = (a, b, c)$, entonces

$$f_1(\mathbf{P}_0) = f_x(\mathbf{P}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{P}_0) = f_1(a, b, c) = f_x(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)$$

cada una de las cuales denota las derivadas de f respecto a x en $x = a$, manteniendo fijas y y z en los valores b y c, respectivamente. De modo semejante se definen $f_2(\mathbf{P}_0)$ y $f_3(\mathbf{P}_0)$, junto con los demás símbolos notacionales para los mismos valores. Por supuesto que estas observaciones, lo que el estudiante comprenderá fácilmente, se aplican con igual propiedad a las funciones en los espacios de cuatro o más dimensiones.

En el caso de una función de una sola variable, el estudiante recordará (Teorema 3.5a) que la existencia de una derivada en un punto a implica la continuidad de la función en a. Sin embargo, una función de varias variables puede tener una derivada parcial en un punto; incluso puede tener todas sus parciales existiendo en un punto $\mathbf{P}$ y, no obstante, puede no ser continua allí. La razón es la siguiente: La existencia de la derivada f_1 en un punto $\mathbf{P}$ tiene solamente algo que decir acerca del comportamiento de la función f sobre una sola línea que pasa por $\mathbf{P}$, a saber, la línea que pasa por $\mathbf{P}$ paralela al eje x. De manera semejante, la existencia de f_2 dice que f debe comportarse muy bien, en particular debe ser continua, a lo largo de la línea paralela al eje y. En todas las demás partes entre estas líneas, la función puede comportarse muy mal. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

EJEMPLO 4. Sea f dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución. En principio, evidentemente f no es continua en el origen, como se vio en el último capítulo (Ejemplo 2, Sección 9.3.) Pero

$$f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

y

$$f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

Como se vio en el Ejemplo 1, $f_{12} = f_{21}$. Demostraremos ahora que éste no es siempre el caso.

EJEMPLO 5. Definir f en todo el plano por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solución. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, calculamos que

$$f_1(x, y) = y\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

$$f_2(x, y) = x\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right].$$

En particular, $$f_1(0, y) = -y, f_2(x, 0) = x$$

Además, $$f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

y $$f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Así que $$f_{12}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_1(0, y) - f_1(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

y $$f_{21}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_2(x, 0) - f_2(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Sin embargo, ésta es una situación patológica que no se presenta con frecuencia. El siguiente teorema demuestra que, bajo restricciones razonablemente ligeras, las dos derivadas son iguales.

10.1a Teorema. Considérese que f, f_1, f_2 y f_{12} existen y son continuas en una vecindad de un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$. Entonces $f_{21}(\mathbf{P}_0)$ existe y $f_{12}(\mathbf{P}_0) = f_{21}(\mathbf{P}_0)$.

Demostración. Sea $\phi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$, donde k y y se mantienen fijos. Entonces, para una x lo suficientemente cercana a x_0 y una k pequeña, ϕ es una función de la única variable x cercana a x_0. A esta función se le aplica el teorema del valor medio para funciones de una variable entre x_0 y $x_0 + h$:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h\phi'(x_0 + \theta_1 h),$$

donde el apóstrofo (') denota la derivación respecto a x y donde $0 < \theta_1 < 1$. Así,

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h[f_1(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_1(x_0 + \theta_1 h, y_0)].$$

Ahora bien, para cada h apliquemos nuevamente el teorema del valor medio a la segunda variable:

$$\begin{aligned}\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) &= hk[f_{12}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)] \\ &= hk[f_{12}(x_0, y_0) + \eta],\end{aligned}$$

donde $\eta \to 0$ conforme $h \to 0$ y $k \to 0$ de cualquier manera, puesto que f_{12} es continua.

Recordando el significado de ϕ, esta expresión puede reescribirse como

$$\begin{aligned}&[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] \\ &\qquad = hk[f_{12}(x_0, y_0) + \eta]\end{aligned}$$

Dividiendo entre k y haciendo que $k \to 0$, se obtiene

$$f_2(x_0 + h, y_0) - f_2(x_0, y_0) = h[f_{12}(x_0, y_0) + \eta].$$

Entonces, dividiendo entre h, conforme $h \to 0$,

$$f_{21}(x_0, y_0) = f_{12}(x_0, y_0). \qquad \blacksquare$$

Debe aclararse que esto basta para justificar el intercambio del orden en la derivación para las derivadas mixtas de todos los órdenes. Por ejemplo, para demostrar que $f_{212} = f_{221}$, aplicamos el teorema a f_2. En general, es posible demostrar por inducción que si todas las parciales hasta el orden n son continuas, entonces todas las derivadas parciales mixtas hasta el orden n son independientes del orden de derivación.

EJERCICIOS A

1. Calcular las derivadas parciales hasta el orden 2 de las siguientes funciones:
   (*a*) $\log(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ (*b*) $e^{z^2+w^2}\log(x^2 + y^2)$
   (*c*) $x^3 + 7x^2y - y^3$ (*d*) $\dfrac{e^x}{e^y - e^z}$
   (*e*) $\operatorname{ang\,sen}\dfrac{x^2}{y^2}$ (*f*) $e^{-x}\operatorname{sen} y$
   (*g*) $\dfrac{x - y}{x + y}$ (*h*) x^y
2. (*a*) Hacer $u = \log 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ y demostrar que $u_{11} + u_{22} = 0$.
   (*b*) Hacer $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y demostrar que $u_{11} + u_{22} + u_{33} = 0$.
   (*c*) Hacer $u = x^2y + y^2z + z^2x$ y demostrar que $u_1 + u_2 + u_3 = (x + y + z)^2$.
3. Supóngase que existe una función z que satisface la ecuación que se menciona en cada caso. Encontrar sus parciales de primer orden.
   (*a*) $x^3 + y^3 + z^3 + \operatorname{sen} xz + \cos yz = 15$ (*b*) $e^z + x^2\log z + y = 0$
4. Supóngase que existen funciones u, v que satisfacen las siguientes ecuaciones. Calcular sus parciales de primer orden.
   (*a*) $\begin{cases} u\cos v = x + 1 \\ u\operatorname{sen} v = x + y \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} x^2 - y\cos uv + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen} uv = 8 - 2z^2 \\ xy - \operatorname{sen} u\cos v + z = 0. \end{cases}$
5. En el Ejercicio 4*a*, considérense x y y como funciones de u y v. Calcular sus parciales de primer orden.

EJERCICIOS B

1. Definir la función f por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{ang\,tan} y/x - y^2 \operatorname{ang\,tan} x/y & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

   Demostrar que $f_{12}(0,0) \neq f_{21}(0,0)$.
2. Si $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, considérense r y θ como funciones de x y y y demostrar que

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2}.$$

10.2 DIFERENCIABILIDAD. DIFERENCIALES TOTALES

En esta sección se investigará la dificultad indicada en el Ejemplo 4 de la Sección 10.1. Puesto que la continuidad de f en un punto requiere que todos los puntos cercanos den origen a valores de la función cercanos y la existencia de las parciales no comprende todos los puntos cercanos, volveremos nuestra atención hacia algo que sí comprende todos los puntos cercanos: la diferencial.

En el caso de una variable, la diferencial proporciona una aproximación del cambio en el valor de la función debido a un cambio en la variable independiente. Es decir, si f es derivable en x_0, entonces

$$dy = f'(x_0)dx$$

es aproximadamente igual a

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

De hecho,
$$\Delta y = f'(x_0)dx + \epsilon\, dx,$$

donde $\epsilon \to 0$ conforme $dx \to 0$. (Recuérdese que dx y dy fueron nuevas variables introducidas con el origen en el punto $[x_0, f(x_0)]$.)

Como se vio en el último ejemplo, f no necesita ser continua para que f_1 y f_2 existan en un punto. De aquí que, para extender la idea de diferencial, es necesario requerir de la función algo más que el tener simplemente parciales de primer orden. Con la idea de definir, como conclusión, una diferencial, primero definiremos una función diferenciable de dos (o más) variables. (En esta discusión, el estudiante reconocerá que $h = dx$ y $k = dy$.)

Supóngase que f está definida en una vecindad de un punto $\mathbf{P}_0 = (a, b)$ y existen números A y B tales que

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + \eta\sqrt{h^2 + k^2},$$

donde $\eta \to 0$ conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Entonces se dice que f es **diferenciable** en $\mathbf{P}_0$. Además, se dice que f es **diferenciable** en una región si es diferenciable en cada punto de la región. Por supuesto que aquí, en general, A y B dependerán de $\mathbf{P}_0$, pero deben ser independientes de h y k. Si A y B dependen continuamente de $\mathbf{P}_0$ en un conjunto D, se dice que f es **continuamente diferenciable** en D.

La diferenciabilidad es una condición más fuerte que la existencia de las derivadas parciales; porque si una función es diferenciable en un punto, fácilmente se ve que es continua y que ambas derivadas parciales existen. Este es el contenido de los dos teoremas siguientes.

10.2a Teorema. Si f es diferenciable en $\mathbf{P}_0 = (a, b)$, entonces f es continua en $\mathbf{P}_0$.

Demostración. Para $\mathbf{P} = (x, y)$ en una vecindad de $\mathbf{P}_0 = (a, b)$ se tiene, debido a la definición de diferenciabilidad

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}_0) = A(x - a) + B(y - b) + \eta\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Ahora bien $\quad |x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$

y $\quad |y - b| \leq |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|.$

De modo que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}_0)| \leq \{|A| + |B| + |\eta|\}\,|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|.$ ∎

10.2b Teorema. Si f es diferenciable en $\mathbf{P}_0 = (a, b)$, entonces las parciales de primer orden existen en $\mathbf{P}_0$ y

$$f_1(\mathbf{P}_0) = A$$
$$f_2(\mathbf{P}_0) = B.$$

Demostración. Del cociente diferencia.

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{Ah + \eta\sqrt{h^2}}{h} = A + \eta\frac{|h|}{h}.$$

Así,

$$\left|\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} - A\right| = |\eta| \to 0 \text{ conforme } h \to 0.$$

Por tanto, $f_1(\mathbf{P}_0)$ existe y es igual a A. De modo semejante,

$$f_2(\mathbf{P}_0) = B.$$ ∎

Si f es una función diferenciable de dos variables (x, y) en un punto $\mathbf{P}_0$, entonces la expresión

$$df = dz = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{P}_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{P}_0)\,dy$$

se llama la **diferencial total,** o más simplemente la **diferencial,** de f en $\mathbf{P}_0$. El símbolo dz se inspira por la notación común $z = f(x, y) = f(\mathbf{P})$.

La diferencial total da, para una función diferenciable, una aproximación al cambio Δz en z, debido al cambio dx en x y dy en y. El sentido en el cual aproxima el cambio en la función f —es decir, en z— se precisa por la definición de una función diferenciable.

Con frecuencia se escribe simplemente

(1)
$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

entendiéndose que las derivadas parciales se evalúan en algún punto $\mathbf{P}_0$: entonces la fórmula da la diferencial de f en $\mathbf{P}_0$.

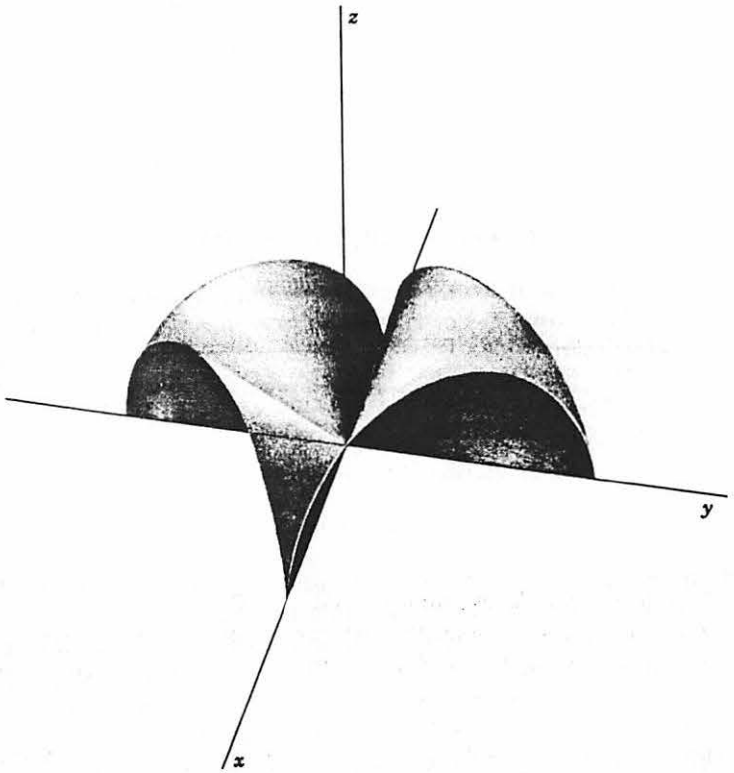
Como en el caso de funciones de una variable, se introducen nuevas coordenadas, con origen en el punto (a, b, c) donde $c = f(\mathbf{P}_0) = f(a, b)$. Estas nuevas coordenadas, a saber x-a, y-b, z-c, se denotan por dx, dy, dz, respectivamente. Entonces (1) se transforma en la ecuación de un plano que pasa por el origen (esto es, en el espacio dx, dy, dz). Su ecuación en las coordenadas originales es entonces

(2)
$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b).$$

Este plano se llama **plano tangente** a la superficie S dada por $z = f(x, y)$ en el punto $\mathbf{P}_0$.

Se deduce (ver Sección 8.5) que los números directores de la normal a S en $\mathbf{P}_0$ son $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$.

Es evidente que para escribir la expresión formal (1), la cual recibe el nombre de la diferencial, solamente es necesario poder calcular las dos derivadas parciales que contiene. ¿Entonces por qué nos limitamos por la restricción adicional de que la función f sea diferenciable en el sentido técnico en el cual se definió la diferenciabilidad? La razón es que realmente es en la propiedad de la diferenciabilidad en la cual estamos interesados y que para tales funciones, la diferencial es una expresión útil, básicamente porque proporciona una buena aproximación para Δz.



En términos geométricos heurísticos, esperamos que el plano tangente dado por (2) (el cual, después de todo, es una realización geométrica de la diferencial) esté muy próximo a la superficie descrita por $z = f(x, y)$ en el sentido de que el ángulo entre el plano tangente y la superficie debe ser cero. Una ojeada a la gráfica de $\sqrt{|xy|}$ muestra el comportamiento de

esta función cerca del origen. Tiene $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, de modo que formalmente $dz = 0$; es decir, el «plano tangente» es el plano xy dado por $z = 0$. Sin embargo, a lo largo de las líneas $y = \pm x$, la altura de la superficie arriba del plano xy está dado por $z = |x|$. Por tanto, a lo largo de estas líneas la superficie forma un ángulo arc tan $1/\sqrt{2}$ con el plano xy. En tal situación, el plano determinado por la diferencial formal no se llama plano tangente. En el caso de que una función sea diferenciable en un punto, puede demostrarse que, en un significado preciso, el ángulo entre el plano tangente y la superficie es cero en el punto de tangencia (ver Ejercicio C1).

Quisiéramos enfatizar el hecho de que la frase «f tiene una diferencial» se reserva para funciones diferenciables y que no debe admitirse la expresión (1) como una diferencial a menos que f sea diferenciable.

A continuación enfocaremos nuestra atención hacia un criterio para determinar cuándo una función es diferenciable.

10.2c Teorema. Supóngase que f tiene primeras derivadas parciales continuas en una región D. Entonces f es diferenciable en cada punto D.

Demostración. Sea $\mathbf{P}_0 = (a, b)$ un punto de D. Existe una vecindad N de $\mathbf{P}_0$ la cual está en D. Entonces, para h y k lo suficientemente pequeños, $\mathbf{P} = (a + h, y + k)$ está en N.

Sea $\Delta f = f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}_0) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$.

Entonces $\Delta f = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b)]$.

Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable a cada una de las diferencias del segundo miembro, se obtiene

$$\Delta f = kf_2(a + h, y_1) + hf_1(x_1, b).$$

Por hipótesis, f_1 y f_2 son continuas en $\mathbf{P}_0$, de modo que

$$f_2(a + h, y_1) = f_2(a, b) + \eta_2$$

y

$$f_1(x_1, b) = f_1(a, b) + \eta_1,$$

donde tanto η_1 como η_2 tienden a cero conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Así que

$$\Delta f = hf_1(a, b) + kf_2(a, b) + \eta_1 h + \eta_2 k.$$

Por la definición de diferenciabilidad, solamente tiene que demostrarse que

$$\frac{(\eta_1 h + \eta_2 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0.$$

Pero $\left|\frac{(\eta_1 h + \eta_2 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq |\eta_1| + |\eta_2| \to 0$ conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. ∎

Todas las ideas de esta sección se extienden inmediatamente hacia las dimensiones superiores. Así que f es diferenciable cerca de un punto $\mathbf{P}_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en el espacio n si existe una vecindad de $\mathbf{P}_0$ en la cual

$$f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{P}_0) + A_1h_1 + A_2h_2 + \cdots + A_nh_n + \eta\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2},$$

tal que $\eta \to 0$ conforme

$$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0,$$

donde $$\mathbf{P} = (a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n).$$

En este caso, sus parciales de primer orden existen en $\mathbf{P}_0$ y

$$f_1(\mathbf{P}_0) = A_1, \ldots, f_n(\mathbf{P}_0) = A_n.$$

La diferencial total en $\mathbf{P}_0$ es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n,$$

donde las derivadas se evalúan en $\mathbf{P}_0$. El hiperplano tangente a la hipersuperficie $z = f(\mathbf{P})$ en $\mathbf{P}_0$ es

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - a_n),$$

donde $z_0 = f(\mathbf{P}_0)$. Finalmente, una función es diferenciable en una región si todas sus parciales de primer orden son continuas allí. (Ver Ejercicio B4.)

EJERCICIOS A

1. Calcular las diferenciales de las funciones dadas por cada una de las siguientes expresiones:

   (*a*) $f(x, y) = x/y$ (*b*) $f(x, y) = \text{ang tan } y/x$

   (*c*) $f(x, y) = \log 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ (*d*) $f(x, y) = 2xy + y^2$

   (*e*) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $z = f(x,y)$ en el punto (1,1) para cada función del Ejercicio 1(*a*), (*b*) (*c*) y (*d*) anteriores. En 1(*e*) escribir la ecuación del hiperplano tangente en $(1, 1, 1, 1/\sqrt{3})$.

3. Comparar df con Δf en 1(*a*) y (*d*) anteriores.

4. El período de un péndulo está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Aproximar el error que se comete al calcular el período si la longitud l se conoce como $8 \pm .01$ pies y el valor de g se toma como 32 pies/seg² en lugar del correcto (¡sic!) de 31.8.

EJERCICIOS B

1. Completar la discusión de la función dada por $\sqrt{|xy|}$ empezada en el texto. Demostrar que la función es continua pero no diferenciable en (0,0).

2. Demostrar que la función f definida por $f(x) = \begin{cases} xy/\sqrt{x^2 + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ es continua pero no diferenciable en (0,0), aunque sus dos derivadas parciales existen allí.

3. Sea f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen } 1/\sqrt{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Demostrar que f es diferenciable en todas partes y que las derivadas parciales son acotadas pero discontinuas en (0,0).

4. Sea f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen } 1/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Demostrar que f es diferenciable en todas partes, pero tiene derivadas parciales no acotadas.

5. Determinar los valores de α para los cuales f es diferenciable en (0.0) cuando

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha\,\text{sen } 1/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

6. Definir f por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{tanto } x \text{ como } y \text{ racionales} \\ 0 & \text{en todos los demás casos} \end{cases}$$

   Demostrar que f es continua solamente en un punto y es diferenciable allí.

7. Sea f una función diferenciable de una variable x, en un intervalo I: $\{a < x < b\}$. Definir la función g en la cinta S: $\{a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ por $g(x, y) = f(x)$ y demostrar que g es diferenciable en S.

EJERCICIOS C

1. Sea f diferenciable en (x_0, y_0). Sea $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, donde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Si $\mathbf{P}$ es otro punto sobre la superficie S descrita por $z = f(x, y)$ y α es el ángulo entre el vector $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ y el plano tangente a S en $\mathbf{P}_0$, demostrar que

$$\alpha \to 0 \quad \text{conforme} \quad \mathbf{P} \to \mathbf{P}_0.$$

   Inversamente, demostrar que si $\alpha \to 0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{P}_0$.

10.3 EL VECTOR GRADIENTE. EL OPERADOR DEL. DERIVADAS DIRECCIONALES

En esta sección haremos nuestros cálculos en tres dimensiones, aunque saltará a la vista, conforme avancemos, que todos los resultados se cumplen para espacios de cualquier número finito de dimensiones.

Sea f diferenciable en un punto $\mathbf{P} = (x, y, z)$. Entonces el **vector gradiente** de f en $\mathbf{P}$ se denota por $\nabla f(\mathbf{P})$ y se define por la fórmula

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

donde cada una de las parciales se evalúa en $\mathbf{P}$. El símbolo ∇f se lee como gradiente de f o bien del f. En ocasiones, ∇f también se denota por **grad** f. En muchos casos es conveniente pensar respecto a ∇f como un producto formal del escalar f y el «vector» del, definido por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Entonces ∇f puede escribirse como

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es la representación vectorial de un punto $\mathbf{P}$, puede hacerse

$$d\mathbf{P} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

y representar los puntos cercanos en la forma $\mathbf{P} + d\mathbf{P}$, donde, por supuesto,

$$\mathbf{P} + d\mathbf{P} = (x + dx)\mathbf{i} + (y + dy)\mathbf{j} + (z + dz)\mathbf{k}.$$

En términos de esta notación, pueden ponerse los resultados de la última sección en forma muy compacta, que recuerda las fórmulas para las funciones de una dimensión. En particular, la diferenciabilidad puede definirse de la manera siguiente: Una función f es diferenciable en $\mathbf{P}$ si

$$\Delta f = f(\mathbf{P} + d\mathbf{P}) - f(\mathbf{P}) = \nabla f \cdot d\mathbf{P} + \eta|d\mathbf{P}|,$$

donde $\eta \to 0$ conforme $|d\mathbf{P}| \to 0$. La diferencial puede expresarse como

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{P}.$$

La nueva notación también se adapta con mucha propiedad a la investigación de un nuevo concepto, la idea de derivada direccional. Sea $\boldsymbol{\alpha}$ un vector unitario

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1.$$

(Con frecuencia, a un vector unitario se le dará el nombre de **dirección**). Entonces, por **derivada direccional** de f en $\mathbf{P}$ en la dirección $\boldsymbol{\alpha}$ se entiende

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{P} + h\boldsymbol{\alpha}) - f(\mathbf{P})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h},$$

si el límite existe. Cuando existe, la derivada direccional se denotará por $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f$, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ o bien $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\boldsymbol{\alpha}}$ —generalmente en la primera forma.

10.3a Teorema. Si f es diferenciable en un punto $\mathbf{P}$, entonces $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f$ existe para todos los vectores unitarios $\boldsymbol{\alpha}$, y

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)f \equiv \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

Demostración. Por la definición de diferenciabilidad y el Teorema 10.2b,

$$\Delta f = f(\mathbf{P} + h\boldsymbol{\alpha}) - f(\mathbf{P}) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} h + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} h + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z} h + \eta|h|,$$

donde $\eta \to 0$ conforme $h \to 0$. Dividiendo entre h y tomando límites se llega al resultado. ∎

Este teorema nos proporciona un medio para investigar el significado geométrico del vector gradiente. Sea θ el ángulo entre ∇f en un punto $\mathbf{P}$ y la dirección dada por $\boldsymbol{\alpha}$. Entonces se tiene

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f = \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla f = |\nabla f| \cos\theta.$$

Esta expresión tomará un valor máximo (en un punto fijo dado $\mathbf{P}$, por supuesto) si $\cos\theta = 1$ — es decir, si $\boldsymbol{\alpha}$ y ∇f tienen la misma dirección. Puesto que una derivada representa una razón de cambio, se observa que esta razón es máxima cuando la derivada se toma en la dirección de ∇f.

En otra forma, puede verse que, para cualquier dirección $\boldsymbol{\alpha}$ ortogonal a ∇f,

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$$

Esto es, la razón de cambio en esta dirección es cero. Entonces, la totalidad de los vectores $\mathbf{P}_0 + t\boldsymbol{\alpha}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es normal a ∇f, da el plano tangente a la superficie $f = c$, lo cual implica que ∇f es normal a la superficie $f = c$, puesto que es ortogonal al plano tangente. Estas ideas se discutirán con mayor cuidado cuando consideremos las funciones implícitas.

Para cada $\boldsymbol{\alpha}$ fijo, la derivada direccional $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} f$ define una nueva función de la cual, a su vez, puede tomarse una derivada direccional. Por lo general se calcularán estas derivadas direccionales superiores en la misma dirección de $\boldsymbol{\alpha}$. Por ejemplo,

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}^2 f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}, \text{o bien} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_{\boldsymbol{\alpha}}$$

se usarán para denotar la segunda derivada direccional en la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$.

10.3b Teorema. Supóngase que f tiene segundas parciales continuas en una vecindad de un punto **P**. Entonces en **P**,

$$\nabla_\alpha^2 f = (\alpha \cdot \nabla)^2 f.$$

Demostración. En todo punto de la vecindad

$$\nabla_\alpha f = (\alpha \cdot \nabla) f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Bajo la hipótesis del teorema, f_1, f_2 y f_3 son todas diferenciales. De aquí que la derivada direccional de $\nabla_\alpha f$ está dada por

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha^2 f &= \alpha_1(\nabla_\alpha f_1) + \alpha_2(\nabla_\alpha f_2) + \alpha_3(\nabla_\alpha f_3)\\ &= \alpha_1^2 f_{11} + \alpha_1\alpha_2 f_{12} + \alpha_1\alpha_3 f_{13}\\ &\quad + \alpha_1\alpha_2 f_{21} + \alpha_2^2 f_{22} + \alpha_2\alpha_3 f_{23}\\ &\quad + \alpha_1\alpha_3 f_{31} + \alpha_2\alpha_3 f_{32} + \alpha_3^2 f_{33}.\end{aligned}$$

Dado que $f_{12} = f_{21}$, esto se transforma en

$$\alpha_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 2\alpha_1\alpha_3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + 2\alpha_2\alpha_3\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$$

$$= \left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = (\alpha\cdot\nabla)^2 f. \quad \blacksquare$$

10.3c Corolario. Supóngase que f tiene derivadas de n-ésimo orden continuas, cerca de **P**. Entonces la derivada direccional de n-ésimo orden existe en **P** para toda dirección α y

$$\nabla_\alpha^n f = (\alpha \cdot \nabla)^n f.$$

Demostración. Probar por inducción, a partir del Teorema 10.3b. $\blacksquare$

EJEMPLO. Encontrar la derivada direccional de $x^4 + x^3y + 2x^2z + y^5 \operatorname{sen} z + z^3$ en $(1, 2, 5)$ hacia el punto $(5, 0, 7)$.

Solución. Los números directores de la dirección que se menciona son $(4 - 2, 2)$; de aquí que el vector unitario en esa dirección es

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}.$$

Y $\nabla f = (4x^3 + 3x^2y + 4xz)\mathbf{i} + (x^3 + 8y^7 \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (2x^2 + y^8 \cos z + 3z^2)\mathbf{k}.$

Cuando se evalúa en $(1, 2, 5)$, se obtiene

$$\nabla f = 30\mathbf{i} + (1 + 1024 \operatorname{sen} 5)\mathbf{j} + (77 + 256 \cos 5)\mathbf{k}.$$

Entonces $$\nabla_\alpha f = \alpha \cdot \nabla f = \frac{60}{\sqrt{6}} - \frac{(1 + 1024 \operatorname{sen} 5)}{\sqrt{6}} + \frac{77 + 256 \cos 5}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{136 - 1024 \operatorname{sen} 5 + 256 \cos 5}{\sqrt{6}}.$$

10.4 FUNCIONES COMPUESTAS. LA REGLA DE LA CADENA

Si **F** es una función de valores vectoriales definida en una región D de un espacio vectorial Euclideano, podemos inquirir acerca de la existencia de las derivadas parciales, de las derivadas direccionales y de las diferenciales. Es evidente que los resultados de las secciones anteriores se extienden inmediatamente y que una condición necesaria y suficiente para que éstas existan para una función de valores vectoriales **F** es que existan para cada una de las componentes. Así que, si

$$\Phi = \phi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k},$$

donde ϕ, ψ y χ son funciones, por ejemplo de $\mathbf{Q} = (t, u, v, w)$, entonces $\partial\Phi/\partial t$ significa

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t + \Delta t, u, v, w) - \Phi(t, u, v, w)}{\Delta t}$$

si este límite existe; y una condición necesaria y suficiente para que este límite exista es que $\partial\phi/\partial t$, $\partial\psi/\partial t$, y $\partial\chi/\partial t$ todas existan.

Nuestro fin principal en esta sección es considerar qué forma toma la regla de la cadena (ver Sección 3.5) cuando se está tratando con funciones de vectores —es decir, funciones de varias variables reales. Por ejemplo, si f es una función de (x, y, z) y, a su vez, cada una de estas variables es una función de (t, u, v, w), entonces f se convierte en una función de (t, u, v, w) y se desea inquirir acerca de los métodos para calcular las parciales de f respecto a t, u, v y w. En la terminología vectorial, si f es una función de **P** en una región R y Φ es una función vectorial en D con valores en R, entonces tiene sentido discutir la función g definida en D por $g(\mathbf{Q}) = f[\Phi(\mathbf{Q})]$ y preguntar acerca de las parciales de g respecto a las componentes de **Q**.

Podríamos desarrollar nuestra discusión en términos generales, considerando Φ como un mapeo de E_m hacia E_n y f como una función definida en E_n. Sin embargo, para fijar ideas, y conservar sencillos los cálculos, tomaremos m como 4 y n como 3. Por tanto, seguiremos el modelo establecido de los párrafos precedentes donde $\mathbf{P} = (x, y, z)$ y $\mathbf{Q} = (t, u, v, w)$. Las extensiones hacia los demás casos serán evidentes a partir de esta discusión.

Una observación acerca de la notación: Bajo la sustitución $\mathbf{P} = \Phi(\mathbf{Q})$, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial \chi}{\partial t}\mathbf{k}.$$

Puesto que $\mathbf{P} = \Phi(\mathbf{Q})$ implica que $x = \phi(\mathbf{Q})$, $y = \psi(\mathbf{Q})$ y $z = \chi(\mathbf{Q})$, intercambiemos $\frac{\partial x}{\partial t}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, y así sucesivamente, de modo que,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\mathbf{k}.$$

Las demás parciales de $\mathbf{P}$ (es decir, de Φ) se expresan en forma semejante. También se escribe la diferencial $d\mathbf{P}$ en la forma

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w}\,dw.$$

10.4a Teorema. Sean f y g relacionadas por $g(\mathbf{Q}) = f(\Phi(\mathbf{Q}))$ como se describió anteriormente, donde f y Φ son diferenciables. Entonces

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}, \ldots,$$

esto es,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}, \ldots.$$

Demostración. Sean $\mathbf{Q} = (t, u, v, w)$ y $\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q} = (t + \Delta t, u, v, w)$ un punto cercano en D. Entonces Δg está definida por

$$\Delta g = g(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - g(\mathbf{Q})$$

y

$$\begin{aligned}\Delta x &= \phi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - \phi(\mathbf{Q})\\ \Delta y &= \psi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - \psi(\mathbf{Q})\\ \Delta z &= \chi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - \chi(\mathbf{Q}).\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\Delta g &= f(\phi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}), \psi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}), \chi(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q})) - f(\phi(\mathbf{Q}), \psi(\mathbf{Q}), \chi(\mathbf{Q}))\\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \eta|\Delta\mathbf{P}|,\end{aligned}$$

donde $\eta \to 0$ conforme $|\Delta\mathbf{P}| \to 0$, supuesto que f es diferenciable. Entonces

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = f_x\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y\frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z\frac{\Delta z}{\Delta t} + \eta\frac{|\Delta\mathbf{P}|}{\Delta t}.$$

Ahora bien, conforme $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{\partial x}{\partial t}, \ldots, \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \to \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

y $\eta \to 0$. Así, pasando al límite, se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f_x\frac{\partial x}{\partial t} + f_y\frac{\partial y}{\partial t} + f_z\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Obsérvese que la misma fórmula

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

se cumple sin importar las dimensiones de $\mathbf{P}$ o de $\mathbf{Q}$. En particular, si $\mathbf{Q}$ es unidimensional —es decir, si $\mathbf{Q} = t$— la fórmula se transforma en

$$g' = \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}f[x(t), y(t), z(t)] = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

En ocasiones es conveniente, y notacionalmente quizá un poco más sencillo, no introducir un nuevo símbolo g para la función f cuando se introducen las nuevas variables. Así, pensamos de f como una función de x, y, z. Entonces, cuando x, y, z se expresan en términos de t, u, v, w pensamos de f como una función de t, u, v, w. A partir de la fórmula maestra para la diferencial

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{P}$$

pueden obtenerse todas las parciales de f con respecto a cualquiera de las variables relacionadas. Así

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdots.$$

10.4b Observación. En particular, cuando f se expresa como una función de t, u, v, w, la fórmula diferencial

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{P}$$

es la expresión correcta para df en términos de las diferenciales dt, du, dv, dw, si, a su vez, $d\mathbf{P}$ se expresa en términos de éstas. Porque, por definición, si f se expresa en términos de t, u, v, w,

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw.$$

Entonces, por el teorema anterior,

$$\begin{aligned}df &= \left(\nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right)dt + \left(\nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\right)du + \left(\nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\right)dv\\ &\qquad + \left(\nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w}\right)dw\\ &= \nabla f \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w}\,dw\right)\\ &= \nabla f \cdot d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

EJEMPLO. Sea $F(x, y)$ una función diferenciable de (x, y) en el rectángulo $R: \{a < x < b, c < y < d\}$ y supóngase que existe una función y en $\{a < x < b\}$ con rango en $\{c < y < d\}$ para el cual $F(x, y) = 0$. Calcular $y' = dy/dx$ en $\{a < x < b\}$.

Solución. Obsérvese que

$$dF = F_y\, dy + F_x\, dx = 0.$$

De donde

$$F_y \frac{dy}{dx} + F_x = 0.$$

De aquí que

$$y' = \frac{dy}{dx} = -F_x/F_y,$$

en el supuesto de que $F_y \neq 0$. Esta condición, $F_y \neq 0$, es suficiente para garantizar que tal función y existe (ver Sección 11.6). Entonces la fórmula para y' es válida.

EJEMPLO. Supóngase que $F(u, v, x, y, z)$ y $G(u, v, x, y, z)$ representan funciones diferenciables de las cinco variables en una región R de un espacio-cinco. Supóngase además que u, v son dos funciones de (x, y, z) en el espacio-tres las cuales satisfacen las ecuaciones

$$F(u, v, x, y, z) = 0$$
$$G(u, v, x, y, z) = 0.$$

Calcular las parciales de u, v respecto a x.

Solución. Nótese que

$$dF = F_u\, du + F_v\, dv + F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = 0,$$

ya que y y z se mantienen fijos $dy = dz = 0$. Por tanto

$$F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} + F_x = 0.$$

En forma semejante,

$$G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} + G_x = 0.$$

O bien

$$F_u u_x + F_v v_x = -F_x$$
$$G_u u_x + G_v v_x = -G_x$$

Estas forman un par de ecuaciones lineales para la determinación de u_x y v_x. De aquí que, por la regla de Cramer,

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \qquad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},$$

en el supuesto de que el determinante del denominador no se hace cero. De aquí que las fórmulas son válidas en todo punto (x, y, z) en los cuales este determinante es diferente de cero. Tal determinante se llama **determinante Jacobiano** y se denota por

$$J\left(\frac{F, G}{u, v}\right) \text{ o bien } \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}.$$

Con esta notación pueden escribirse las fórmulas para u_x y v_x como

$$u_x = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \qquad v_x = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

De modo semejante

$$u_y = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \ldots.$$

Tal y como se verá (Sección 11.6), el hecho de que el determinante Jacobiano del denominador no se nulifique es suficiente para garantizar que existen funciones u y v las cuales satisfacen las ecuaciones $F = 0$, $G = 0$; entonces las fórmulas para sus derivadas parciales son como las dadas en los párrafos anteriores.

En general, si $F, G, \ldots, K$ son n funciones que dependen de las n variables $u, v, \ldots, z$ (y quizá también de otras variables),

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v & \cdots & F_z \\ G_u & G_v & & G_z \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ K_u & K_v & & K_z \end{vmatrix}$$

se llama **determinante Jacobiano** y se denota por

$$J\left(\frac{F, G, \ldots, K}{u, v, \ldots, z}\right) \text{ o bien } \frac{\partial(F, G, \ldots, K)}{\partial(u, v, \ldots, z)}.$$

EJERCICIOS A

1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en la dirección indicada:

   (*a*) $2x^2 - z^2 - y^2$ en (1, 2, 2) hacia (4, 5, 0).
   (*b*) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ en (1, 0, 1) hacia (2, 1, 2).
   (*c*) $x^2 + 2xy + y^2$ en (1, 1, 1) hacia (1, 5, 2).
   (*d*) $x^2 + 3xy + 4y^2$ (como una función de dos variables) en la dirección que forma un ángulo de 60° con el eje positivo x.
   (*e*) $x^2 + 4y^2 + e^x \cos y$ en (0, 0) en la dirección que forma un ángulo de 30° con el eje positivo x.
   (*f*) $x^2 + y^2 - 3xy$ en (1, 2) en la dirección de la tangente a la curva descrita por $y = x^3$.
   (*g*) $x^3 + 4xy + z^2 - 2yz$ en (1, 2, 1) en la dirección de la tangente a la curva descrita por $x = t$, $y = 2t^2$, $z = t^3$.
   (*h*) $x^2 - 8xy + z^2$ en lá dirección de la normal exterior a la superficie $x^2 + y^2 + z = 17$ en el punto (4, 4, 1).

2. Sea $\boldsymbol{\beta}$ cualquier vector y sea $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 + \boldsymbol{\beta}t$. Calcular $\dfrac{d}{dt} f\,[\mathbf{P}(t)]$, suponiendo que f es diferenciable.

3. Sea f una función diferenciable de (u, v) y sea g una función de x, y definida por $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Calcular g_x y g_y en términos de f_u y f_v.

4. Sea f una función diferenciable de (u, v, w) y sea g una función de (x, y) definida por $g(x, y) = f(x - y, x + y, 2x)$. Calcular g_x y g_y en términos de f_u, f_v y f_w.

5. Sea f una función diferenciable de (x, y) y sea g una función de (u, v, w) definida por

$$g(u, v, w) = f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w).$$

   Calcular g_u, g_v y g_w en términos de f_x y f_y.

6. Demostrar que si $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son funciones vectoriales diferenciables, entonces

   (*a*) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}$

   (*b*) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}$

   (*c*) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{H} + \mathbf{F} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \times \mathbf{H} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}$

7. Encontrar la fórmula para $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$.

EJERCICIOS B

1. Supóngase que se tienen funciones u, v, w de x, y las cuales satisfacen $F(u, v, w, x, y) = 0$, $G(u, v, w, x, y) = 0$ y $H(u, v, w, x, y) = 0$ en alguna región del espacio (x, y) donde F, G y H son funciones diferenciables en una región apropiada en el espacio (u, v, w, x, y). Calcular las parciales de u, v, w respecto a x y y.

2. Sean $F, G, \ldots, K, n$ funciones diferenciables de las $n + m$ variables $(u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m)$ y supóngase que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son funciones de $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ las cuales satisfacen las ecuaciones $F = 0$, $G = 0, \ldots, K = 0$. Demostrar formalmente que

$$\frac{\partial u_j}{\partial v_k} = -\frac{\partial(F, G, \ldots, K)}{\partial(u_1, \ldots, u_{j-1}, v_k, u_{j+1}, \ldots u_n)} \Big/ \frac{\partial(F, G, \ldots, K)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

3. Sea F una función diferenciable de (x, y, z) en una región R. Sea C, descrita por

$$\mathbf{P}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k},$$

   una curva diferenciable en R con tangente unitaria $\mathbf{T}$ en un punto $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t_0)$. Considérese que s representa la longitud de arco a lo largo de la curva. Demostrar que

$$\frac{d}{ds} F[\mathbf{P}(t_0)] = (\mathbf{T} \cdot \nabla)\, F(\mathbf{P}_0) = \nabla_{\mathbf{T}} F.$$

4. Sean u y v dos funciones diferenciables de (x, y) en una región R las cuales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en todo punto en R. Sea $\nabla_\alpha f$ la derivada direccional en la dirección que forma un ángulo α con el eje positivo x. Demostrar que

$$\nabla_x u = \nabla_{\alpha + \pi/2}\, v$$

   para todo punto en R y todo ángulo α.

5. Sea f una función diferenciable de r y considérese que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Demostrar que

$$|\nabla f| = \left|\frac{df}{dr}\right|.$$

   Explicar el significado geométrico de esto.

6. Sea f una función diferenciable de (x, y) y sea $x = s \cos \alpha - t \operatorname{sen} \alpha$, $y = s \operatorname{sen} \alpha + t \cos \alpha$, donde α es una constante. Calcular.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2.$$

7. Considérese que f tiene segundas derivadas continuas en una región R y supóngase que adquiere un máximo en un punto $\mathbf{P}_0$ en R. Demostrar que, para toda dirección α, $(\alpha \cdot \nabla) f = 0$ y $(\alpha \cdot \nabla)^2 f < 0$ en $\mathbf{P}_0$.

8. Sean f y g funciones diferenciables. Demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}, \quad \text{si } g \text{ no se hace cero.}$$

9. Sea f una función diferenciable de una variante. Definir g por $g = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Calcular $\nabla g \cdot \nabla g$.

10. Sean f y g dos funciones de una variable para las cuales f'' y g'' existen. Calcular todas las primeras y segundas parciales de h, definida por $h(x, y) = f[xg(y)]$.

11. Sea f una función diferenciable de (x, y, z) y sean y, z funciones diferenciables de x. Distinguir entre $\partial f/\partial x = f_1$ y df/dx.

EJERCICIOS C

1. Se dice que $f(\mathbf{P})$ es una **función homogénea** de grado k si $f(t\mathbf{P}) = t^k f(\mathbf{P})$. En términos de coordenadas en tres dimensiones, esto se transforma en

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z).$$

Demostrar que si f es una función homogénea diferenciable, entonces

$$(\mathbf{P}\cdot\nabla)f(\mathbf{P}) = kf(\mathbf{P}) \quad \text{y} \quad (\mathbf{P}\cdot\nabla)^2 f = k(k-1)f(\mathbf{P}).$$

2. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que f sea una solución de $f_x = f_y$ en una región es que sea una función de la combinación $x + y$. Es decir, existe una función diferenciable g de una variable para la cual $f(x, y) = g(x + y)$. (*Sugerencia:* Hacer $u = x + y$, $v = x - y$).

3. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que f sea una solución de $f_{xx} = f_{yy}$ en una región es que sea la suma de una función de $x + y$ y una función de $x - y$. Es decir, existen dos funciones g y h de una sola variable, cada una teniendo dos derivadas, para las cuales $f(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$.

4. Demostrar mediante un ejemplo que una función puede tener derivadas direccionales en toda dirección en un punto $\mathbf{P}$ y, sin embargo, no ser diferenciable en $\mathbf{P}$.

5. Sea f continua en una región cerrada R. Supóngase que f adquiere un máximo en un punto $\mathbf{P}$ sobre la frontera. Demostrar que $\nabla_n f(\mathbf{P}) \geqslant 0$, donde $\mathbf{n}$ es la normal interna si esta derivada lateral existe.

10.5 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y EL TEOREMA DE TAYLOR PARA VARIAS VARIABLES

El teorema del valor medio para funciones de una variable tiene un análogo para funciones de varias variables y, en consecuencia, existe una forma del teorema de Taylor para varias de ellas, ya que este teorema se obtiene como una consecuencia del teorema del valor medio. El teorema del valor medio es el siguiente:

10.5a Teorema. Sea f diferenciable en una vecindad N. Entonces para dos puntos cualesquiera $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en N existe un punto $\mathbf{P}_0$ sobre el segmento que los une para el cual

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q}) = \nabla f(\mathbf{P}_0)\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{Q}).$$

Demostración. Considérese $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q} + t\boldsymbol{\beta}$, las cuales definen F como una función de la única variable t por

$$F(t) = f[\mathbf{P}(t)] = f(\mathbf{Q} + t\boldsymbol{\beta}).$$

Es evidente que F es diferenciable y por el teorema del valor medio para una variable se obtiene

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(t_0) \qquad \text{donde } 0 < t_0 < 1.$$

Pero esto es precisamente

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q}) = \nabla f(\mathbf{P}_0)\cdot\boldsymbol{\beta} = \nabla f(\mathbf{P}_0)\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{Q}),$$

donde $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q} + t_0\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q} + t_0(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = (1 - t_0)\mathbf{Q} + t_0\mathbf{P}$. ∎

En términos de las componentes en tres dimensiones, el resultado de este teorema puede establecerse de la siguiente manera:

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = f_1(x_0, y_0, z_0)(x - a) + f_2(x_0, y_0, z_0)(y - b) + f_3(x_0, y_0, z_0)(z - c),$$

donde (x_0, y_0, z_0) se encuentra en algún punto sobre el segmento que une (a, b, c) y (x, y, z). Esto significa que

$$\frac{x - x_0}{x - a} = \frac{y - y_0}{y - b} = \frac{z - z_0}{z - c},$$

y el valor común de estos cocientes está entre 0 y 1.

Se obtiene el teorema de Taylor para dimensiones superiores como una consecuencia del teorema de Taylor para funciones de una variable.

10.5b Teorema. Sean f y todas sus derivadas parciales hasta el orden n continuas en una vecindad N de $\mathbf{Q}$. Entonces, para $\mathbf{P}$ en N,

$$f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{Q}) + ((\mathbf{P} - \mathbf{Q})\cdot\nabla)f(\mathbf{Q}) + \frac{1}{2!}((\mathbf{P} - \mathbf{Q})\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{Q}) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}((\mathbf{P} - \mathbf{Q})\cdot\nabla)^{n-1} f(\mathbf{Q}) + \frac{1}{n!}((\mathbf{P} - \mathbf{Q})\cdot\nabla)^n f(\mathbf{P}_0),$$

donde $\mathbf{P}_0$ es un punto sobre el segmento que une $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

Demostración. Sean $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q} + t\boldsymbol{\beta}$. Apliquemos el teorema de Taylor para funciones de una variable a F, donde F está definida por $F(t) = f[\mathbf{P}(t)]$. Esto conduce a

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)t^{n-1} + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)t^n.$$

Si $t = 1$ se obtiene exactamente la fórmula de Taylor del teorema. ∎

Para entender completamente el significado de la fórmula, escríbase

para diferentes casos. Por ejemplo, en dos dimensiones, si se hace $\mathbf{Q} = (a, b)$ y $\mathbf{P} = (x, y)$, se obtiene

$$f(x, y) = f(a, b) + \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b)$$
$$+ \frac{1}{3!}\left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a, b)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \cdots$$

Desarrollando se obtiene

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x - a)^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} + 2(x - a)(y - b)\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x\, \partial y}\right.$$
$$\left. + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x - a)^3 \frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial x^3} + 3(x - a)^2(y - b)\frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial x^2\, \partial y}\right.$$
$$\left. + 3(x - a)(y - b)^2 \frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial x\, \partial y^2} + (y - b)^3 \frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial y^3}\right]$$
$$+ \frac{1}{4!}[\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Escribir los primeros términos del desarrollo para el caso de tres y cuatro variables. Por simplicidad, tómese $\mathbf{Q} = \mathbf{O}$.

10.6 LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

Sean f, g, h tres funciones definidas en un dominio D en el espacio tridimensional. En cualquier punto $\mathbf{P}$ en D, los tres números $f(\mathbf{P})$, $g(\mathbf{P})$, $h(\mathbf{P})$ pueden tomarse como las componentes de un vector. Si se denota este vector por $\mathbf{Q}$, entonces se tiene

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) = f(\mathbf{P})\mathbf{i} + g(\mathbf{P})\mathbf{j} + h(\mathbf{P})\mathbf{k},$$

una función vectorial en D. Frecuentemente a una función vectorial se le da el nombre de **campo vectorial**. Geométricamente lo imaginaremos como un vectór $\mathbf{Q}$ con su base en el punto $\mathbf{P}$.

EJEMPLO 1. La ley de la gravitación de Newton afirma que dos partículas se atraen una a la otra con una fuerza la cual es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Se desea expresar esta relación en la forma de una función vectorial.

Solución. Primero, nótese que implícitamente la frase «se atraen» significa que la fuerza sobre la partícula B debida a la gravitación de A está a lo largo del segmento que une A y B y apunta de B hacia A.

Ahora bien, tomemos una de las masas puntuales, digamos A, como origen y escribamos la fuerza que actúa sobre B como una función de la posición $\mathbf{P}$ de B. La magnitud de la fuerza debe ser

$$|\mathbf{F}| = k\frac{mM}{|\mathbf{P}|^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Todo lo que falta es apuntarla en la dirección correcta —es decir, multiplicarla por un vector unitario en la dirección correcta—. El vector unitario debe apuntar en la dirección opuesta desde $\mathbf{P}$. Entonces este vector unitario debe ser $-\mathbf{P}/|\mathbf{P}|$, así se obtiene

$$\mathbf{F} = -\frac{kmM\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|^3}.$$

Ahora se desea introducir dos nuevos conceptos, la divergencia y el rotacional de campos vectoriales diferenciables. Si $\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ es un campo vectorial diferenciable, la función escalar

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

se llama **divergencia** de $\mathbf{F}$. Se denota por div $\mathbf{F}$. Es evidente que puede expresarse en términos del operador ∇ : div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$. Puede observarse este hecho del modo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k})$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) h = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

EJEMPLO 2. Calcular la divergencia del gradiente de una función escalar con dos derivadas continuas.

Solución:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

En muchas aplicaciones se trabaja con los llamados campos vectoriales **solenoidales.** Estos son campos para los cuales la divergencia es cero.

EJEMPLO 3. Demostrar que el campo de fuerzas construido en el Ejemplo 1

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|^3}$$

es solenoidal.

Solución. Denótese $|\mathbf{P}|$ por $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces

$$\mathbf{F} = -kMm\left[\frac{x}{r^3}\mathbf{i} + \frac{y}{r^3}\mathbf{j} + \frac{z}{r^3}\mathbf{k}\right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -kMm\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Ahora bien $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Pero $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

así que $$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

o bien $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Entonces $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

Por simetría,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

y $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

Sumando se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -kMm\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}\right]$$

$$= -kMm\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right] = 0.$$

La divergencia se expresa en términos del producto interno formal del operador ∇ con $\mathbf{F}$. Esto sugiere que también podría considerarse el producto cruz formal de ∇ y $\mathbf{F}$. El resultado de esta operación se llama **rotacional** de $\mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Esta última línea puede tomarse como la correcta definición de **rot F** y las otras expresiones pueden tomarse como definidas por la última línea

EJEMPLO 4. Calcular **rot F** cuando

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (3xz - 5z^2y)\mathbf{j} + (x^2 - 2z)\mathbf{k}.$$

Solución:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & 3xz - 5z^2y & x^2 - 2z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(-3x + 10zy) + \mathbf{j}(-2x) + \mathbf{k}(3z - 2y)$$

$$= (10zy - 3x)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + (3z - 2y)\mathbf{k}.$$

10.6a Teorema. Supóngase que f es una función con segundas derivadas continuas en una región R. Entonces

$$\text{rot grad } f = \mathbf{O} \quad \text{en } R.$$

Demostración. $\text{grad } f = \nabla f = \mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z$,

y $\text{rot grad } f = \nabla \times \nabla f$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(f_{zy} - f_{yz}) + \mathbf{j}(f_{xz} - f_{zx}) + \mathbf{k}(f_{yx} - f_{xy}) = \mathbf{O}.$$

Ahora es razonable inquirir si este teorema representa la única circunstancia bajo la cual el rotacional de un vector puede hacerse cero. La respuesta es efectivamente «sí» y los detalles se darán en el lugar apropiado.

Estas dos operaciones de diferenciación vectorial, div y **rot**, representadas simbólicamente por $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$, tienen importantes interpretaciones físicas e igualmente importantes aplicaciones en la teoría de los integrales múltiples, como se verá posteriormente.

EJERCICIOS A

1. Escribir la fórmula de Taylor para las siguientes funciones, como se indica:

(*a*)	sen x sen y	alrededor de (0, 0) hasta 3 términos
(*b*)	sen x sen y	alrededor de $(\pi, 0)$ hasta 3 términos
(*c*)	$x^2 + x^3y + xy + x^2y^2$	alrededor de (1, 2) hasta 17 términos
(*d*)	$e^{x \operatorname{sen} y}$	alrededor de (1, 0) hasta 4 términos
(*e*)	cos $(e^x + y^2 + \log z)$	alrededor de (0, 0, 1) hasta 2 términos
(*f*)	log $(x \cos y)$	alrededor de (1, 0) hasta 3 términos
(*g*)	$1/xy$	alrededor de (1, 1) hasta 4 términos
(*h*)	$1/(1 - x - y)$	alrededor de (0, 0) hasta 15 términos
(*i*)	$1/(x + y + z)$	alrededor de (1, 0, 0) hasta 13 términos

2. Calcular div **F** y rot **F** para cada uno de los siguientes campos vectoriales. ¿Cuáles son solenoidales?

(*a*) $\mathbf{F} = \mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (*b*) $\mathbf{F} = \mathbf{P}/|\mathbf{P}|^2$

(*c*) $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$ (*d*) $\mathbf{F} = 3xz\mathbf{i} + 5y^2x^3\mathbf{j} + (7z^4 + 5y^2)\mathbf{k}$

3. Encontrar las fórmulas para las siguientes expresiones:

(*a*) $\nabla \cdot \nabla(fg)$ (*b*) $\nabla \cdot (f\mathbf{F})$ (*c*) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G})$

(*d*) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ (*e*) $\nabla \times (f\mathbf{F})$ (*f*) $\nabla \times \mathbf{P}$

(*g*) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

4. Sean f, g, h funciones diferenciables de x, y, z. Demostrar que

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = \nabla f \cdot \nabla g \times \nabla h.$$

¿Qué sugiere esta expresión acerca del significado geométrico del Jacobiano?

EJERCICIOS B

1. Sea $\mathbf{F} = (6xy + 3x^2y^2z)\mathbf{i} + (3x^2 + 2x^3yz + 2z^4y)\mathbf{j} + (x^3y^2 + 4z^3y^2)\mathbf{k}$. Verificar que rot $\mathbf{F} = \mathbf{O}$. Encontrar todas las funciones f tales que $\mathbf{F} = \text{grad } f$.

2. Sea f una función diferenciable en una vecindad N y supóngase que todas las primeras derivadas de f son idénticamente nulas en N. Demostrar que f es constante en N.

3. Supóngase en el Ejercicio B2 que N se reemplaza por una región general R. Demostrar que f es constante en R.

EJERCICIOS C

1. Sea f una función dos veces continuamente diferenciable en una región R. Supóngase que existe un punto $\mathbf{P}_0$ en R para el cual $(\alpha \cdot \nabla)f(\mathbf{P}_0) = 0$ y $(\alpha \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{P}_0) < 0$ para toda dirección α. Demostrar que entonces f alcanza un máximo local en $\mathbf{P}_0$ — es decir, existe una vecindad N de $\mathbf{P}_0$ en la cual $f(\mathbf{P}) < f(\mathbf{P}_0)$ para todo $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ en la vecindad N.

11

Transformaciones y funciones implícitas. Valores extremos

11.1 TRANSFORMACIONES. TRANSFORMACIONES INVERSAS

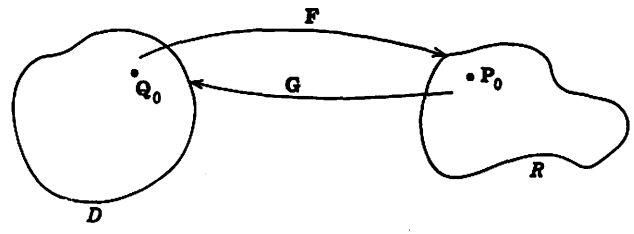
Sea **F** una función de valores vectoriales definida en un dominio D en un espacio vectorial Euclideano de n dimensiones con rango R en un espacio vectorial Euclideano de m dimensiones. Tal función se llama **mapeo** o **transformación,** la cual mapea o transforma D en R. Esto significa que para cada **Q** en D existe un **P** único en R para el cual

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}).$$

Sea **G** una función cuyo dominio es R y cuyo rango es D. Esto significa que para cada **P** en R existe un **Q** en D tal que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}(\mathbf{P}).$$

Supóngase que **G** está relacionada a **F** en tal forma que, siempre que **F**



mapea $\mathbf{Q}_0$ en $\mathbf{P}_0$, **G** mapea $\mathbf{P}_0$ hacia atrás en $\mathbf{Q}_0$. Entonces **G** se llama **mapeo inverso** o **transformación inversa** de **F**.

11.1a Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una transformación **F** tenga una inversa es que no existan dos puntos en D que tengan la misma imagen en R bajo la transformación **F**. Es decir, $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) = \mathbf{P}_0$ y $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{P}_0$ implica que $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1$.

Demostración. Para cada **P** en R, definir $\mathbf{G}(\mathbf{P})$ como ese punto **Q** en D para el cual $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$. ∎

En términos de componentes, si $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ y $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ se transforma en

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ p_2 &= f_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ p_m &= f_m(q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

Buscar una transformación inversa significa: dado cualquier $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ en R, tratar de resolver las ecuaciones anteriores unívocamente para las q:

$$\begin{aligned} q_1 &= g_1(p_1, p_2, \ldots, p_m) \\ q_2 &= g_2(p_1, p_2, \ldots, p_m) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ q_n &= g_n(p_1, p_2, \ldots, p_m). \end{aligned}$$

11.2 TRANSFORMACIONES LINEALES

Una **transformación lineal L** es aquella dada mediante un conjunto de ecuaciones lineales:

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ p_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_m = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n. \end{cases}$$

De hecho, describe una transformación lineal de E_n, donde el punto **Q** ha sido denotado por $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, hacia E_m, donde el punto **P** ha sido denotado por $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

11.2a Teorema. Si **L** es una transformación lineal, entonces

$$\mathbf{L}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = \mathbf{L}(\mathbf{Q}) + \mathbf{L}(\mathbf{Q}')$$
$$\mathbf{L}(a\mathbf{Q}) = a\mathbf{L}(\mathbf{Q}).$$

Demostración. Para probar la segunda ecuación, nótese que si en (1) cada q se reemplaza por aq, los factores a salen del segundo miembro de cada ecuación.

Para probar la primera, obsérvese que reemplazando cada q por $q + q'$ podemos separar el segundo miembro de cada ecuación (1) en la suma de dos partes, a saber, el segundo miembro evaluado para las q más el segundo miembro evaluado para las q. ∎

Una **matriz de** $m \times n$ es un arreglo de números que tiene m renglones y n columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

En ocasiones es conveniente pensar que cada línea está formada con las componentes de un vector n, llamado **vector línea,** y cada columna como si estuviera formada con las componentes de un vector m, llamado **vector columna.**

Inmediatamente se ve que existe una íntima relación entre las matrices y las transformaciones lineales, puesto que el j-ésimo vector línea está formado con los coeficientes de las q en la expresión para p_j en (1). De hecho, esta expresión para p_j es precisamente el producto escalar de este vector línea con **Q**. Para expresar este hecho en la notación matricial usual, se escribe **Q** como un vector columna inmediatamente a la derecha de la matriz:

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix}$$

Entonces se dice que una matriz de $m \times n$ actuando sobre un vector columna n, simbolizado por (2), produce un vector columna m de acuerdo con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{pmatrix},$$

donde el j-ésimo elemento del vector resultante es el producto punto del j-ésimo vector línea con **Q**. Así que las ecuaciones (1) en términos de las componentes pueden escribirse en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{31}x_2 \end{aligned}$$

se transforman, en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que cualquier transformación lineal conduce a una matriz, a saber su matriz de coeficientes, e inversamente cualquier matriz puede servir como la matriz de coeficientes de una transformación lineal. Esto proporciona una correspondencia biunívoca natural entre las transformaciones lineales y las matrices. Así que podemos hablar de una transformación lineal dada por una matriz o bien decir que una matriz es una transformación lineal.

De aquí en adelante nos restringiremos a las transformaciones lineales de E_n hacia E_n, o bien, en terminología matricial, a matrices de $n \times n$. Cuando usemos el término «matriz» nos estaremos refiriendo a una matriz de $n \times n$ y todas las transformaciones lineales, sin requisito adicional, serán de E_n a E_n.

Es evidente que toda transformación lineal tiene por dominio a todo E_n, puesto que el segundo miembro de (1) tiene sentido para todo **Q**. Ahora deseamos inquirir acerca del rango.

11.2b Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que la transformación lineal **L** (de E_n a E_n) tenga una inversa definida sobre todo E_n es que el determinante de los coeficientes no sea cero. En este caso, la inversa también es una transformación lineal y el determinante de sus coeficientes es el recíproco del determinante de **L**.

No se probará este teorema, el cual se supone que el estudiante conoce desde el álgebra (aunque, tal vez, en diferentes términos), sino que en su lugar haremos algunos comentarios acerca de su contenido: En términos de coordenadas en tres dimensiones, se dice que para resolver unívocamente

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

sin importar cómo sean u, v y w, es necesario y suficiente que el determinante de las $a$es no sea cero. Entonces la solución está dada por la regla de Cramer

$$x = \begin{vmatrix} u & a_{12} & a_{13} \\ v & a_{22} & a_{23} \\ w & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$y =$ etc.,

a partir de la cual es evidente que la inversa es también una transformación lineal. A partir de esto no es un cálculo difícil demostrar que los determinantes son recíprocos.

Se dice que una transformación lineal, o su matriz, es **singular** si su determinante se hace cero. De otra manera es **no singular.** El Teorema 11.2a establece que el rango de una transformación lineal no singular es E_n. Aunque no es nuestra mira, puede demostrarse que el rango de una transformación lineal singular es un subespacio lineal, el cual puede interpretarse como un plano, o bien un hiperplano, o bien una línea.

11.2c Corolario. Si **L** es una transformación lineal no singular, no mapea un vector **Q** diferente de cero en **O**.

Demostración. Si mapeara un vector **Q** diferente de cero en **O**, se tendría tanto

$$\mathbf{L(Q) = O}$$

como

$$\mathbf{L(O) = O}.$$

Entonces, por el Teorema 11.1a,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \qquad \blacksquare$$

11.2d Corolario. Si $\mathbf{L}$ es una transformación lineal no singular y $\mathbf{P}$ es cualquier vector diferente de cero, entonces existe un vector unitario α tal que $\mathbf{L}(\alpha)$ es un múltiplo escalar positivo de $\mathbf{P}$.

Demostración. Sea $\mathbf{Q}$ la solución de $\mathbf{P} = \mathbf{L}(\mathbf{Q})$. Haciendo $\alpha = \mathbf{Q}/|\mathbf{Q}|$, se calcula

$$\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathbf{Q}/|\mathbf{Q}|) = (1/|\mathbf{Q}|)\mathbf{L}(\mathbf{Q}) = (1/|\mathbf{Q}|)\mathbf{P}. \qquad \blacksquare$$

11.2e Teorema. Sea $\mathbf{L}$ una transformación lineal no singular. Entonces existen puntos $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$ en $\{|\mathbf{Q}| = 1\}$ tales que

$$0 < |\mathbf{L}(\mathbf{Q}_0)| < |\mathbf{L}(\mathbf{Q})| < |\mathbf{L}(\mathbf{Q}_1)| \text{ para todo } \mathbf{Q} \text{ en } \{|\mathbf{Q}| = 1\}.$$

Demostración. $|\mathbf{L}(\mathbf{Q})|$ es una función positiva continua en un conjunto cerrado acotado. La positividad se deduce inmediatamente con base en el Corolario 11.2d. La continuidad se deja como ejercicio (B1). Así que $|\mathbf{L}(\mathbf{Q})|$ adquiere un suprémum y un ínfimum en $\{|\mathbf{Q}| = 1\}$. $\blacksquare$

Los números $|\mathbf{L}(\mathbf{Q}_0)|$ y $|\mathbf{L}(\mathbf{Q}_1)|$ se denotarán por m y M, respectivamente, con un subíndice $\mathbf{L}$ cuando sea necesario. Geométricamente, estos números representan las longitudes de los vectores más corto y más largo, respectivamente, los cuales se originan como imágenes de los vectores en $\{|\mathbf{Q}| = 1\}$ bajo la transformación $\mathbf{L}$.

11.2f Corolario. Para cualquier transformación lineal no singular $\mathbf{L}$, se tiene que para todo $\mathbf{Q}$ en E_n,

$$m|\mathbf{Q}| < |\mathbf{L}(\mathbf{Q})| < M|\mathbf{Q}|.$$

Demostración. Haciendo $\alpha = \mathbf{Q}/|\mathbf{Q}|$, aplicar el Teorema 11.2e y multiplicar por $|\mathbf{Q}|$. $\blacksquare$

Si cada elemento a_{ij} de una matriz es función de un parámetro, entonces la transformación lineal definida por esa matriz depende del parámetro. Si cada a_{ij} es una función continua del parámetro, podría esperarse que la transformación dependiera continuamente en alguna forma del parámetro. En la forma en que necesitamos este resultado, el parámetro es por sí mismo un punto en un espacio vectorial Euclideano. Si $\mathbf{T}$ es el parámetro, denotaremos la transformación por $\mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q})$, donde $\mathbf{Q}$ es el vector que se transforma.

11.2g Teorema. Sea $\mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q})$ una transformación lineal cuyos coeficientes dependen continuamente de $\mathbf{T}$ en una vecindad de $\mathbf{T}_0$, y sea $\mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})$ no singular. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$|\mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q}) - \mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})| < \tfrac{1}{2}|\mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})|$$

para todo $\mathbf{Q}$ y para $|\mathbf{T} - \mathbf{T}_0| < \epsilon$.

Demostración. (Para dos dimensiones). Sea $\mathbf{L}$ dado por

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q}) \qquad \text{donde } \mathbf{U} = (u, v),\ \mathbf{Q} = (x, y).$$

Entonces $\mathbf{L}$ está dada en coordenadas por

$$u(\mathbf{T}) = a_{11}(\mathbf{T})x + a_{12}(\mathbf{T})y$$
$$v(\mathbf{T}) = a_{21}(\mathbf{T})x + a_{22}(\mathbf{T})y.$$

Entonces $|\mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q}) - \mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})| = \sqrt{[u(\mathbf{T}) - u(\mathbf{T}_0)]^2 + [v(\mathbf{T}) - v(\mathbf{T}_0)]^2}$.

Ahora, sea $$m = \min_{|\mathbf{Q}| = 1} |\mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})| > 0.$$

Entonces se tiene

$$|u(\mathbf{T}) - u(\mathbf{T}_0)| < |a_{11}(\mathbf{T}) - a_{11}(\mathbf{T}_0)|\,|x| + |a_{12}(\mathbf{T}) - a_{12}(\mathbf{T}_0)|\,|y|.$$

Supuesto que las $a$es son continuas en $\mathbf{T}$, existe un ϵ_1 tal que $|\mathbf{T} - \mathbf{T}_0| < \epsilon_1$ asegura que

$$|a_{11}(\mathbf{T}) - a_{11}(\mathbf{T}_0)| < \frac{m}{4\sqrt{2}}$$

y $$|a_{12}(\mathbf{T}) - a_{12}(\mathbf{T}_0)| < \frac{m}{4\sqrt{2}}.$$

Entonces, ya que $|x| \leqslant |\mathbf{Q}|$ y $|y| \leqslant |\mathbf{Q}|$,

$$|u(\mathbf{T}) - u(\mathbf{T}_0)| < m|\mathbf{Q}|/2\sqrt{2}.$$

En forma semejante, existe un ϵ_2 tal que $|\mathbf{T} - \mathbf{T}_0| < \epsilon_2$ asegura que

$$|v(\mathbf{T}) - v(\mathbf{T}_0)| < m|\mathbf{Q}|/2\sqrt{2}.$$

Así que si $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ y $|\mathbf{T} - \mathbf{T}_0| < \epsilon$,

$$|\mathbf{L}(\mathbf{T}, \mathbf{Q}) - \mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})| < \sqrt{(m|\mathbf{Q}|/2\sqrt{2})^2 + (m|\mathbf{Q}|/2\sqrt{2})^2}$$
$$= m|\mathbf{Q}|/2 < \tfrac{1}{2}|\mathbf{L}(\mathbf{T}_0, \mathbf{Q})|. \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS A

1. Sea una transformación lineal $\mathbf{L}$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontrar el resultado de aplicar $\mathbf{L}$ a:

(*a*) $(1, 0, 0)$ (*b*) $(0, 1, 0)$ (*c*) $(0, 0, 1)$

2. Sea $\mathbf{L}$ la transformación dada en $A1$. Demostrar que cualquier plano se lleva hacia un plano y que cualquier línea se lleva hacia una línea.
3. ¿Cómo puede saberse que $\mathbf{L}$ dada en $A1$ no mapea E_3 en un plano?

EJERCICIOS B

1. Sea **L** una transformación lineal. Demostrar que $|\mathbf{L}(\mathbf{Q})|$ es una función continua de **Q** y así completar la demostración del Teorema 11.2e.
2. Aplicar el Teorema 11.2f y concluir que **L(Q)** es uniformemente continua sobre todo E_n.
3. Encontrar una transformación lineal de E_3 a E_3 con $\mathbf{L}(\mathbf{i}) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{L}(\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{L}(\mathbf{k}) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. ¿Existe alguna otra?
4. Describir geométricamente la transformación dada por la matriz.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

5. Sea **L** una transformación lineal de E_n a E_m y **M** una transformación lineal de E_m a E_s; y sea **T** la transformación de E_n a E_s definida por $\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \mathbf{M}[\mathbf{L}(\mathbf{Q})]$, donde **Q** está en E_n. Demostrar que **T** es lineal y calcular sus elementos de la matriz, c_{ij}, a partir de los de **L** y **M**, denotados por a_{ij} y b_{ij}, respectivamente. La matriz de elementos c define el **producto** de las matrices de **L** y **M**.
6. Demostrar que la orientación de una terna de vectores se conserva o se invierte mediante una transformación lineal no singular de acuerdo con que el signo de su determinante sea + o — y el volumen del paralelepípedo rectangular determinado por la terna se multiplica por la magnitud del determinante.
7. Sea **L** una transformación lineal que mapea E_2 en E_3. Demostrar que la imagen de E_2 es en general un plano en E_3 pero puede ser una línea o un punto.
8. Sea **L** una transformación lineal no singular que mapea E_n en E_n y sea $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ una base cualquiera. Demostrar que $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1), \mathbf{L}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{e}_n)$ también es una base.

EJERCICIOS C

1. Sea $f(\mathbf{Q})$ una función de valores reales de **Q** en E_n con las propiedades (*a*) $f(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}') = f(\mathbf{Q}_1) + f(\mathbf{Q}')$ y (*b*) $f(a\mathbf{Q}) = af(\mathbf{Q})$. Demostrar que existe un vector fijo **A** tal que $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$. (*Sugerencia:* Expresar **Q** en términos de vectores base $\mathbf{Q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + \cdots + q_n\mathbf{e}_n$.)
2. Aplicar el resultado del Ejercicio 1 para demostrar que si una transformación **T** satisface $\mathbf{T}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = \mathbf{T}(\mathbf{Q}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}')$ y $\mathbf{T}(a\mathbf{Q}) = a\mathbf{T}(\mathbf{Q})$, es una transformación lineal.
3. Sea **L** una transformación lineal de E_n a E_m. Demostrar que existe un M tal que $|\mathbf{L}(\mathbf{Q})| \leq M|\mathbf{Q}|$ y además que $M < \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ donde los a_{ij} son los elementos de la matriz de los coeficientes de **L**.
4. Sea **L** una transformación lineal de E_3 en E_3 con **rango 2**. Esto significa que el determinante de **L** es 0, pero uno de los subdeterminantes de 2×2 formado al eliminar un renglón y una columna (es decir, uno de los menores de 2×2) no es cero. Demostrar que **L** mapea E_3 sobre un plano.

5. Demostrar que si todos los menores de 2×2 son cero (esto es, si **L** tiene rango 1), pero no todos los elementos son cero, entonces **L** mapea E_3 sobre una línea.

11.3 EL TEOREMA DE INVERSION

Sea **F** una transformación diferenciable de un dominio D en E_n hacia un rango R en E_n. Por ejemplo, si $n = 3$, las componentes de **F** estarían dadas por

$$(1) \qquad \begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z) \\ w = h(x, y, z). \end{cases}$$

Supóngase además que existe un punto $\mathbf{Q} = (a, b, c)$ en el cual $A = f(a, b, c)$, $B = g(a, b, c)$ y $C = h(a, b, c)$. Se desea inquirir acerca de la existencia de una transformación inversa en una vecindad de $\mathbf{P} = (A, B, C)$ en el espacio de (u, v, w).

Sea $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = (A + du, B + dv, C + dw)$ un punto cercano. Entonces, si existe una función inversa definida en una vecindad de **P**, debe existir una $d\mathbf{Q} = (dx, dy, dz)$ única tal que $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} + d\mathbf{Q})$; es decir,

$$(2) \qquad \begin{cases} A + du = f(a + dx, b + dy, c + dz) \\ B + dv = g(a + dx, b + dy, c + dz) \\ C + dw = h(a + dx, b + dy, c + dz). \end{cases}$$

Mediante los métodos del último capítulo, se ve que aproximadamente

$$(3) \qquad \begin{cases} du = f_1(\mathbf{Q})\,dx + f_2(\mathbf{Q})\,dy + f_3(\mathbf{Q})\,dz \\ dv = g_1(\mathbf{Q})\,dx + g_2(\mathbf{Q})\,dy + g_3(\mathbf{Q})\,dz \\ dw = h_1(\mathbf{Q})\,dx + h_2(\mathbf{Q})\,dy + h_3(\mathbf{Q})\,dz. \end{cases}$$

En notación matricial, esto se transforma en

$$d\mathbf{P} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{Q}) & f_2(\mathbf{Q}) & f_3(\mathbf{Q}) \\ g_1(\mathbf{Q}) & g_2(\mathbf{Q}) & g_3(\mathbf{Q}) \\ h_1(\mathbf{Q}) & h_2(\mathbf{Q}) & h_3(\mathbf{Q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{Q}, d\mathbf{Q}).$$

La matriz de la transformación lineal anterior se llama **matriz Jacobiana** porque su determinante es el determinante Jacobiano.

Algo de la información que puede obtenerse de esta última ecuación es que la transformación que lleva $d\mathbf{Q}$ en **Q** hacia $d\mathbf{P}$ en **P** es una trans-

formación lineal. En otras palabras, el cambio en $\mathbf{F}$ desde $\mathbf{Q}$ hasta $\mathbf{Q}+d\mathbf{Q}$ es muy aproximadamente lineal. Ahora bien, esta transformación lineal tendrá una inversa única si el determinante $J(\mathbf{Q})$ no es cero. Esto es, dada $d\mathbf{P}$, puede encontrarse $d\mathbf{Q}$ si $J(\mathbf{Q}) \neq 0$. Habiendo encontrado $d\mathbf{Q}$, entonces se ha encontrado una solución aproximada del problema inverso, porque (2) se cumplirá aproximadamente.

A continuación procederemos a demostrar rigurosamente que una transformación puede invertirse localmente cerca de un punto $\mathbf{Q}$ si $J(\mathbf{Q})\neq 0$. Desarrollaremos esta demostración a través de una serie de lemas. Empezando por una corta discusión acerca de la diferenciabilidad de las funciones vectoriales; se dice que una función vectorial $\mathbf{F}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{Q}$ si está definida en una vecindad de $\mathbf{Q}$ y si

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q},\mathbf{h}) + \mathbf{u}(\mathbf{Q},\mathbf{h})|\mathbf{h}|,$$

donde $\mathbf{u} \to \mathbf{O}$ conforme $\mathbf{h} \to \mathbf{O}$. De esto se deduce (Ejercicio B6) que una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{F}$ sea diferenciable es que cada componente de $\mathbf{F}$ sea diferenciable. Si $\mathbf{J}(\mathbf{Q},\mathbf{h})$ es una función continua de $\mathbf{Q}$, se dice que $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable.

11.3a Lema. Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial diferenciable definida en una vecindad N y sean $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}+\boldsymbol{\alpha}$ dos puntos en N. Entonces

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

Demostración. Se deja como ejercicio demostrar que $\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha}$ está en N para $\{0 \leqslant t \leqslant 1\}$, sea el j-ésimo componente de $\mathbf{F}$ en f. Entonces, por el Teorema 10.4a,

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha}) = f_1(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha})\alpha_1 + f_2(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha})\alpha_2 + \cdots + f_n(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha})\alpha_n$$

Pero éste es exactamente el j-ésimo componente de $\mathbf{J}(\mathbf{Q}+t\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha})$. ∎

11.3b Lema. Sea $\mathbf{F}$ una función de valores vectoriales definida en una región R y que tiene derivadas continuas allí y sea $\mathbf{Q}_0$ un punto en R en el cual el Jacobiano no es cero. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que siempre que $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ estén en N_ϵ: $\{|\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0| < \epsilon\}$,

donde $$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_1| \leqslant |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2)-\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1)| \leqslant \tfrac{3}{2}M|\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_1|,$$

$$M = \sup_{|\alpha|=1} |\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})|$$

y

$$m = \inf_{|\alpha|=1} |\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})|.$$

Demostración. Escójase ϵ de modo que, por el Teorema 11.2g,

(1) $$|\mathbf{J}(\mathbf{Q},\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})| < \tfrac{1}{2}|\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})|$$

para todo vector $\boldsymbol{\alpha}$ si $\mathbf{Q}$ está en N_ϵ. Hágase $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$; entonces el segmento que conecta $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ está descrito por $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_1 + t\boldsymbol{\alpha}$. Sea

$$\begin{aligned}
(2)\ |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1)| &= \left|\int_0^1 \frac{d\mathbf{F}}{dt}[\mathbf{Q}(t)]\,dt\right| = \left|\int_0^1 \mathbf{J}[\mathbf{Q}(t),\boldsymbol{\alpha}]\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 [\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t),\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})]\,dt\right| \\
&> \left|\int_0^1 \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})\,dt\right| - \left|\int_0^1 (\mathbf{J}(\mathbf{Q}(t),\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha}))\,dt\right| \\
&> |\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})| - \tfrac{1}{2}|\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})| = \tfrac{1}{2}|\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})| \\
&> \tfrac{1}{2}m|\boldsymbol{\alpha}| = \tfrac{1}{2}m|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1|.
\end{aligned}$$

Si se estima desde arriba se obtiene el otro miembro de la desigualdad. ∎

11.3c Lema. Bajo las condiciones del Lema 11.3b, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ no toma los mismos valores más que una vez en N_ϵ; es decir, si $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_2)$,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2.$$

Demostración. La demostración es inmediata a partir de que

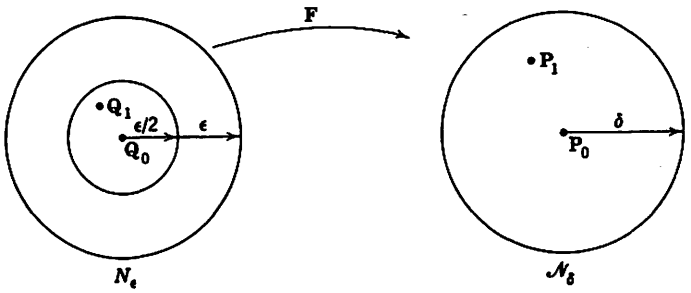
$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1)| > \tfrac{1}{2}m|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1|.$$ ∎

En los espacios de una dimensión, una función diferenciable la cual no toma un valor más que una vez es una función monótona. El lema que se acaba de probar es un resultado análogo para las dimensiones superiores. En una dimensión el concepto principal para estudiar tales problemas fue el teorema del valor medio. Desafortunadamente, el teorema del valor medio no se extiende hacia las transformaciones (ver Ejercicio B2). Sin embargo, la fórmula integral (2) con la cual se empezó la demostración es un análogo integral del teorema del valor medio y puede aplicarse con ese objeto, aunque los cálculos son necesariamente más complicados.

11.3d Lema. Sea $\mathbf{F}$ una función de valores vectoriales definida en una región D y que tiene derivadas continuas allí. Sea $\mathbf{Q}_0$ un punto en D en el cual el Jacobiano no es cero y denotemos $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)$ por $\mathbf{P}_0$. Entonces existe un $\delta > 0$ y un $\epsilon > 0$ tales que, para cada $\mathbf{P}$ en $\mathcal{N}_\delta$: $\{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| < \delta\}$, existe un $\mathbf{Q}$ en N_ϵ: $\{|\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0| < \epsilon\}$ tal que $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$.

Demostración. Determinar ϵ como en el Lema 11.3b y definir $\delta = m\epsilon/9$, donde $m = \min_{|\alpha|=1} |\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\alpha})|$ (ver Corolario 11.2g).

Sea $\mathbf{P}_1$ cualquier punto en $\mathcal{N}_\delta$. Se desea demostrar que existe un $\mathbf{Q}_1$ en N_ϵ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{P}_1$. De hecho se demostrará que $\mathbf{Q}_1$ existe y está en $N_{\epsilon/2}$.



Con este fin, defínase $\mathbf{Q}_1$ por

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1| = \min_{|\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0| \leq \epsilon/2} |\mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P}_1|.$$

Tal $\mathbf{Q}_1$ existe, puesto que una función continua en un conjunto cerrado acotado alcanza su ínfimum. Primero se demostrará que $|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0| < \epsilon/2$. Porque si $|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0| = \epsilon/2$, podría aplicarse el Lema 11.3b para obtener

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_0| = |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)| \geq \tfrac{1}{2}m|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0| = m\epsilon/4 > 2\delta.$$

A partir de esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1| &> |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_0| - |\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1| > 2\delta - \delta \\ &= \delta > |\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1| = |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) - \mathbf{P}_1| > |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1|.\end{aligned}$$

La última desigualdad es verdadera por la forma en que se escogió $\mathbf{Q}_1$. Esta contradicción demuestra que $|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0| < \epsilon/2$.

Ahora se desea demostrar que $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{P}_1$. Para hacerlo se demostrará que, si $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) \neq \mathbf{P}_1$, puede encontrarse un $\mathbf{Q}_2$ con $|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0| < \epsilon/2$ para el cual

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{P}_1| < |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1|. \tag{5}$$

Pero esto contradice la definición de $\mathbf{Q}_1$ y de aquí se completa la demostración. Para encontrar tal $\mathbf{Q}_2$, observemos todos los puntos de la forma $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1 + \eta\boldsymbol{\alpha}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector unitario y η es una constante positiva tan pequeña que $|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1| < \epsilon/2$. (¿Cómo es posible escoger η tan pequeña?) Entonces se desea escoger $\boldsymbol{\alpha}$ de modo que se cumpla (5). Para hacerlo posible, primero nótese que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1 + \eta\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \eta\int_0^1 \{\mathbf{J}[\mathbf{Q}(t), \boldsymbol{\alpha}] - \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})\}\, dt.\end{aligned}$$

De aquí que

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})| \leq \tfrac{1}{2}\eta|\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})|. \tag{6}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{P}_1| &= |[\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1 + \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})] \\ &\quad + [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})]| \\ &< |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1 + \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})| \\ &\quad + |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \eta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha})|.\end{aligned}$$

Por el Corolario 11.2d, puede escogerse $\boldsymbol{\alpha}$ de modo que $\mathbf{J}(\mathbf{Q}_0, \boldsymbol{\alpha}) = -k[\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1]$, donde $k > 0$. Aplicando (6) al segundo término de la última desigualdad nos da

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{P}_1| < |1 - \eta k|\,|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1| + \tfrac{1}{2}\eta k|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1|.$$

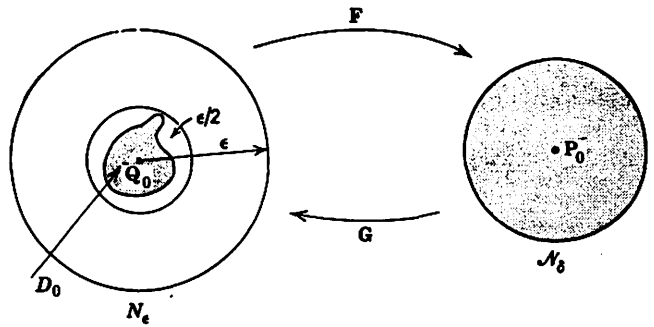
Tomando η todavía menor (si es necesario), de modo que $\eta k < 1$, se obtiene

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_2) - \mathbf{P}_1| < (1 - \tfrac{1}{2}\eta k)|\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1| < |\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}_1|.$$

Esto completa la prueba de que $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{P}_1$. ∎

A continuación tenemos el principal teorema de inversión.

11.3e Teorema. Sea $\mathbf{F}$ una transformación de valores vectoriales continuamente diferenciable de una región D en E_n a un conjunto R en E_n y sea $\mathbf{Q}_0$ un punto en D en el cual el Jacobiano no es cero. Si se denota $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)$ por $\mathbf{P}_0$, existe un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tales que está definida una función inversa $\mathbf{G}$ en $\mathcal{N}_\delta$: $\{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta\}$, que toma valores en N_ϵ: $\{|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0| < \epsilon\}$. . Además, $\mathbf{G}$ es continuamente diferenciable en una vecindad de $\mathbf{P}_0$ y el Jacobiano de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{P}_0$ es el recíproco del Jacobiano de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{Q}_0$



Demostración. Escójanse ϵ y δ como en los lemas anteriores, se ve que el conjunto de puntos D_0 en N_ϵ el cual se mapea sobre $\mathcal{N}_\delta$ satisface las condiciones del Teorema 11.1a, de manera que existe una función

inversa **G** sobre $\mathcal{N}_\delta$ y que toma valores en N_ϵ. En efecto, por definición mapea $\mathcal{N}_\delta$ hacia atrás sobre D_0. Para demostrar que **G** es diferenciable en $\mathcal{N}_\delta$, sean **P** y **P** + **h** vectores en $\mathcal{N}_\delta$, y sean

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}(\mathbf{P}) \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} + \mathbf{k} = \mathbf{G}(\mathbf{P} + \mathbf{h}).$$

Así que $$\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \quad \text{y} \quad \mathbf{P} + \mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} + \mathbf{k})$$

de modo que $$\mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} + \mathbf{k}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \text{ y } \mathbf{k} = \mathbf{G}(\mathbf{P} + \mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{P}).$$

Puesto que **F** es diferenciable en **Q**,

$$\mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} + \mathbf{k}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{k}) + \mathbf{u}(\mathbf{Q}, \mathbf{k})|\mathbf{k}|, \tag{6}$$

donde $\mathbf{u} \to \mathbf{O}$ conforme $\mathbf{k} \to \mathbf{O}$.

Ahora bien, ya que el determinante $J(\mathbf{Q})$ no es cero, existe una transformación lineal $\mathbf{J}_1(\mathbf{P}, \mathbf{h})$ inversa a $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{k})$. De aquí que, de (6), se obtiene

$$\mathbf{k} = \mathbf{J}_1(\mathbf{P}, \mathbf{h}) + \mathbf{J}_1[\mathbf{P}, \mathbf{u}(\mathbf{Q}, \mathbf{k})]|\mathbf{k}|$$

o bien $$\mathbf{G}(\mathbf{P} + \mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{P}) = \mathbf{J}_1(\mathbf{P}, \mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{P}, \mathbf{h})|\mathbf{h}|,$$

donde $$\mathbf{v}(\mathbf{P}, \mathbf{h}) \equiv |\mathbf{k}|\mathbf{J}_1[\mathbf{P}, \mathbf{u}(\mathbf{Q}, \mathbf{k})]/|\mathbf{h}|.$$

Falta por demostrar que $\mathbf{v} \to \mathbf{O}$ conforme $\mathbf{h} \to \mathbf{O}$.

Por el Lema 11.3b, se tiene

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{G}(\mathbf{P} + \mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{P})| < (2/m)|\mathbf{h}|,$$

de modo que $|\mathbf{k}| \to 0$ conforme $|\mathbf{h}| \to 0$ y, de hecho, $|\mathbf{k}|/|\mathbf{h}| \leqslant 2/m$.

Así que $$|\mathbf{v}| \leqslant (2/m)\,|\mathbf{J}_1| \to 0 \quad \text{conforme } |\mathbf{h}| \to 0.$$

Además se ve que **G** es continuamente diferenciable ya que $\mathbf{J}_1$ es continua, y $\mathbf{J}_1$ es continua puesto que **J** es continua y no cero. Si $\mathbf{Q} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{P} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se deduce, del hecho de que **J** y $\mathbf{J}_1$ son inversas, que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{(-1)^{j+i}}{J(\mathbf{Q})} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)},$$

donde J es el determinante Jacobiano de **F**, a saber

$$J(\mathbf{Q}) = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

(Ver Ejercicio C1.) ∎

EJERCICIOS A

1. Calcular el Jacobiano de cada una de las siguientes transformaciones y discutir el comportamiento local:

   (*a*) $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$

   (*b*) $u = x + x^2 + y$, $v = x^2 + y^2$

   (*c*) $x = e^r \cos\theta$, $y = e^r \operatorname{sen}\theta$

   (*d*) $u = x + y$, $v = y^{1/n}$ $\quad n > 0$

   (*e*) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

   (*f*) $x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\phi$

2. Describir la imagen del cuadrado $\{0 < x < 1{,}0 < y < 1\}$ en 1(*a*), (*b*), (*d*) anteriores.

3. Encontrar las transformaciones inversas para 1(*a*), (*c*), (*d*), (*e*) y (*f*). Describir los conjuntos sobre los cuales están definidas las inversas.

4. Calcular los Jacobianos de las transformaciones inversas obtenidas en el Ejercicio 3 y verificar directamente que el producto de los Jacobianos de las transformaciones directa e inversa es 1 en cada uno de los casos.

5. Sean $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ y $w = x^3 + y^3 + z^3$. Calcular $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, y $\partial x/\partial w$.

6. Sea f una función de (x, y). En un cambio de coordenadas hacia las coordenadas polares, escribir las fórmulas para $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

7. Expresar $\partial^2 f/\partial x^2$ en coordenadas polares.

8. Sea $u = f(x, y)$. Expresar $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ en coordenadas polares.

9. Sea $u = f(x, y, z)$. Expresar $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ en (*a*) coordenadas cilíndricas; (*b*) coordenadas esféricas.

10. Sea $u = f(x, y)$. Calcular $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ bajo el cambio de variables dado en el Ejercicio A1(*c*) anterior.

11. Sea $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ un cambio de variables para la cual $f_1 = g_2$ y $f_2 = -g_1$.
    Haciendo $w = h(x, y)$, demostrar que

$$w_{uu} + w_{vv} = (w_{xx} + w_{yy})[(\partial x/\partial u)^2 + (\partial y/\partial u)^2].$$

12. Expresar $(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2$ en coordenadas polares.

13. Sea N una vecindad en E_n y considérese que **Q** y **Q** + **α** están en N. Demostrar que $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q} + t\boldsymbol{\alpha}$ está en N para $\{0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

EJERCICIOS B

1. Expresar $\Delta^2 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$ en coordenadas polares. Aplicar el resultado del Ejercicio A8 anterior.

2. Demostrar que el teorema del valor medio puede extenderse hacia las transformaciones en la siguiente forma: Sea **F** una transformación continuamente diferenciable, y supóngase que **Q**, **Q**′ y el segmento que los une se encuentran en el dominio de **F**. Entonces $\mathbf{F(Q)} - \mathbf{F(Q')} = \mathbf{J^*}\,(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n;\ \mathbf{Q} - \mathbf{Q}')$, donde $\mathbf{J^*}$ es el Jacobiano modificado que actúa sobre $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'$. $\mathbf{J^*}$ tiene la forma de un Jacobiano en el cual el j-ésimo renglón tiene sus elementos evaluados en un punto $\mathbf{Q}_j$ sobre el segmento que une **Q** y **Q**′.

3. Demostrar que la transformación **F** dada por $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ es **conforme** en todo punto excepto en el origen. Es decir, si $\mathbf{Q}_0$ se mapea en $\mathbf{P}_0$, dos curvas diferenciables cualesquiera que pasen por $\mathbf{Q}_0$ mapean en dos curvas diferenciables que pasan por $\mathbf{P}_0$, de modo que el ángulo entre ellas se conserva. ¿Qué sucede a los ángulos en el origen?

4. Supóngase que $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ están relacionadas de tal manera en una región D_1 del plano (u, v) que existe una región D_2 del plano (x, y) tal que $z = \phi(x, y)$ en D_2, donde f, g y h, ϕ son continuamente diferenciables en sus respectivos dominios. Evaluar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en términos de f, g y h.

5. Si u y v son funciones diferenciables de (x, y, z), las cuales a su vez son funciones diferenciables de (r, s), demostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, s)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}\frac{\partial(z, x)}{\partial(r, s)}.$$

6. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que **F** sea diferenciable es que cada componente de **F** sea diferenciable.

EJERCICIOS C

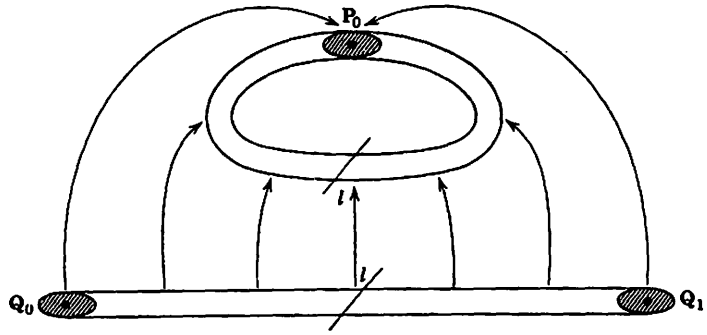
1. Establecer la fórmula para $\partial x_i/\partial y_j$ dada en la página 276.

2. Aplicar el teorema del valor medio modificado del Ejercicio B2 para probar el Lema 11.3b y la ecuación (6) del Teorema 11.3d, y de aquí desarrollar una demostración del teorema de inversión, independiente del argumento integral usado en el texto.

11.4 INVERSAS GLOBALES

El teorema que se ha probado demuestra que el hecho de que el Jacobiano no se nulifique en un punto $\mathbf{Q}_0$ es suficiente para garantizar la existencia de una función inversa de una transformación diferenciable **F** en una vecindad suficientemente pequeña de $\mathbf{Q}_0$. Bajo estas condiciones, se dice que existe una transformación **inversa local.** Ahora se desea inquirir acerca de la existencia de una **inversa global** —es decir, una función inversa definida sobre todo el rango R de la función **F**. Como se ha visto, una condición necesaria y suficiente para que tal inversa exista es que el mapeo producido por **F** sea un mapeo unívoco (Teorema 11.1a).

Primero notemos que puede existir una inversa local en cada punto de una región sin que exista una inversa global. Puede verse esto geométricamente en la figura. Sea un mapeo dado físicamente al doblar la cinta recta de manera que se traslapen los extremos. Entonces tanto el punto $\mathbf{Q}_0$



como el $\mathbf{Q}_1$ se mapean en el mismo punto $\mathbf{P}_0$, de modo que no puede existir una inversa global. Sin embargo, si se corta la cinta en dos mediante la línea sesgada l, el mapeo de cada extremo es biunívoco, de modo que existe un inverso de cada de estos mapeos. Aunque el argumento dado aquí es puramente geométrico, no es difícil dar fórmulas explícitas donde se presente tal fenómeno (ver el Ejercicio A6).

Estos ejemplos señalan el hecho de que una condición que garantiza una inversa local no necesariamente garantiza una global. En particular, el hecho de que **F** sea diferenciable en una región R y tenga un Jacobiano positivo en cada punto de R no garantiza que existirá una inversa global. Sin embargo, el siguiente teorema, el cual se establecerá sin demostración, proporciona un conjunto de condiciones suficientes.

11.4a Teorema. Sea **F** un mapeo continuamente diferenciable definido en una región D en E_2 y supóngase que su Jacobiano nunca es cero en D. Supóngase además que C es una curva cerrada simple la cual, junto con su interior (recuérdese el teorema de la curva de Jordan), se encuentra en D y que **F** no toma valores dobles sobre C —esto es, $\mathbf{F(Q}_1) = \mathbf{F(Q}_2)$ implica $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ para $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ sobre C. Entonces la imagen Γ de C es una curva cerrada simple la cual, junto con su interior, se encuentra en R. Además, **F** no toma valores dobles en la región cerrada que consiste de C y su interior, de modo que puede definirse una función inversa en la región cerrada que consiste de Γ y su interior.

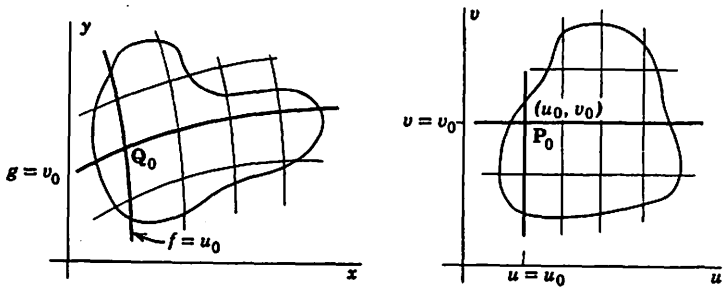
También se cumple un teorema semejante para las dimensiones superiores.

Una transformación que es uno a uno y continua y tiene una inversa continua se llama **transformación topológica.** Una transformación topológica puede distorsionar el tamaño y la forma de una región, pero se conservan ciertas propiedades. Por ejemplo, el número de «hoyos» se conserva bajo tal mapeo. Una propiedad que no cambia se llama **invariante topológica.** El estudio de tales propiedades constituye una gran parte de la topología, pero no se considerarán más esos temas aquí.

11.5 COORDENADAS CURVILINEAS

Supóngase que $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ describen una transformación unívoca y continua de una región D hacia una región R y supóngase que la inversa queda descrita por

$$x = \phi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v). \tag{1}$$



Cada punto Q_0 está dado por sus coordenadas (x, y). También puede expresarse como la imagen de un punto único P_0 en R por medio de las ecuaciones (1) anteriores. Para entender el significado geométrico de este hecho, consideremos todos los puntos P de la forma $P = (u_0, v)$ donde v es arbitraria —es decir, todos aquellos puntos que se encuentran sobre la línea vertical que pasa por P_0. La imagen de esta línea será una curva en el plano (x, y) dada paramétricamente por

$$x = \phi(u_0, v)$$
$$y = \psi(u_0, v),$$

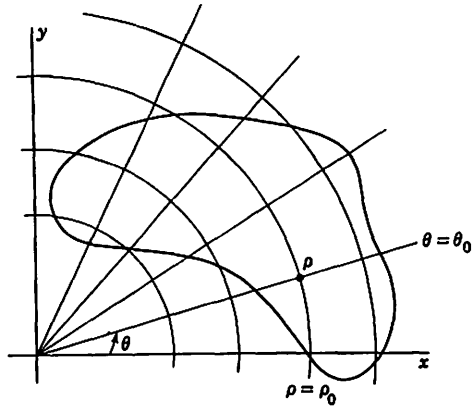
y también estará dada como una curva de nivel de la función f:

$$f(x, y) = u_0$$

De modo semejante, la línea horizontal $v = v_0$ se mapea en la curva $g(x, y) = v_0$. Estas dos curvas se intersectan en solamente un punto (¿por qué?), a saber Q_0. En la misma forma, para cualquier otro punto $P_1 = (u_1, v_1)$, las dos curvas de nivel dadas por $f(x, y) = u_1$ y $g(x, y) = v_1$ determinan la imagen inversa de (u_1, v_1) en D; e inversamente, cualquier Q en D está en la intersección de exactamente una curva de nivel de f con una de g. Dos curvas $f = a_1$ y $f = a_2$ no pueden intersectarse en D; dos curvas de nivel de g tampoco pueden cortarse en D.

Por tanto, las curvas dadas por $f(x, y) = a$ y $g(x, y) = b$ cubren a D con un enrejado de curvas cuyas intersecciones determinan unívocamente los puntos de D. Tal conjunto de curvas se llamará **sistema coordenado curvilíneo.** Entonces, con ello se tiene otra interpretación geométrica de una transformación topológica: puede interpretarse como un sistema coordenado curvilíneo.

El sistema de coordenadas curvilíneas más conocido en E_2 es, por supuesto, las coordenadas polares descritas por $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, con la inversa local dada por $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{ang tan } y/x$.



Debido a que la inversa es una inversa local se presentan ciertas dificultades. La primera pero no muy seria dificultad proviene del hecho de que θ no es univaluada sobre todo el plano. Por lo tanto, en cualquier región que encierra al origen —como, por ejemplo, una región anular entre dos circunferencias con centro en el origen— no existe inversa global. Sin embargo, como sin duda ya lo ha hecho muchas veces el estudiante, es posible dividir tal región en secciones en cada una de las cuales exista una inversa global. El segundo aspecto molesto de las coordenadas polares se relaciona al hecho de que θ no está definida en el origen y, como se verá posteriormente, el Jacobiano también provoca dificultades allí. Esto causará alguna preocupación cuando se discuta el cambio de variables en una doble integral. Sin embargo, el estudiante se dará cuenta de

que la mayor parte de estas dificultades pueden superarse de alguna manera u otra.

Calculemos el Jacobiano

$$\frac{\partial(\rho, \theta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^2}{\rho^3} + \frac{y^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho}$$

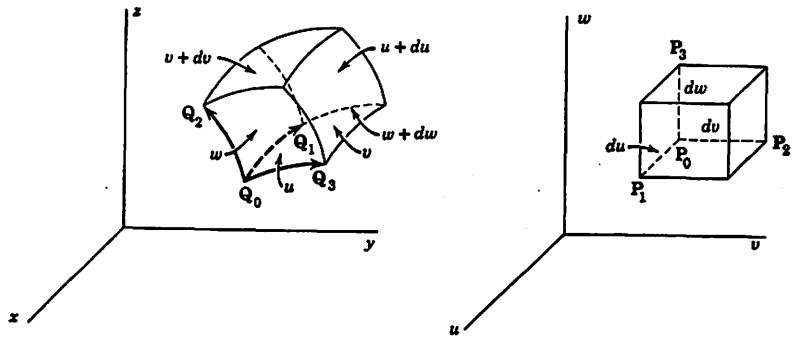
Por el Teorema 11.3e,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho.$$

En el espacio-tres, los sistemas de coordenadas curvilíneas más conocidos son el esférico y el cilíndrico. Algunas de sus propiedades, al igual que las de algunos sistemas menos conocidos, se exploran en los ejercicios.

En términos de las coordenadas curvilíneas, puede darse un significado geométrico al Jacobiano, el cual es más fácil de apreciar en el espacio-tres.

Sea una transformación uno a uno y continuamente diferenciable, la cual mapea una región D sobre una región R, dada por $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ y $w = h(x, y, z)$. Sea $\mathbf{P}_0$ un punto en R y $\mathbf{P}_1$ un punto cercano definido por $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = (du, 0, 0)$ y sean $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ definidos por $(0, dv, 0)$ y $(0, 0, dw)$, respectivamente. Estos puntos determinan una pequeña caja rectangular de volumen $du\,dv\,dw$. Mediante el mapeo inverso,



esta caja se mapea sobre un «paralelepípedo curvilíneo» que tiene por vértices a $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$, las imágenes de $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, respectivamente. La arista $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0$ es aproximadamente el vector $dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ debido al desplazamiento du. Por tanto es $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}\right)du$. De modo semejante, los otros vectores están dados aproximadamente por

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}\right) dv$$

y

$$\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\mathbf{k}\right) dw.$$

Entonces el triple producto escalar de estos vectores es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du\,dv\,dw = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\,du\,dv\,dw$$

$= \pm$ volumen (aproximadamente) del «paralelepípedo» $= V_{xyz}$, donde se obtiene el signo $+$ o bien $-$ de acuerdo con la orientación de la terna $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0)$, si cambia o no cuando se mapea en $(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_0)$. Y

$$V_{xyz} = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| V_{uvw}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del Jacobiano es aproximadamente la razón, en lo pequeño, de los volúmenes correspondientes en la transformación de coordenadas. Esto se verá en forma más rigurosa posteriormente.

Se dice que un sistema de coordenadas curvilíneas es un **sistema ortogonal** si las curvas definidas por ellas se intersectan a ángulos rectos. Supóngase, como antes, que u, v, w forman un sistema de coordenadas curvilíneas en una región D del espacio (x, y, z). Si se mantienen fijas v y w, entonces $\mathbf{Q} = (x, y, z)$ traza una curva a lo largo de la cual únicamente varía u. (En nuestra discusión previa, $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$ fueron puntos vecinos sobre tal curva). Así que un vector tangente (no necesariamente el tangente unitario) de esta curva en la dirección de la u creciente es

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}.$$

En forma semejante, vectores tangentes a las curvas v y w son

$$\mathbf{T}_2 = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{T}_3 = \frac{\partial x}{\partial w}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\mathbf{k}.$$

Es evidente que la condición para que el sistema sea ortogonal es que

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_1 = 0$$

o bien que

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

11.6 FUNCIONES IMPLICITAS

En uno de los primeros ejemplos del cálculo de derivadas parciales, se requirió el cálculo de las primeras parciales de una función z, que dependía de x y y, la cual satisfacía la ecuación

$$x^3 - xy^2 + yz^2 - z^3 = 5.$$

Suponiendo que tal función existe y que las derivadas existen, fue posible obtener fórmulas para las derivadas. Consideremos ahora el caso de la existencia y la diferenciabilidad de tales funciones definidas implícitamente.

11.6a Teorema. Sea f una función de valores reales continuamente diferenciable de $\mathbf{Q}=(x, y, z)$ en una vecindad de un punto $\mathbf{Q}_0=(a, b, c)$ y supóngase que $f(\mathbf{Q}_0) = C$, $f_3(\mathbf{Q}_0) \neq 0$. Entonces existe una función continuamente diferenciable única z, definida en una vecindad de (a, b), para la cual $z(a, b) = c$ y $f[x, y, z\ (x, y)] = C$.

Demostración. Considérese la transformación $\mathbf{F}$ dada por $u = x$, $v = y$, $w = f(x, y, z)$. Ahora bien, $\mathbf{F}$ mapea (a, b, c) en (a, b, C) y

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & f_3 \end{vmatrix} = f_3 \neq 0.$$

De aquí que, por el Teorema 11.3e, $\mathbf{F}$ tiene una inversa diferenciable única $\mathbf{G}$ en una vecindad $\mathcal{N}_\delta$ de (a, b, C): $\{(u-a)^2 + (v-b)^2 + (w-C)^2 < \delta^2\}$. Ahora bien, $\mathbf{G}$ *expresa* (x, y, z) en términos de (u, v, w) y, evidentemente, $x = u$, $y = v$, de manera que, en términos de las coordenadas, $\mathbf{G}$ tiene la forma

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \zeta(u, v, w),$$

donde ζ es una función diferenciable definida en $\mathcal{N}_\delta$, y donde

$$\zeta(a, b, C) = c,$$

y donde $$w = f[u, v, \zeta(u, v, w)] \quad \text{en } \mathcal{N}_\delta.$$

Así que haciendo $w = C$ se obtiene

$$z = \zeta(u, v, C) \qquad \text{en } \{(u - a)^2 + (v - b)^2 < \delta^2\}.$$

Pero $u = x$, $v = y$, de modo que

$$z = \zeta(x, y, C) \qquad \text{en } \{(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2\},$$

y $$C = f[x, y, \zeta(x, y, C)] \qquad \text{en } \{(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2\}. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que en este teorema no existe nada esencial acerca del hecho que se singulariza la tercera coordenada. Así que, si en lugar de $f_3(\mathbf{Q}_0) \neq 0$, se hubiera supuesto que $f_2(\mathbf{Q}_0) \neq 0$, podría haberse concluido que la ecuación $f(x, y, z) = C$ podía resolverse para y en términos de x y z en una vecindad de (a, c) en el plano (x, z). De aquí que, si en $\mathbf{Q}_0$ se tiene $\nabla f \neq \mathbf{O}$, la ecuación $f(x, y, z) = C$ puede resolverse para una de las tres variables en términos de las otras dos.

Es de desear que se determine el plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = C$ en $\mathbf{Q}_0$. Ahora bien

$$f_1 + f_3\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

y

$$f_2 + f_3\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Así que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1}{f_3}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2}{f_3}.$$

Entonces el plano tangente en $\mathbf{Q}_0$ está dado por

$$(z - c) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\mathbf{Q}_0}(x - a) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\mathbf{Q}_0}(y - b)$$

o bien $$(z - c) = -(f_1/f_3)(x - a) - (f_2/f_3)(y - b),$$

o, finalmente, $f_1(\mathbf{Q}_0)(x - a) + f_2(\mathbf{Q}_0)(y - b) + f_3(\mathbf{Q}_0)(z - c) = 0.$

Esto prueba el siguiente corolario y justifica las observaciones heurísticas de la Sección 10.3.

11.6b Corolario. Bajo las condiciones del Teorema 11.6a, el plano tangente de $f(x, y, z) = C$ en $\mathbf{Q}_0$ está dado por

$$f_1(\mathbf{Q}_0)(x - a) + f_2(\mathbf{Q}_0)(y - b) + f_3(\mathbf{Q}_0)(z - c) = 0,$$

a partir de la cual es evidente que la normal a la superficie está en la dirección del gradiente

$$f_1(\mathbf{Q}_0)\mathbf{i} + f_2(\mathbf{Q}_0)\mathbf{j} + f_3(\mathbf{Q}_0)\mathbf{k}.$$

La misma técnica puede aplicarse para resolver $f(\mathbf{Q}) = C$ para una de las componentes de $\mathbf{Q}$ en términos de las otras y para resolver ecuaciones simultáneas. A continuación estableceremos un teorema que se refiere a las ecuaciones simultáneas.

11.6c Teorema. Sean f y g funciones continuamente diferenciables en una vecindad de cinco dimensiones de un punto $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. Supóngase que $f(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$ y $g(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, pero que $\partial(f, g)/\partial(u, v) \neq 0$ en $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. Entonces existe una vecindad tridimensional en la cual u y v son funciones continuamente diferenciables de x, y y z, las cuales satisfacen $f(x, y, z, u, v) = 0$ y $g(x, y, z, u, v) = 0$.

Demostración. (Esbozo.) Establézcase la transformación en el espacio de las w por $w_1 = x$, $w_2 = y$, $w_3 = z$, $w_4 = f$, $w_5 = g$. Entonces obsérvese que

$$\frac{\partial(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)}{\partial(x, y, z, u, v)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

y arguméntese como antes. ∎

EJERCICIOS A

1. Sea z dada implícitamente por

$$z^3 + z^2y - 7x^2y^2z + 2 = 0,$$

cerca de (1, 1, 2). Dar una solución aproximada para z cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

2. ¿Existe alguna función f definida y continua en una vecindad de (0, 0) la cual satisfaga la ecuación dada en cada caso? En cada uno de los casos establecer cuántas funciones están así determinadas y el valor de la función en el origen:
(*a*) $x^2 + y^2 + [f(x, y)]^2 = 25$ (*b*) $x^2 + 2x + y^2 + f^2(x, y) = 0$.

3. Demostrar que los siguientes sistemas de coordenadas curvilíneas son sistemas ortogonales:
   (*a*) Coordenadas polares en el plano.
   (*b*) Coordenadas esféricas en el espacio-tres.
   (*c*) Coordenadas cilíndricas en el espacio-tres.

4. ¿Para qué valores de x y y puede resolverse la ecuación

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

para z?

5. Supóngase con $f(u, v, x, y) = 0$, $g(u, v, x, y) = 0$ pueden resolverse para dos variables cualesquiera en términos de las otras dos. Si todas las derivadas relacionadas existen, ¿cuántos significados puede tener $\partial u/\partial x$? Si ninguno de los Jacobianos relacionados se hace cero, dar una fórmula para cada significado. ¿Puede esperarse que $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$?

6. Sean $u = x \cos y$, $v = x \operatorname{sen} y$. Demostrar que en el rectángulo R: $\{1 < x < 2, 0 < y < 7\}$, $\partial(u, v)/\partial(x, y) > 0$, de manera que el mapeo producido de R en el plano (u, v) es localmente uno a uno. Trazando un diagrama de la imagen de R en el plano (u, v), demostrar que no es globalmente uno a uno. Interpretar (x, y) como coordenadas curvilíneas en el plano (u, v) y así, dar una explicación geométrica de este mapeo.

EJERCICIOS B

1. Establecer y probar el análogo bidimensional del Teorema 11.6a.
2. Completar la demostración del Teorema 11.6c.
3. Si $f(x, y, z) = 0$ puede resolverse para x, y o bien z, y todas las derivadas en cuestión existen, demostrar que, en general, $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} = -1$.
4. Si $\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ es una función vectorial-n del vector-n $\mathbf{P}$ y el vector-m $\mathbf{Q}$, ¿bajo qué condiciones es de esperarse el poder resolver $\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = 0$ para $\mathbf{P}$ en términos de $\mathbf{Q}$?
5. Demostrar que $z^3 + p(x, y)z = 15$ tiene una solución positiva única $z = f(x, y)$ definida para todo (x, y) si p es una función positiva continuamente diferenciable de (x, y).
6. Demostrar que la conclusión del Ejercicio B5 se cumple simplemente bajo la hipótesis de que p sea no negativo.
7. ¿Cuál es el significado geométrico del Jacobiano en dos dimensiones?
8. Las coordenadas parabólicas están dadas por $x = uv$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$:
   (*a*) Hacer un esquema de las curvas $u = c$ y $v = c$.
   (*b*) Hacer un esquema del área limitada por $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 2$.
   (*c*) Calcular $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ en estas coordenadas.
   (*d*) Demostrar que éste es un sistema ortogonal.
9. Hacer $x = u \cos v$, $y = 2u \operatorname{sen} v$ y examinar el sistema como en el Ejercicio B8.
10. Supóngase que $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ definen dos superficies las cuales se intersectan en una curva. Demostrar que bajo restricciones suficientemente estrictas, el vector tangente a la curva es

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}\mathbf{i} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}\mathbf{j} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\mathbf{k}.$$

EJERCICIOS C

1. Sea (u, v, w) un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas en una región D del espacio (x, y, z). En cada punto $\mathbf{Q} = (x, y, z)$, sean $\mathbf{e}_1(\mathbf{Q})$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{Q})$, $\mathbf{e}_3(\mathbf{Q})$ vec-

tores unitarios en las direcciones de $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, respectivamente (ver Sección 11.5). Sea $(\partial/\partial s_i)$ la derivada direccional en la dirección $\mathbf{e}_i$. Entonces:

(*a*) Demostrar que para una f diferenciable en D

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial s_3}\mathbf{e}_3.$$

(*b*) Para funciones vectoriales diferenciables $\mathbf{F}$ en D, definir

$$F_1 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_1,\ F_2 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_2,\ F_3 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_3,$$

y demostrar que

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial s_1} + \frac{\partial F_2}{\partial s_2} + \frac{\partial F_3}{\partial s_3}$$

y

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial s_1} & \dfrac{\partial}{\partial s_2} & \dfrac{\partial}{\partial s_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

2. En particular, para las coordenadas esféricas, demostrar que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\,\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi.$$

11.7 VALORES EXTREMOS

Un punto $\mathbf{P}_0$ es un **punto máximo local** de una función f si existe una vecindad de $\mathbf{P}_0$ en la cual $f(\mathbf{P}) \leqslant f(\mathbf{P}_0)$ y un **mínimo local** si se cumple la desigualdad inversa. Es un **máximo** o un **mínimo absoluto** si se cumple la desigualdad apropiada para todos los puntos en el dominio de definición de la función. También distinguiremos entre puntos máximos **débiles** y **estrictos** de acuerdo con que se cumpla $f(\mathbf{P}) \leqslant f(\mathbf{P}_0)$ o bien $f(\mathbf{P}) < f(\mathbf{P}_0)$ para $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$. El término genérico, el cual cubre tanto los puntos máximos como los mínimos es el de puntos **extremos**. Los valores correspondientes de la función son **valores extremos**, locales o absolutos, de acuerdo con el caso.

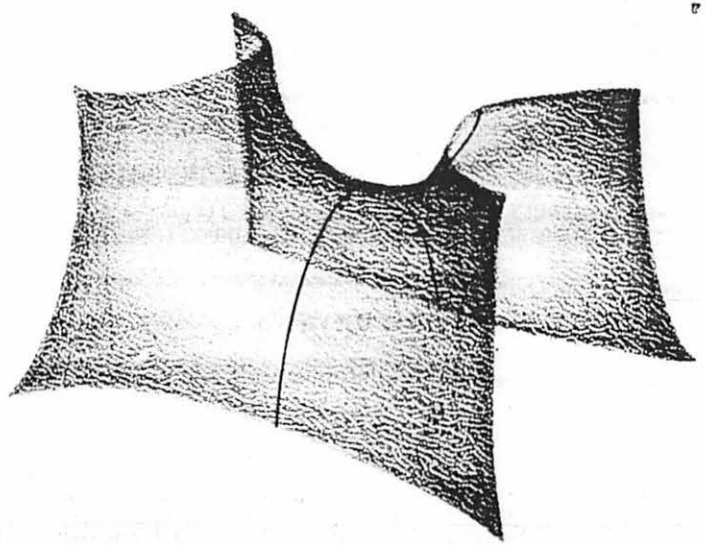
El criterio que vamos a describir en esta sección es para puntos extremos locales e interiores. Por supuesto que no tenemos que garantizar que se alcanzará un valor extremo, y aun cuando se sepa que se alcanza un valor extremo, como en el caso de una función continua definida en un conjunto cerrado acotado, puede alcanzarse en muchos puntos, algunos de los cuales o todos pueden ocurrir en la frontera. Así que cualquier examen completo de una función requiere que se tomen en consideración los valores sobre la frontera.

Para que una función diferenciable tenga un valor extremo en algún punto $\mathbf{P}_0$ interior a su dominio de definición, debe alcanzar este valor extremo sobre cualquier línea recta que pase por $\mathbf{P}_0$. Por lo tanto, es necesario que la derivada direccional de f en $\mathbf{P}_0$ se nulifique para toda dirección que pase por $\mathbf{P}_0$ y, en consecuencia, el gradiente debe nulificarse en $\mathbf{P}_0$:

$$\nabla f(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O}.$$

Esto es equivalente a un sistema de ecuaciones escalares $f_1(\mathbf{P}_0) = 0$, $f_2(\mathbf{P}_0) = 0$, y en tres dimensiones $f_3(\mathbf{P}_0) = 0$, para la determinación de las coordenadas de $\mathbf{P}_0$. Es evidente, en cualquier espacio vectorial Euclideano, que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Una solución de este sistema —esto es, un punto $\mathbf{P}_0$ para el cual $\nabla f(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O}$— se llama **punto crítico.**

Geométricamente, los puntos críticos son aquéllos en los cuales la superficie $z = f(\mathbf{P})$ tiene un plano tangente horizontal. Ellos incluyen ambos tipos de puntos extremos y otros que, en algunos aspectos, son los análogos a los puntos de inflexión. Estos recibirán el nombre de **puntos silla,** porque la forma de la superficie cercana al más sencillo de estos puntos semeja una silla de montar.



A continuación se dará un criterio para distinguir entre máximos, mínimos y puntos silla. Para establecer este criterio, examinemos las derivadas direccionales superiores. El criterio más sencillo es el siguiente.

11.7a Teorema. Considérese que f tiene todas sus segundas derivadas continuas en una región D y sea $\mathbf{Q}$ un punto crítico de f. Entonces en $\mathbf{Q}$ la función f tiene

(i) un mínimo si $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{Q}) > 0$ para todo vector unitario $\boldsymbol{\alpha}$

(ii) un máximo si $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{Q}) < 0$ para todo vector unitario $\boldsymbol{\alpha}$

(iii) un punto silla si el signo de $(\alpha \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{Q})$ puede cambiar.

En dos dimensiones, pueden reescribirse las condiciones:

(i) $f_{11} > 0, f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 > 0$ (mínimo)
(ii) $f_{11} < 0, f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 > 0$ (máximo)
(iii) $f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 < 0$ (punto silla).

Para aquellos estudiantes familiarizados con el álgebra, la conclusión puede establecerse sucintamente en la forma siguiente: Si la forma cuadrática $\Sigma f_{ij}\alpha_i\alpha_j$ está definida, se alcanza un valor extremo. Este valor es un mínimo si la forma es positiva y un máximo si es negativa. Si la forma es indefinida, entonces f tiene un punto silla en $\mathbf{Q}$. Si, no obstante, $\Sigma f_{ij}\alpha_i\alpha_j$ simplemente es semidefinida, el criterio falla, como puede verse mediante un ejemplo (ver Ejercicio A7).

Demostración. (Para un mínimo.) Por el teorema de Taylor, se tiene para $\mathbf{P}$ cerca de $\mathbf{Q}$

$$f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{Q}) + (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \nabla f(\mathbf{Q}) + \tfrac{1}{2}[(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \nabla]^2 f(\mathbf{P}_0),$$

donde $\mathbf{P}_0$ está sobre el segmento entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Así que

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q}) = \tfrac{1}{2}((\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{P}_0).$$

Si se introduce el vector unitario α en la dirección de $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, esta última fórmula puede expresarse como

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q}) = \tfrac{1}{2}|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2 \nabla_\alpha^2 f(\mathbf{P}_0).$$

Supuesto que las segundas derivadas de f son continuas en $\mathbf{Q}$ y $|\alpha| = 1$, se tiene

$$\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{P}_0) = \nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) + \eta, \tag{1}$$

donde $\eta \to 0$ y el límite se alcanza uniformemente con respecto a α.

Ahora bien, la cantidad $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q})$ es únicamente función de α, puesto que $\mathbf{Q}$ es fijo. De hecho, es un polinomio homogéneo $(\Sigma f_{ij}\alpha_i\alpha_j)$ de segundo grado en α, definido en el conjunto cerrado acotado $|\alpha| = 1$. Por lo tanto, alcanza un valor mínimo m para algún α_0, y este valor mínimo debe ser positivo, supuesto que $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q})$ es positiva para todo α. Ahora bien, tómese $\mathbf{P}$ tan próximo a $\mathbf{Q}$ que $|\eta| < m/2$. Entonces

$$f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q}) > \tfrac{1}{2}|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2\{m - |\eta|\} > \tfrac{1}{2}|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2\left(m - \frac{m}{2}\right)$$
$$= m|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2/4 > 0.$$

De aquí que, tal y como se aseveró, f alcanza un mínimo. La demostración para un máximo es semejante.

Cuando $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q})$ puede cambiar el signo es evidente, de (1), que $f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})$ también puede cambiar el signo en toda vecindad de $\mathbf{Q}$, de modo que esto indica un punto silla.

Solamente falta por establecer las fórmulas especiales para dos dimensiones. Aquí se tiene

$$\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) = f_{11}\alpha_1^2 + 2f_{12}\alpha_1\alpha_2 + f_{22}\alpha_2^2. \tag{2}$$

Completando el cuadrado puede expresarse esto en la forma

$$f_{11}[\alpha_1 + \alpha_2 f_{12}/f_{11}]^2 + \alpha_2^2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)/f_{11}. \tag{3}$$

Entonces es evidente que, si $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$, el signo de esta expresión es el signo de f_{11} o es cero. Si se nulifica, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, lo cual no es posible. Esto muestra la equivalencia de $f_{11} > 0$ con $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) > 0$ y $f_{11} < 0$ con $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) < 0$..

Si $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0$ y $f_{11} \neq 0$, entonces los dos términos en (3) tienen signos opuestos. Escogiendo $\alpha = (1, 0)$, se ve que

$$\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) = f_{11},$$

y escogiendo α de modo que $f_{11}\alpha_1 = -f_{12}\alpha_2$, se ve que

$$\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) = \alpha_2^2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)/f_{11},$$

y estos dos valores tienen signos opuestos.

Si $f_{12}f_{22} - f_{12}^2 < 0$ y $f_{22} \neq 0$, entonces (2) puede escribirse como

$$f_{22}[\alpha_2 + \alpha_1 f_{12}/f_{22}] + \alpha_1^2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)/f_{22},$$

y otra vez el mismo tipo de argumento demuestra que $\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q})$ puede cambiar signo.

Si tanto $f_{11} = 0$ como $f_{22} = 0$, entonces $f_{12} \neq 0$, porque

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = -f_{12}^2 < 0.$$

Entonces $$\nabla_\alpha^2 f(\mathbf{Q}) = 2f_{12}\alpha_1\alpha_2,$$

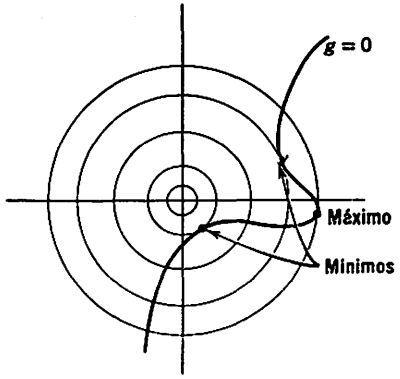
la cual evidentemente cambia de signo. ∎

Se nota que las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias, porque ciertamente $f(x, y) = x^2 + y^4$ alcanza un mínimo en el origen, sin embargo no llena estas condiciones. No continuaremos con este tema pero se observa que un examen de las derivadas superiores proporcionaría más teoremas esotéricos acerca de la existencia de puntos extremos. También es evidente que el problema en ninguna forma es tan sencillo cuando existen varias variables que cuando solamente existe una.

11.8 VALORES EXTREMOS BAJO RESTRICCIONES

Al discutir los valores extremos de funciones de diversas variables se presenta un nuevo tipo de problema, el cual no se tiene en el caso de funciones de una sola variable. Esto ocurre cuando se inquiere acerca de un extremo de una función, digamos f, bajo la condición (llamada **restricción** o **condición lateral**) de que otra función se nulificará.

Si se desea maximizar $f(x, y)$ bajo la condición de que $g(x, y) = 0$, podríamos tratar de resolver la ecuación $g(x, y) = 0$ para y en términos de x, sustituir en $f(x, y)$ y minimizar la función resultante de x. En muchos casos esto es difícil y aun imposible, de ahí que sea necesario otro acercamiento.

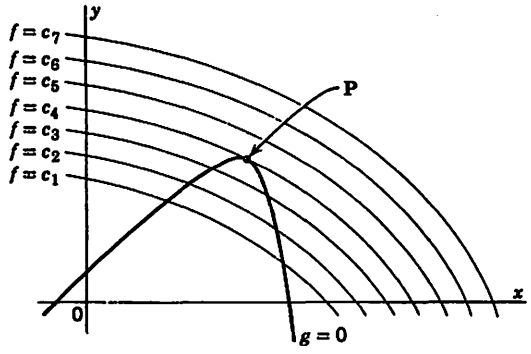


Por ejemplo, supongamos que se desea obtener el valor menor o mayor de la función f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bajo la restricción $g(x, y) = 0$. Es fácil ver que el problema es maximizar o minimizar la distancia desde el origen hasta un punto sobre la curva descrita por $g(x, y) = 0$. Las líneas de nivel de la función f son circunferencias con centro en el origen. Conforme un punto atraviesa la curva, cruzará las líneas de nivel ya sea yendo hacia dentro o hacia afuera. Por tanto, deben esperarse valores extremos en los puntos donde cambia la dirección del cruzamiento.

En general, la situación es, con mucho, la misma cuando se desea maximizar una función f sobre una curva dada por $g = 0$. Un punto que



traza la curva $g = 0$ cruzará las curvas $f = c$ en la dirección de las c crecientes o bien decrecientes. Cuando la dirección del cruzamiento cambia, es de esperarse un punto extremo. En la figura, la función f alcanzará un máximo sobre $g = 0$ en **P** si la dirección de crecimiento de c está arriba, de otra manera, alcanzará un mínimo allí.

Si todas las funciones son suaves —esto es, si tienen derivadas continuas— es de esperar que la curva $g = 0$ sea tangente a la curva $f = c$ en **P**. Es decir, es de esperar que sus líneas tangentes (o planos en las dimensiones superiores) coincidan. Así que si (a, b) es el punto extremo

$$(x - a)f_1(a, b) + (y - b)f_2(a, b) = 0$$

y

$$(x - a)g_1(a, b) + (y - b)g_2(a, b) = 0$$

deben representar la misma línea. Esto significa, por supuesto, que sus coeficientes deben ser proporcionales. En otras palabras, debe existir una λ tal que

$$f_1(a, b) + \lambda g_1(a, b) = 0$$
$$f_2(a, b) + \lambda g_2(a, b) = 0,$$

y, por supuesto,

$$g(a, b) = 0.$$

Así que se tienen tres ecuaciones para las tres incógnitas a, b y λ.

El método que se ha bosquejado para la localización de los puntos críticos se conoce como **método de Lagrange** y λ se llama **multiplicador.** Supuesto que el método del multiplicador solamente conduce a los puntos críticos, todavía es necesario distinguir, en alguna forma, los puntos máximos, mínimos y los puntos del tipo de inflexión. A continuación se ofrecerá una demostración de que el método descrito proporciona una condición necesaria para la existencia de un valor extremo.

11.8a Teorema. Sean f y g definidas y diferenciables en una región D. Para que f alcance un valor extremo bajo la condición de que $g(\mathbf{P}) = 0$ en un punto $\mathbf{P}_0$ en D, donde $\nabla g \neq \mathbf{O}$, es necesario que exista un número λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{P}_0) + \lambda \nabla g(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O}$$

y

$$g(\mathbf{P}_0) = 0.$$

Demostración. (Para tres dimensiones). La suposición de que $\nabla g(\mathbf{P}_0) \neq \mathbf{O}$ significa que no todas las g_1, g_2 y g_3 se nulifican en $\mathbf{P}_0 = (a, b, c)$. Supóngase, para fijar ideas, que $g_3(\mathbf{P}_0) \neq 0$. Ahora es posible resolver $g(x, y, z) = 0$ para z y obtener $z = \phi(x, y)$ cerca de (a, b), $\phi(a, b) = c$. Entonces $f[x, y, \phi(x, y)]$ debe alcanzar un valor extremo en a, de modo que

$$f_1[a, b, \phi(a, b)] + f_3[a, b, \phi(a, b)]\phi_1(a, b) = 0,$$

y

$$f_2[a, b, \phi(a, b)] + f_3[a, b, \phi(a, b)]\phi_2(a, b) = 0.$$

Pero puesto que $\phi(a, b) = c$, estas ecuaciones se transforman en

$$f_1(a, b, c) + f_3(a, b, c)\phi_1(a, b) = 0 \tag{1}$$

$$f_2(a, b, c) + f_3(a, b, c)\phi_2(a, b) = 0 \tag{2}$$

Ahora bien, $g[x, y, \phi(x, y)] \equiv 0$ cerca de (a, b). De aquí que g también satisface

$$g_1(a, b, c) + g_3(a, b, c)\phi_1(a, b) = 0 \tag{3}$$

$$g_2(a, b, c) + g_3(a, b, c)\phi_2(a, b) = 0. \tag{4}$$

Definimos λ por

$$\lambda = -f_3(a, b, c)/g_3(a, b, c) \tag{5}$$

y usamos (5) para eliminar ϕ_1 y ϕ_2 de (1), (2), (3) y (4). Esto lleva a

$$f_1(a, b, c) + \lambda g_1(a, b, c) = 0$$

$$f_2(a, b, c) + \lambda g_2(a, b, c) = 0$$

y (5) es equivalente a

$$f_3(a, b, c) + \lambda g_3(a, b, c) = 0.$$

Estas tres últimas ecuaciones son simplemente las componentes de

$$\nabla f(\mathbf{P}_0) + \lambda \nabla g(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O}. \quad \blacksquare$$

Donde existen varias condiciones de restricción, la regla es básicamente la misma: Una condición necesaria para que f alcance un valor extremo bajo las restricciones $g = 0$, $h = 0$, ..., $p = 0$ en un punto $\mathbf{P}_0$ es que existan multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\nabla f(\mathbf{P}_0) + \lambda_1 \nabla g(\mathbf{P}_0) + \lambda_2 \nabla h(\mathbf{P}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla p(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O}.$$

No se dará la demostración de esta última expresión. El estudiante debe convencerse a sí mismo (heurísticamente) que normalmente debe tomarse $k \leqslant n - 1$, donde n es la dimensión del espacio.

EJERCICIOS A

1. Encontrar y probar los puntos críticos de las siguientes funciones:

   (a) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$

   (b) $x^3 + 12xy + y^3 + 5$

   (c) $x^3 - y^3 + 3axy$

   (d) $\dfrac{xy}{8} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

   (e) $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{24}{x} + \dfrac{24}{y}$

   (f) $(x + y)\, e^{-x^2-y^2}$

2. Encontrar los valores extremos absolutos de las siguientes funciones:

   (a) $x^2 + y^2 - 2y$ sobre $\{x^2 + 2x + y^2 < 3\}$

   (b) $x^2 + 12xy + y^2$ sobre $\{x^2 + y^2 = 4\}$

   (c) $\cos x \cos y \cos(x + y)$ sobre $\{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$

   (d) $\sqrt{(6 - x)(6 - y)(x + y - 6)}$ sobre el triángulo limitado por $x = 6$, $y = 6$, $x + y = 6$.

3. Sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ puntos dados en el espacio-tres. Encontrar $\mathbf{P}$ de modo que $|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}| + |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}|$ sea la menor.

4. Encontrar las dimensiones del paralelepípedo rectangular mayor con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice sobre $x + 3y + 2z = 6$ si x, y, z son positivas.

5. Se construye una bandeja a partir de una cinta de metal de 15 pulgadas de ancho, doblando una cinta de x pulgadas a lo largo de cada una de sus aristas de tal manera que se forman ángulos iguales θ con la base. Encontrar x y θ de modo que la bandeja contenga el mayor volumen.

6. Encontrar el punto $\mathbf{P}$ más cercano al origen sobre la línea de intersección de los dos planos $2x + 3y + z = 6$ y $x + 2y + 2z = 4$. Verificar que el segmento desde $\mathbf{O}$ hasta $\mathbf{P}$ es ortogonal a la línea.

7. Verificar que f, dada por $f(x, y) = x^2 + y^4$, tiene un mínimo en el origen pero no satisface las condiciones del Teorema 11.7a.

EJERCICIOS B

1. Probar el teorema bosquejado al final de la Sección 11.6.

2. Demostrar que la función f definida por $f(x, y) = (y - x^3)(y - 8x^3)$ tiene un punto silla en el origen. Demostrar que, sobre toda línea recta que pasa por el origen, f alcanza un mínimo en el origen.

3. Encontrar el mayor valor de $\operatorname{sen} x/2 \operatorname{sen} y/2 \operatorname{sen} z/2$ si x, y y z son positivas y $x + y + z = \pi$.

4. Encontrar y probar los puntos críticos de

   (a) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$ (b) $y^4 + x^2 - 2xy$

5. Encontrar x y y tales que $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{t} - x - yt)^2\, dt$ sea la menor.

EJERCICIOS C

1. Supóngase que f es una función continuamente diferenciable en el espacio-tres y $\mathbf{P}_0$ es el punto sobre la superficie S descrita por $f(x, y, z) = 0$ en la cual S se aproxima lo más posible a un punto $\mathbf{Q}_0$, no sobre la propia superficie S. Si $\nabla f(\mathbf{P}_0) \neq \mathbf{O}$, demostrar primero mediante un argumento geométrico, y después rigurosamente, que $\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0$ es normal a S en $\mathbf{P}_0$.

2. (a) Demostrar que el valor máximo de $x^2y^2z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ es $(\rho^2/3)^3$.

   (b) Demostrar que el mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$ sobre $x^2y^2z^2 = (\rho^2/3)^3$ es ρ^2.

   (b) Generalizar (a) o bien (b) y así deducir que, para $a$es positivas $(a_1a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, es decir, la media geométrica es menor o igual a la media aritmética.

12

Integrales múltiples

12.1 INTEGRALES SOBRE RECTANGULOS

Ahora estudiaremos las integrales de funciones de algunas variables. Las motivaciones y la heurística relacionadas con las integrales múltiples son, en su mayoría, las mismas que para las integrales sencillas (que ahora llamaremos integrales de una función de una variable real). Por esta razón, el estudiante debe repasar la introducción al Capítulo 4.

Primero consideraremos integrales sobre regiones rectangulares dadas en dos dimensiones por

$$R: \begin{Bmatrix} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \end{Bmatrix}$$

y en tres dimensiones por

$$R: \begin{Bmatrix} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \\ a_3 < z < b_3 \end{Bmatrix}$$

Nuestra discusión se referirá en gran parte a las integrales en dos y tres dimensiones, solamente con observaciones ocasionales acerca de las dimensiones superiores, pero una lectura cuidadosa de las demostraciones evidenciará que no se requieren cambios esenciales para manejar las integrales en dimensiones superiores. En n dimensiones el rectángulo se describiría por

$$R: \{a_i < x_i < b_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

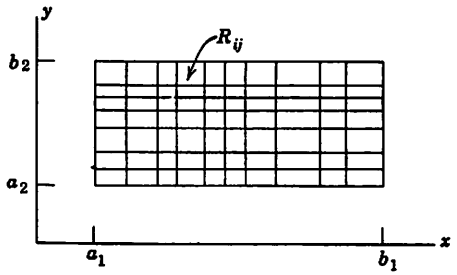
Procederemos a establecer la notación en una forma análoga a la usada en el Capítulo 4.

Formemos una partición de cada dimensión de R:

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_p = b_2,$$

y si es en tres dimensiones,

$$a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = b_3.$$



Estas forman una partición Δ de R en rectángulos más pequeños:

$$R_{ij}: \begin{Bmatrix} x_{i-1} < x < x_i \\ y_{j-1} < y < y_j \end{Bmatrix} \quad \text{bien} \quad R_{ijk}: \begin{Bmatrix} x_{i-1} < x < x_i \\ y_{j-1} < y < y_j \\ z_{k-1} < z < z_k \end{Bmatrix}.$$

La **norma** de la partición Δ, denotada por $\|\Delta\|$, se toma como el diámetro máximo de los subrectángulos —es decir, en dos dimensiones

$$\|\Delta\| = \max_{\Delta} \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{j-1} - y_j)^2},$$

donde $\max_{\Delta}$ significa que debe tomarse el máximo de todos los diámetros (en este caso diagonales) de todos los subrectángulos que forma Δ.

Además, hagamos $A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ y $V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. Estos, por supuesto, son el área y el volumen de R_{ij} y R_{ijk}, respectivamente.

Suponemos que nuestra función está definida y acotada en R. Usaremos la siguiente notación de manera consistente:

$$M = \sup_R f \qquad m = \inf_R f$$
$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f \qquad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f,$$

y en tres dimensiones,

$$M_{ijk} = \sup_{R_{ijk}} f \qquad m_{ijk} = \inf_{R_{ijk}} f.$$

Por suma superior $\bar{S}_\Delta(f, R)$ —o más brevemente $\bar{S}_\Delta$, puesto que f y R no cambian— debe entenderse

$$\sum_\Delta M_{ij}A_{ij} \text{ o bien } \sum_\Delta M_{ijk}V_{ijk},$$

de acuerdo con la dimensión. Por supuesto que $\sum_\Delta$ significa que, para cada R_{ij}, se calcula el producto $M_{ij}A_{ij}$ y la suma se toma sobre todo R_{ij} en Δ. Se aplica una observación semejante al caso tridimensional.

Por suma inferior $\underline{S}_\Delta(f, R)$, o más brevemente $\underline{S}_\Delta$, debe entenderse

$$\sum_\Delta m_{ij}A_{ij} \text{ o bien } \sum_\Delta m_{ijk}V_{ijk}.$$

A continuación estableceremos una serie de lemas semejantes a los del Capítulo 4.

12.1a Lema. $\bar{S}_\Delta \geqslant \underline{S}_\Delta$.

Demostración. Inmediata puesto que $M_{ij} \geqslant m_{ij}$. ∎

Se dirá que una partición Δ' es un refinamiento de una partición Δ si la partición del intervalo x por Δ' es un refinamiento de la partición del intervalo x por Δ, lo que es cierto para los intervalos y y z.

12.1b Lema. Si Δ' es un refinamiento de Δ, entonces

$$\bar{S}_{\Delta'} < \bar{S}_\Delta \quad \text{y} \quad \underline{S}_{\Delta'} > \underline{S}_\Delta.$$

Demostración. (Para dos dimensiones). Sea R_{ij} un subrectángulo en la partición Δ. Entonces, queda inalterado en Δ' o queda cortado en un numero finito de subrectángulos R'_{qr} que pertenecen a Δ'. La contribución a $\bar{S}_{\Delta'}$ debida a R_{ij} es (1) la misma, si R_{ij} no se subdividió, o bien (2) es $\sum_{R_{ij}} M'_{qr}A'_{qr}$, donde la suma se toma sobre aquellos rectángulos en los cuales se subdividió R_{ij}. Pero allí $M'_{qr} \leqslant M_{ij}$, de modo que

R_{ij}

R'_{qr}	R'_{qr}
R'_{qr}	R'_{qr}
R'_{qr}	R'_{qr}

$$\sum_{R_{ij}} M'_{qr}A'_{qr} < \sum_{R_{ij}} M_{ij}A'_{qr} = M_{ij} \sum_{R_{ij}} A'_{qr} = M_{ij}A_{ij}.$$

Así que, en todo caso, la contribución a $\bar{S}_{\Delta'}$ debida a R_{ij} es menor que o igual a la contribución a $\bar{S}_\Delta$ debida al mismo R_{ij}. Entonces, sumando sobre todo R_{ij} en Δ, se obtiene el resultado deseado. Es evidente que la desigualdad para las sumas inferiores sigue el mismo camino en sentido inverso y es igualmente evidente que se aplica el mismo argumento en cualquier número de dimensiones. ∎

12.1c Lema. Si Δ_1 y Δ_2 son dos particiones cualesquiera de R, entonces

$$S_{\Delta_1} > \underline{S}_{\Delta_2}.$$

Demostración. Sea Δ' un refinamiento común de Δ_1 y Δ_2. (¿Cómo puede formarse?) Entonces, por los Lemas 12.1a y b,

$$S_{\Delta_1} > S_{\Delta'} > \underline{S}_{\Delta'} > \underline{S}_{\Delta_2}. \quad \blacksquare$$

Por lo tanto, ahora puede afirmarse que, para una función acotada dada f, definida en un rectángulo R, la clase de números formada por las sumas superiores tiene cualquier suma inferior como una cota inferior, e inversamente, la clase de números formada por las sumas inferiores tiene cualquier suma superior como una cota superior. De aquí que

$$\inf S_\Delta > \underline{S}_{\Delta'}$$

para cualquier partición Δ'. Entonces, formando el suprémum del segundo miembro, se obtiene

$$\inf S_\Delta > \sup \underline{S}_\Delta.$$

Estas cotas extremas reciben el nombre de **integrales de Riemann-Darboux superior** e **inferior,** respectivamente, y se denotan por

$$\inf S_\Delta = \overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA \text{ o bien } \overline{\iiint_R} f(\mathbf{P})\,dV$$

y

$$\sup \underline{S}_\Delta = \underline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA \text{ o bien } \underline{\iiint_R} f(\mathbf{P})\,dV.$$

Por tanto, se ha probado que

12.1d Lema

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA > \underline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA$$

y

$$\overline{\iiint_R} f(\mathbf{P})\,dV > \underline{\iiint_R} f(\mathbf{P})\,dV.$$

Ahora podemos definir la integral de Riemann de una función f sobre un rectángulo R. Sea f una función acotada definida en R. Si

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA = \underline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA,$$

se dice que f es **integrable** según **Riemann** sobre R. El valor común se llamará **integral de Riemann** de f sobre R y se denotará por

$$\iint_R f(\mathbf{P})\,dA \text{ o bien } \iint_R f(\mathbf{P})\,dx\,dy.$$

El volumen o triple integral de Riemann se define análogamente. Se denotará por

$$\iiint_R f(\mathbf{P})\,dV \quad \text{o bien} \quad \iiint_R f(\mathbf{P})\,dx\,dy\,dz$$

Una consecuencia inmediata del Lema 12.1c es el siguiente criterio de integrabilidad.

12.1e Teorema. Sea f una función acotada definida en un rectángulo R. Una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable sobre R es que para cada $\epsilon > 0$ exista una partición Δ de R tal que

$$S_\Delta - \underline{S}_\Delta < \epsilon.$$

Demostración. Ver Ejercicio B4.

Ahora se desea explorar la idea de la integral como límite de una suma de Riemann. Con este objeto se necesita el siguiente lema.

12.1f Lema. Si f es una función acotada en un rectangulo R, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon)$ tal que

$$S_\Delta < \overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA + \epsilon$$

y

$$\underline{S}_\Delta > \underline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA - \epsilon$$

para todas las particiones Δ para las cuales $\|\Delta\| < \delta(\epsilon)$. El mismo resultado se cumple, por supuesto, para las triples integrales.

Se probará la primera desigualdad. La segunda es semejante. Por simplicidad, nuestra demostración solamente es para el caso de las dobles integrales, pero durante el desarrollo, el estudiante se dará cuenta que el argumento no es esencialmente diferente en tres (o más) dimensiones.

Demostración. De acuerdo con la definición de integral superior, existe una partición Δ' para la cual

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA < S_{\Delta'} < \overline{\iint_R} f(\mathbf{P})\,dA + \epsilon/2.$$

Esta partición se escogerá y se considerará fija durante todo el siguiente argumento. Supóngase que los puntos de partición de Δ' están dados por

$$a_1 = x_0' < x_1' < \cdots < x_{n'}' = b_1$$

$$a_2 = y_0' < y_1' < \cdots < y_{m'}' = b_2.$$

Ahora escojamos

$$\delta = \sqrt{\epsilon/2(M - m)(n' + m')},$$

donde M, m son $\sup_D f$ e $\inf_D f$. Se demostrará que cualquier D con $\|\Delta\| < \delta$ satisface la conclusión del teorema.

Sea Δ cualquiera de esas particiones y Δ'' el refinamiento común de Δ y Δ' con los correspondientes subrectángulos R''_{pq}. Supóngase que R_{ij} es un subrectángulo de Δ el cual se subdividió mediante el refinamiento en ciertos rectángulos R''_{pq}. Entonces cualquier término de $\bar{S}_\Delta$ puede escribirse como

$$M_{ij}A_{ij} = M_{ij} \sum_{R_{ij}} A''_{pq},$$

donde $M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$, y así sucesivamente, y donde la suma se extiende sobre los R''_{pq} contenidos en R_{ij}. Para cada uno de estos R''_{pq}, definir $\mathcal{M}''_{pq} = M_{ij}$. Entonces

$$M_{ij}A_{ij} = \sum_{R_{ij}} \mathcal{M}''_{pq}A''_{pq}.$$

Sumando sobre todos los R_{ij} en Δ, se obtiene

$$\bar{S}_\Delta = \Sigma\, \mathcal{M}''_{pq}A''_{pq}.$$

Y, por definición,

$$\bar{S}_{\Delta''} = \Sigma\, M''_{pq}A''_{pq}.$$

Se desea estimar la diferencia entre estas dos sumas. Con este objeto, separemos los rectángulos R_{ij} de Δ en dos clases: (I) aquellos que no cambian por el refinamiento y los cuales, por tanto, se presentan como los R''_{pr} y, (II) aquellos que se subdividen por el refinamiento y de aquí que forman dos o más de los R''_{pq}. Es evidente que la contribución a $\bar{S}_\Delta$ y $\bar{S}_{\Delta''}$ debida a los rectángulos de la primera clase es la misma y, por tanto, estas contribuciones se cancelan cuando se calcula la diferencia.

Los rectángulos de la clase II pueden cortarse mediante una línea vertical $x = x'_i$ o bien una horizontal $y = y'_j$. Supuesto que $\|\Delta\| < \delta$, evidentemente cualquier dimensión de cualquier rectángulo en Δ es $< \delta$. En consecuencia, el área de cualquiera de tales rectángulos es menor que δ^2 y se tienen, cuando más, n' de ellos, de modo que el área total de todos esos rectángulos es, cuando más, $n'\,\delta^2$. De modo semejante, el área total de todos los rectángulos cortados por las líneas de la forma $y = y'$ es, cuando más, $m'\delta^2$. Así que

$$0 < \bar{S}_\Delta - \bar{S}_{\Delta''} = \sum_\Delta \sum_{R_{ij}} (\mathcal{M}''_{pq} - M''_{pq})A''_{pq}$$

$$< \sum_{(II)} \sum_{R_{ij}} (M - m)A''_{pq} = \sum_{(II)} (M - m)A_{ij} = (M - m)\delta^2(n' + m'),$$

donde $\sum_{(II)}$ significa que la suma se toma sobre todos los rectángulos de la clase II. Sustituyendo para δ,

$$0 < \bar{S}_\Delta - \bar{S}_{\Delta''} < \epsilon/2.$$

Ahora bien, $\bar{S}_{\Delta''} \leqslant \bar{S}_{\Delta'}$ ya que Δ'' es un refinamiento de Δ'. Así que finalmente se obtiene

$$0 < \bar{S}_\Delta - \iint_R f(\mathbf{P})\,dA < \bar{S}_\Delta - \bar{S}_{\Delta'} + \epsilon/2 < \bar{S}_\Delta - \bar{S}_{\Delta''} + \epsilon/2 < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Sea f una función acotada sobre R y Δ una partición de R. En cada subrectángulo R_{ij} de Δ puede escogerse un punto $\mathbf{P}_{ij}$ (o $\mathbf{P}_{ijk}$ en tres dimensiones) y formar la suma

$$S_\Delta(f, R, \mathbf{P}) = \sum_\Delta f(\mathbf{P}_{ij})A_{ij}$$

o bien

$$S_\Delta(f, R, \mathbf{P}) = \sum_\Delta f(\mathbf{P}_{ijk})V_{ijk},$$

la cual en ocasiones se abreviará como $S_\Delta(\mathbf{P})$. Tal suma se llama **suma de Riemann.**

Se dirá que $\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(\mathbf{P}) = J$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un δ tal que

$$|S_\Delta(\mathbf{P}) - J| < \epsilon \qquad \text{si } \|\Delta\| < \delta$$

para todas las selecciones de los $\mathbf{P}$. Entonces, como en el caso unidimensional, se tiene el siguiente teorema.

12.1g Teorema. Sea f una función acotada R. Una condición necesaria y suficiente para que $\iint_R f(\mathbf{P})\,dA$ o bien $\iiint_R f(\mathbf{P})\,dV$ exista y sea igual a J es que $\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(\mathbf{P}) = J$.

Demostración. Ver Ejercicio B4.

12.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL. CLASES DE FUNCIONES INTEGRABLES

Ahora se desea establecer algunas de las propiedades elementales de las integrales sobre rectángulos las cuales serán útiles en los cálculos. Las demostraciones son tan semejantes a las del caso unidimensional que, por lo general, se omitirán. Sin embargo, sería un buen repaso para el estudiante desarrollar las demostraciones de estos teoremas. (Ver Ejercicio C5.)

12.2a Teorema. Si f es integrable sobre un rectángulo R, es integrable sobre cualquier subrectángulo de R.

12.2b Teorema. Si f es integrable sobre un rectángulo R, y si R_1 y R_2 se forman a partir de R cortándolo con una línea (o plano) paralela a uno de los ejes coordenados (o planos), entonces

$$\iint_{R_1} f(\mathbf{P})\,dA + \iint_{R_2} f(\mathbf{P})\,dA = \iint_{R} f(\mathbf{P})\,dA$$

o bien

$$\iiint_{R_1} f(\mathbf{P})\,dV + \iiint_{R_2} f(\mathbf{P})\,dV = \iiint_{R} f(\mathbf{P})\,dV.$$

12.2c Teorema. Si f y g son integrables sobre R y si $f(\mathbf{P}) \geqslant g(\mathbf{P})$ en R, entonces

$$\iint_{R} f(\mathbf{P})\,dA > \iint_{R} g(\mathbf{P})\,dA$$

o bien

$$\iiint_{R} f(\mathbf{P})\,dV > \iiint_{R} g(\mathbf{P})\,dV.$$

12.2d Teorema. Si f es integrable sobre R, entonces también lo son f^+, f^- y $|f|$. (Ver la Sección 4.4 respecto a la definición de f^+ y f^-.)

12.2e Teorema. Si f y g son integrables sobre R, también lo son $f \pm g$ y $f \cdot g$; y, si existe una constante $c > 0$ tal que $|g| \geqslant c$, también lo es f/g.

12.2f Teorema. Si f es una función continua en R, es integrable sobre R.

Demostración. Por el Teorema 9.6d, f es uniformemente continua en R, ya que R es un conjunto cerrado acotado. Así que, correspondiendo a cada $\epsilon > 0$, existe un δ uniforme tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon$ para todo par de puntos $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ en R para los cuales $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$.

Escójase Δ de modo que $\|\Delta\| < \epsilon$. Entonces en cada R_{ij} de Δ, se tiene $0 \leqslant M_{ij} - m_{ij} \leqslant \epsilon$, puesto que existen puntos $\mathbf{P}_{ij}$ y $\mathbf{Q}_{ij}$ en los cuales $f(\mathbf{P}_{ij}) = M_{ij}$ y $f(\mathbf{Q}_{ij}) = m_{ij}$. Comparemos las sumas superior e inferior:

$$S_\Delta - \underline{S}_\Delta = \sum_\Delta (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} < \epsilon \sum_\Delta A_{ij} = \epsilon A,$$

donde A es el área de R. De manera semejante, en tres dimensiones $S_\Delta - \underline{S}_\Delta < \epsilon V$. Y, por el Teorema 12.1d, la función f es integrable. ∎

El teorema del valor medio se lleva hacia las integrales múltiples.

12.2g Teorema. Si f y g son integrables sobre R y g es no negativa allí, entonces existe un número μ, $\inf_R f \leqslant \mu \leqslant \sup_R f$, tal que

$$\iint_R f(\mathbf{P})g(\mathbf{P})\,dA = \mu \iint_R g(\mathbf{P})\,dA,$$

y si f es continua existe un punto $\mathbf{P}_0$ en R en el cual $\mu = f(\mathbf{P}_0)$. (Ver Ejercicio C1 de la Sección 9.7.)

12.3 INTEGRALES ITERADAS

Si f está definida en un rectángulo R: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$ y si para cada x fija es una función integrable de y, entonces esta integral define una función g en $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1\}$:

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy.$$

Si, a su vez, g es una función integrable de x, el resultado

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} (x, y)\,dy \right) dx$$

se llama **integral iterada** y se denotará aquí por

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy.$$

Una suma de Riemann para una doble integral

$$S_\Delta = \sum_\Delta f(\mathbf{P}_{ij})A_{ij}$$

puede arreglarse como una suma iterada:

$$\begin{aligned} S &= \sum_\Delta f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_i (x_i - x_{i-1}) \sum_j f(x_i y_j)(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

La forma de esta suma parece sugerir que su límite podría ser una integral iterada. Por tanto, podría esperarse, bajo suficientes restricciones, que es posible demostrar que

$$\iint_R f(\mathbf{P})\,dA = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy. \tag{1}$$

En el siguiente teorema se demuestra que esto es cierto.

12.3a Teorema. Supóngase que f es integrable en R: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$ y supóngase que para cada x fija es una función integrable de y en $\{a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$ Entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy,$$

es una función integrable de x sobre $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1\}$ y se cumple (1).

Demostración. Sea Δ una partición en R y sea ξ_i un número arbitrariamente escogido en $\{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}$, para cada i. Entonces, por el teorema del valor medio para integrales sencillas, existe un μ_{ij} tal que

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy = \mu_{ij}\, \Delta_j y,$$

donde $m_{ij} \leqslant \mu_{ij} \leqslant M_{ij}$. Por lo tanto

$$s_\Delta < \sum \mu_{ij} A_{ij} < S_\Delta.$$

Supuesto que f es integrable sobre R, se deduce que la suma de la expresión anterior tiende hacia

$$\iint_R f(\mathbf{P})\, dA \text{ conforme } \|\Delta\| \to 0 \tag{2}$$

Esta suma también puede escribirse como

$$\sum_\Delta \mu_{ij} A_{ij} = \sum_{i,j} \Delta_i x \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy$$

$$= \sum_i \int_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, y)\, dy\, \Delta_i x = \sum_i g(\xi_i)\, \Delta_i x.$$

Por lo que se ha demostrado, esta última suma tiene un límite conforme la norma de la partición x tiende hacia cero. Pero este es el significado de la integrabilidad de g. Además el valor de este límite, a saber (2), es la integral de g. ∎

Es evidente, debido a la simetría del argumento, que pueden intercambiarse los papeles de x y y en el supuesto, desde luego, que las hipótesis se intercambian de la manera correspondiente. De donde, si f es integrable en x para cada y e integrable en y para cada x, entonces las dos integrales iteradas son respectivamente iguales, puesto que ambas son iguales a la doble integral. Así se tiene el siguiente corolario.

12.3b Corolario. Si f es integrable como una doble integral sobre R_1: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$ y si es integrable en x para cada y e integrable en y para cada x, entonces

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx.$$

Sería magnífico tener un inverso del Teorema 12.3a, el cual podría decir algo como esto: Si f es integrable en y para cada x y si el resultado es integrable en x, entonces la doble integral también existe y es igual a la integral iterada. Sin embargo, la situación no es tan sencilla (ver el Ejercicio B1 como un ejemplo demostrativo); es necesaria alguna condición adicional para garantizar la existencia de la doble integral. Y, por supuesto, una vez que tal condición se presupone puede reemplazar la hipótesis de que la doble integral existe.

El Teorema 12.3a se extiende hacia las triples integrales de la siguiente manera.

12.3c Teorema. Sea f una función integrable sobre el rectángulo R: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$ y supóngase que para cada x fija es una función integrable sobre el rectángulo R_{yz}: $\{a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$. Entonces esta integral es una función integrable de x y

$$\iiint_R f(\mathbf{P})\, dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \iint_{R_{yz}} f(x, y, z)\, dy\, dz$$

12.3d Teorema. Sea f una función integrable sobre el rectángulo R: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$ y supóngase que para cada (y, z) fijo es una función integrable de x. Entonces esta integral es una función integrable de (y, z) sobre R_{yz} y

$$\iiint_R f(\mathbf{P})\, dV = \iint_{R_{yz}} dy\, dz \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\, dx.$$

Las demostraciones de estos dos teoremas son semejantes a la demostración del Teorema 12.3a y por ello se dejan como ejercicios.

Si se satisfacen las hipótesis del Teorema 12.3a, podemos aplicarlo a la doble integral que se presenta en 12.3c o d, para expresar la triple integral como una triple integral iterada. Por ejemplo,

$$\iiint_R f(\mathbf{P})\, dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz.$$

En particular, puede observarse que, si f es continua, entonces todas las integrales en cuestión existen, de manera que la integral de una función continua definida en un rectángulo puede evaluarse mediante integrales iteradas donde la iteración puede tomarse en cualquier orden.

EJERCICIOS A

1. Evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iint_R (x + y)\, e^{x+y}\, dx\, dy$ $\qquad R: \{0 < x < 2,\ 1 < y < 4\}$

(b) $\displaystyle\iint_R |x + y|\, dx\, dy$ $\qquad R: \{|x| < 1,\ |y| < 1\}$

(c) $\iint_R \frac{x}{y}\,dx\,dy$ $\qquad R: \{|x| < 1, 1 < y < 2\}$

(d) $\iiint_R \cos(x + 2y + 3z)\,dx\,dy\,dz$ $\qquad R: \{0 < x < 2, 1 < y < 3, |z| < 1\}$

2. Demostrar que si f es integrable sobre R y c es una constante, entonces

$$\iint_R cf(\mathbf{P})\,dA = c\iint_R f(\mathbf{P})\,dA$$

3. Supóngase que f y g son integrables sobre R, $g \geqslant 0$ y $\iint_R g(\mathbf{P})\,dA \neq 0$. Demostrar que $\iint_R f(\mathbf{P})\,g(\mathbf{P})\,dA = 0$.

EJERCICIOS B

1. Sea f definida en R: $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 3y^2 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Demostrar que:

(a) f es no integrable sobre R.

(b) la integral iterada $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy$ existe.

(c) la otra integral iterada no existe.

2. Sea f definida en R: $\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$, sea monótona en x para toda y y sea monótona en y para toda x.

(a) Demostrar que f es integrable sobre R.

(b) Si f es creciente en y, demostrar que

$$(b_2 - a_2)\int_{a_1}^{b_1} f(x, a_2)\,dx \leqslant \iint_R f\,dA \leqslant (b_2 - a_2)\int_{a_1}^{b_1} f(x, b_2)\,dx.$$

3. Sea f continua en R: $\{a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\}$. Para (α, β) en R, denotar $\{a_1 < x < \alpha, a_2 < y < \beta\}$ por $R_{\alpha\beta}$. Demostrar que $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\iint_{R_{\alpha\beta}} f(x, y)\,dA = f(\alpha, \beta)$.

4. Probar los Teoremas 12.1d y 12.1f.

EJERCICIOS C

1. Sea $f = \begin{cases} x^2y + y^3 & \text{en } \{0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ x^3y + x & \text{en } \{1 < x < 2, 0 < y < 1\}. \end{cases}$

Demostrar que f es integrable sobre $\{0 < x < 2, 0 < y < 1\}$.

2. Sea f una función integrable de x en $\{a_1 < x < b_1\}$ y g integrable en $\{a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$. Demostrar que $f(x)g(y)$ define una función integrable en $\{a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\}$.

3. Sean f y g integrables sobre $\{a < x < b\}$. Denotar $\{a < x < b, a < y < b\}$ por S y, aplicando el Ejercicio 2 anterior, demostrar que

$$\frac{1}{2}\iint_S [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\,dx\,dy = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) - \left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2$$

4. Si f y g son integrables sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces

$$\frac{1}{2}\iint_S [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]\,dx\,dy = (b - a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

y si f y g son monótonas, en el mismo sentido, entonces

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

5. Probar los Teoremas 12.2a, b, c, d y e.

12.4 INTEGRACION SOBRE REGIONES. AREA Y VOLUMEN

A continuación enfocaremos el problema de la integración sobre conjuntos más generales. Bajando hacia los particulares, restringiremos nuestras consideraciones hacia las regiones (abiertas, cerradas o parcialmente cerradas) cuyas fronteras no sean demasiado complicadas. La descripción de las condiciones permitidas se darán posteriormente. Primero trabajaremos con la situación general.

Se dice que un conjunto S de puntos es un **conjunto nulo** o que tiene **contenido de Jordan cero** (o más simplemente, **contenido cero**) si para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tales que todo punto de S está en por lo menos uno de estos rectángulos y tales que la suma de las áreas (o volúmenes) de los rectángulos es $< \epsilon$. En el caso de una dimensión, los rectángulos se reemplazan por intervalos que tengan una longitud total $< \epsilon$.

Es evidente que tal conjunto debe ser pequeño en algún sentido. El punto en el cual estamos interesados acerca de tales conjuntos es que son despreciables por lo que se refiere a la integración, en formas que se precisarán en la siguiente discusión. Empecemos con un resultado fundamental.

12.4a Teorema. Sea f una función acotada definida en un rectángulo (o un intervalo) R. Si el conjunto S de puntos donde es discontinua tiene contenido cero, entonces f es integrable sobre R.

Demostración. Se dará la demostración para dos dimensiones. Sin embargo, también es válida para todas las dimensiones. El estudiante debe comprobar que, en particular, se cumple para integrales simples (esto es, unidimensionales).

Sea $\epsilon > 0$ dado y sea $R_1, R_2, \ldots, R_n$ el conjunto de rectángulos que cubre con área total $< \epsilon$. Si se coloca sobre cada rectángulo R_j otro rectángulo R'_j que tenga el mismo centro y el doble de las dimensiones de R_j, el nuevo conjunto de rectángulos tendrá un área total $< 4\epsilon$. Además, entre los rectángulos R_j habrá un lado más corto. Denotemos su longitud por $2r$.

Denotemos por R' el resto de R después que se han eliminado los interiores de los R_j. Sobre este conjunto cerrado R', nuestra función f es continua y, por lo tanto, es uniformemente continua. De donde existe una $\delta(\epsilon)$ uniforme tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon$ si $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$ para dos puntos cualesquiera $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en R'.

Sea Δ una partición de R con norma menor que δ y menor que r. Se desea estimar

$$S_\Delta - \underline{S}_\Delta = \Sigma(M_{ij} - m_{ij})A_{ij}.$$

Con este objeto se dividen los subrectángulos R_{ij} en dos clases: (I) todos los R_{ij} que tienen un punto en común con uno de los R_j originales y (II) todos los demás. Dividimos la suma en dos sumas de acuerdo con la clase en la cual queda R_{ij}:

$$\sum_{\Delta}(M_{ij} - m_{ij})A_{ij} = \sum_{\mathrm{I}}(M_{ij} - m_{ij})A_{ij} + \sum_{\mathrm{II}}(M_{ij} - m_{ij})A_{ij}.$$

Ahora bien, todos los rectángulos de la clase I tocan un R_j. Cualquiera de esos rectángulos tiene su máxima dimensión $< r =$ mitad de la dimensión menor de un R_j y, por lo tanto, está contenido en un R_j'. Dado que los R_{ij} no se traslapan, el área total de tales rectángulos es menor que el total de los R_j' y, por lo tanto, $< 4\epsilon$. En consecuencia

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\mathrm{I}}(M_{ij} - m_{ij})A_{ij} < 2M\sum_{\mathrm{I}}A_{ij} < 2M4\epsilon = 8M\epsilon,$$

donde $M = \sup_R f$.

En la otra suma, $M_{ij} - m_{ij} < \epsilon$ por la continuidad uniforme. Así que

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\mathrm{II}}(M_{ij} - m_{ij})A_{ij} < \epsilon\sum_{\mathrm{II}}A_{ij} < A\epsilon,$$

donde A es el área de R.

Combinando (1) y (2), se obtiene

$$S_\Delta - \underline{S}_\Delta < (8M + A)\epsilon.$$

Por el Teorema 12.1e, se concluye la integrabilidad de f.

Este teorema también se cumple para las integrales sencillas (es decir, unidimensionales). La demostración se deja como ejercicio (B7).

Ahora estamos en posición de considerar las integrales de funciones continuas sobre conjuntos más generales. Sea D un conjunto acotado y f una función acotada definida en D. Escójase un rectángulo R lo suficientemente grande como para que D esté contenido en el interior de R y defínase g en R por

$$g(\mathbf{P}) = \begin{cases} f(\mathbf{P}) & \text{si } \mathbf{P} \text{ está en } D \\ 0 & \text{en cualquier otra forma.} \end{cases}$$

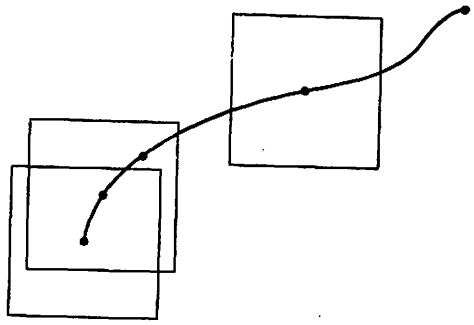
Si g es integrable sobre R, entonces se dice que f es integrable sobre D y que

$$\iint_D f(\mathbf{P})\,dA = \iint_R g(\mathbf{P})\,dA.$$

Si g es no integrable sobre R, se dice que f no es integrable sobre D.

Es necesario puntualizar que para que nuestra definición tenga sentido debemos saber que la definición de la integral sobre D es independiente del rectángulo que encierra a D. La veracidad de esta afirmación se deja por demostrar en el Ejercicio B5.

Cuando D es una región (abierta, cerrada o parcialmente cerrada) y f es continua en D, se ve que es suficiente determinar las condiciones bajo las cuales la frontera de D tiene contenido cero, puesto que evidentemente g es continua en R excepto sobre la frontera de D. Por lo tanto, estudiaremos un poco la geometría de las curvas y las superficies.



12.4b Teorema. Si C es una curva rectificable, tiene contenido cero.

Demostración. (Dos dimensiones.) Sea s la longitud de la curva y n un entero arbitrario. Escojamos los puntos $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ cuyas distancias desde el punto inicial de C sean s/n, $2s/n$, $3s/n, \ldots, (n-1)s/n$, s, respectiva-

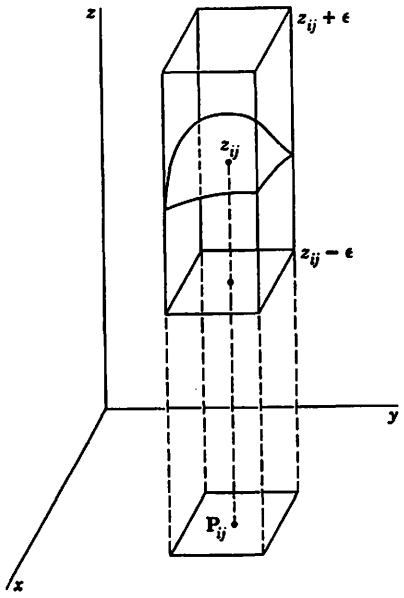
mente. En cada $\mathbf{P}_j$ constrúyase el cuadrado centrado en $\mathbf{P}_j$, con lados paralelos a los ejes y con la longitud de cada lado igual a $4s/n$. Entonces cualquier punto sobre C está a una distancia menor que s/n de uno de los $\mathbf{P}_j$ y de aquí que está, por lo menos, en uno de tales cuadrados. El área de cada cuadrado es $16s^2/n^2$ y el número de cuadrados es n, de modo que el área total es $16s^2/n$. Es evidente que, para cada $\epsilon > 0$, puede escogerse n tan grande que $16s^2/n < \epsilon$. ∎

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores.

12.4c Teorema. Sea R una región en E_2 cuya frontera consiste de un número finito de curvas rectificables. Si f es continua en R, entonces f es integrable sobre R.

Demostración. Porque evidentemente, cualquier número finito de conjuntos de contenido cero será un conjunto, el cual tiene contenido cero. ∎

Para discutir la situación en tres dimensiones, es necesario considerar cuándo una superficie será de contenido cero. El único tipo de superficies con las cuales trabajaremos serán aquéllas representables en la forma $z = f(x, y)$, donde f es una función continua. Nuestra discusión aquí se restringirá a tales superficies. El mismo tipo de discusión se aplicará a las curvas de la forma $y = f(x)$, ya sean rectificables o no, dando así una extensión del Teorema 12.4b.



12.4d Teorema. Sea f una función continua definida en una región cerrada acotada D en E_2. La superficie dada por $S: \{z = f(x, y)\}$ es un conjunto de contenido cero tridimensional.

Demostración. Supuesto que f es continua en D, es uniformemente continua allí; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon)$ tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon$ si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ están en D y $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$. Enciérrese D en un rectángulo grande R y fórmese una partición Δ de R de modo que $\|\Delta\| < \delta$. En cada subrectángulo R_{ij} de Δ el cual toca D, escójase un $\mathbf{P}_{ij}$ en la parte común de R_{ij} y D. Esto determina una altura $z_{ij} = f(\mathbf{P}_{ij})$ de un punto sobre S.

Sea $\mathscr{R}_{ij}$ el rectángulo tridimensional arriba de R_{ij} el cual consiste de todos los puntos (x, y, z) para los cuales (x, y) está en R_{ij} y $z_{ij} - \epsilon \leqslant z \leqslant z_{ij} + \epsilon$. Entonces esa parte de S arriba de R_{ij} está en $\mathscr{R}_{ij}$, y, en consecuencia, S está cubierta completamente por la totalidad de los $\mathscr{R}_{ij}$. El volumen de cada $\mathscr{R}_{ij}$ es $2\epsilon A_{ij}$ de manera que el volumen total de todos los $\mathscr{R}_{ij}$ es $2\epsilon A$, donde A es el área de R. ∎

12.4e Teorema. Sea f una función continua definida en un intervalo cerrado acotado I. La curva dada por $C: y = f(x)$ es un conjunto de contenido cero bidimensional.

Demostración. La demostración es semejante a la del Teorema 12.4d.

Se dirá que una superficie es **proyectable** sobre el plano (x, y) si existe una región cerrada acotada D en el plano x, y en la cual la ecuación $z = f(x, y)$ describe la superficie. En forma semejante, una superficie puede ser proyectable sobre el plano (y, z) o bien el (x, z).

12.4f Teorema. Sea D una región acotada (abierta, cerrada o parcialmente cerrada) cuya frontera está compuesta de un número finito de superficies proyectables. Si f es continua en D, entonces es integrable sobre D.

Demostración. La demostración es evidente.

La situación ahora es ésta: si D es una región cuya frontera es un conjunto nulo (es decir, tiene contenido cero), entonces pueden integrarse funciones continuas sobre D. Los Teoremas 12.4b, d y e dan las condiciones suficientes bajo las cuales ciertos tipos de fronteras serán nulas.

Sin embargo, no debe caerse en el error de pensar que todas las regiones tienen fronteras nulas. De hecho, bajo una definición algo más complicada de área (medida de Lebesgue), puede demostrarse que existen regiones (en dos dimensiones, por ejemplo) con área arbitrariamente pequeña, las cuales tienen fronteras cuya área (¡sic!) es arbitrariamente grande.

12.4g Teorema. Supóngase que D es una región acotada (abierta, cerrada o parcialmente cerrada) con una frontera nula. Sea S una curva (o superficie) la cual divide D en dos subregiones D_1 y D_2 y las

cuales tienen contenido cero. Si f es continua en D, entonces f es integrable sobre D_1 y D_2, y

$$\iint_{D_1} f(\mathbf{P})\,dA + \iint_{D_2} f(\mathbf{P})\,dA = \iint_{D} f(\mathbf{P})\,dA.$$

Si D es tridimensional, por supuesto que las integrales serán integrales de volumen.

Demostración. (Bosquejo.) Escójase un gran rectángulo R que encierre a D y hágase

$$g(\mathbf{P}) = \begin{cases} f(\mathbf{P}) & \text{en } D \\ 0 & \text{de otra manera;} \end{cases}$$

$$g_1(\mathbf{P}) = \begin{cases} f(\mathbf{P}) & \text{en } D_1 \\ 0 & \text{de otra manera;} \end{cases}$$

$$g_2(\mathbf{P}) = \begin{cases} f(\mathbf{P}) & \text{en } D_2 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Aplicar el Teorema 12.2d y la definición de integración sobre D, D_1 y D_2. ∎

Este teorema se extiende fácilmente hacia cualquier descomposición en un número finito de subregiones, dividiendo D mediante superficies o curvas nulas. En este caso se tiene

$$\iint_{D} f(\mathbf{P})\,dA = \sum_k \iint_{D_k} f(\mathbf{P})\,dA.$$

Ahora puede extenderse nuestra definición de área. Si D es cualquier conjunto acotado, se define el área de D mediante la fórmula

$$A_D = \iint_D 1\,dA$$

siempre que la integral exista. Se deja como ejercicio (B3) demostrar que esta definición es consistente con la del Capítulo 4.

De modo semejante, el volumen de un conjunto en tres dimensiones se define por

$$V_D = \iiint_D dV.$$

Siempre que el área (o volumen) de D existe, se dice que D es **cuadrable.**

A partir del Teorema 12.4g se ve que si una región es cuadrable se divide en un número finito de subregiones mediante superficies (o curvas)

nulas, la suma de las áreas de las subregiones es el área de la región original:

$$A_D = \sum_k A_{D_k}.$$

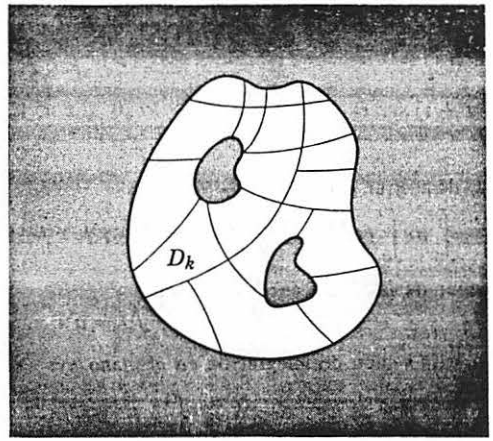
Sea D una región acotada con una frontera nula. Supóngase que se subdivide en regiones menores, D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, mediante curvas nulas (o superficies). Tal descomposición se llamará **partición curvilínea** Δ de D. La norma de Δ, la cual se denotará también por $\|\Delta\|$, se define como el máximo de los diámetros de los D_k. (Recuérdese que el diámetro de un conjunto es sup $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$ donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ están en el conjunto.) El área (o volumen) de D_k se denotará por A_k (o V_k).

12.4h Teorema. Sea D una región acotada con una frontera nula y $f(\mathbf{P})$ una función acotada continua en D. Sea Δ una partición curvilínea de D. En cada D_k escójase un $\mathbf{P}_k$ arbitrariamente. Entonces

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_\Delta f(\mathbf{P}_k)A_k = \iint_D f(\mathbf{P})\,dA$$

o bien, en tres dimensiones,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_\Delta f(\mathbf{P}_k)V_k = \iiint_D f(\mathbf{P})\,dV.$$



Demostración. Se dará la demostración para D cerrado. Si D es abierto o sólo parcialmente cerrado, es necesario un análisis más cuidadoso, como en las demostraciones de los Teoremas 12.4b y d. Se escribe A, A_k, etc., pero el argumento es independiente de la dimensión.

Si D es cerrado, se tiene f uniformemente continua. De aquí que para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon)$ tal que $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})| < \epsilon$ para todo $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en D

tales que $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}| < \delta$. Ahora bien, escójase Δ de modo que $\|\Delta\| < \delta$. Hágase

$$S_\Delta = \sum_\Delta f(\mathbf{P}_k)A_k = \sum_\Delta \iint_{D_k} f(\mathbf{P}_k)\, dA$$

e

$$I_D = \iint_D f(\mathbf{P})\, dA = \sum_\Delta \iint_{D_k} f(\mathbf{P})\, dA.$$

Entonces

$$|S_\Delta - I_D| \leq \sum_\Delta \iint_{D_k} |f(\mathbf{P}_k) - f(\mathbf{P})|\, dA$$

$$\sum_\Delta \iint_{D_k} \epsilon\, dA = \sum_\Delta \epsilon A_k = \epsilon A_D.$$

La posibilidad de expresar una integral múltiple sobre una región como una integral iterada está asegurada por los teoremas de la Sección 12.3. Teoremas no triviales más allá de los establecidos en la Sección 12.3 son embarazosos y difíciles de probar. Los problemas individuales generalmente pueden manejarse mediante esos teoremas.

EJERCICIOS A

1. Demostrar que cada integral existe y evaluar

   (*a*) $\iint_R (x + y)\,\operatorname{sgn}(x - y)\, dx\, dy \qquad R: \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

   (*b*) $\iiint_R (x + y + z)\,\operatorname{sgn}(x - y)\, dx\, dy\, dz \qquad R: \{0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$

2. Si f es continua, demostrar que:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx$$

3. Encontrar la menor de las áreas encerradas por

   (*a*) $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y = 2$ (*b*) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ y $x + y = a$

4. Evaluar y describir la región de integración en el plano xy:

   (*a*) $\int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} x\, dx$ (*b*) $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{x/y}\, dy$

5. Invertir el orden de integración:

   (*a*) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$ (*b*) $\int_1^1 dy \int_y^{y^{2/3}} f(x, y)\, dx$

   (*c*) $\int_0^{\sqrt{5}} dy \int_y^{\sqrt{10-y^2}} f(x, y)\, dx$ (*d*) $\int_a^b dx \int_c^x f(x, y)\, dy$ (tres casos)

EJERCICIOS B

1. Encontrar el volumen común de la esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$ y el cilindro $\{x^2 + y^2 < ax\}$.
2. Calcular el área limitada por las cuatro curvas $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $x^4 = cy^3$, $x^4 = dy^3$. (Supóngase que $b > a > 0$, $d > c > 0$).
3. Demostrar que la definicion de área dada en esta sección es compatible con la definición del Capítulo 4.
4. Probar el Teorema 12.4e.
5. Demostrar que la definición de una integral sobre un conjunto D arbitrario cerrado es independiente del rectángulo R que lo encierra.
6. Demostrar que un conjunto de contenido cero es un conjunto acotado.
7. Verificar el Teorema 12.4a para las integrales simples.

EJERCICIOS C

1. Sea f una función integrable sobre una región cuadrable D_0 y supóngase que es continua en un punto $\mathbf{P}_0$ en D_0. Demostrar que $\frac{1}{A_D}\iint_D f(\mathbf{P})\, dA \to f(\mathbf{P}_0)$ conforme el diámetro de $D \to 0$, donde D representa un subconjunto cuadrable de D_0 que contiene a $\mathbf{P}_0$.
2. Sea D la región limitada por $x = \pm 1$ por la derecha y por la izquierda, por $y = -2$ por abajo y arriba por $y = \operatorname{sen} 1/x$, para $x \neq 0$, y por el segmento $\{x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$. Demostrar que D es cuadrable.

13

Integrales de línea y superficie

13.1 INTEGRALES DE LINEA. POTENCIALES

Enfaticemos una vez más que todas las operaciones vectoriales que no contienen productos vectoriales se llevan inmediatamente hacia los espacios Euclideanos de dimensión arbitraria. En particular, en la presente sección solamente necesitamos suprimir la componente **k** para que las demostraciones sean aplicables a dos dimensiones.

Si C es una curva dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad I: \{a < t < b\},$$

donde $\mathbf{P}'(t)$ es continua y no cero en I, entonces se dirá que C es una **curva suave.** También se discutirán las curvas seccionalmente suaves. Una curva es **seccionalmente suave** si el intervalo paramétrico I puede partirse de manera que C sea suave en cada subintervalo. Más concretamente, supóngase que existe una partición Δ de I

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

tal que $\mathbf{P}'(t)$ exista en cada intervalo abierto $\{t_{m-1} < t < t_m\}$ de Δ. Si ambas derivadas laterales $\mathbf{P}'(t_m - 0)$ y $\mathbf{P}'(t_m + 0)$ existen en cada punto de partición y $\mathbf{P}'(t)$ es continua en cada intervalo abierto $\{t_{m-1} < t < t_m\}$, se dice que C es seccionalmente suave.

Sea f una función definida en una curva C seccionalmente suave. Se desea definir qué debe entenderse por **integral de línea** de f sobre C. Sea Δ una partición de I: Δ: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Esto induce una partición de C:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t_0), \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(t_1), \ldots, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}(t_n),$$

con x_m, y_m y z_m definidas, por supuesto, por

$$\mathbf{P}_m = x_m\mathbf{i} + y_m\mathbf{j} + z_m\mathbf{k} \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

En cada subintervalo $\{t_{m-1} \leqslant t \leqslant t_m\}$. Escójase un τ_m y defínase $\mathbf{Q}_k = \mathbf{P}(\tau_k)$, y fórmese la suma

$$\sigma_\Delta = \sum_\Delta f(\mathbf{Q}_k)\,\Delta_k x,$$

donde $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$. Esta es una **suma aproximada.** Si $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta$ existe, su valor se denotará por $\int_C f(\mathbf{P})\,dx$ o bien $\int_C f(x, y, z)\,dx$. Existen definiciones semejantes para $\int_C f(\mathbf{P})\,dy$ y $\int_C f(\mathbf{P})\,dz$.

13.1a Teorema. Si C es una curva seccionalmente suave y si f es continua en C, entonces $\int_C f(\mathbf{P})\,dx$ existe y es igual a $\int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt$.

Demostración. Supóngase, primero, que C es suave. Entonces la segunda integral existe. Además, para toda partición,

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta &= \sum_\Delta f(\mathbf{Q}_k)\,\Delta_k x \\ &= \sum_\Delta f(\mathbf{Q}_k)\,\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\,\Delta_k t \\ &= \sum f[\mathbf{P}(\tau_k)]\,x'(\xi_k)\,\Delta_k t\end{aligned}$$

por el teorema del valor medio, donde ξ_k está en $\{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k\}$. Sea S_Δ una suma de aproximación para la segunda integral formada sobre Δ con τ_k como punto intermedio. Entonces

$$\sigma_\Delta - S_\Delta = \sum_\Delta f[\mathbf{P}(\tau_k)](x'(\xi_k) - x'(\tau_k))\,\Delta_k t$$

Ahora bien, f es acotada, digamos por M y x' es uniformemente continua en I: $\{a \leqslant t \leqslant b\}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, escójase $\|\Delta\|$ tan pequeña que $|x'(t) - x'(\tau)| < \epsilon$ siempre que t y τ estén en el mismo subintervalo. Sobre esta base podemos estimar la diferencia $\sigma_\Delta - S_\Delta$ de la manera siguiente

$$|\sigma_\Delta - S_\Delta| \leqslant M\epsilon \sum_\Delta \Delta_k t = M\epsilon(b - a).$$

Entonces si $$J = \int_a^b f[\mathbf{P}(t)]x'(t)\,dt,$$

$$|\sigma_\Delta - J| \leqslant |\sigma_\Delta - S_\Delta| + |S_\Delta - J| \to 0 \quad \text{conforme} \quad \|\Delta\| \to 0.$$

Esto prueba el teorema para las curvas suaves. Debido a la aditividad de la integral, la demostración se extiende inmediatamente hacia las curvas seccionalmente suaves. Los detalles de la extensión se dejan como ejercicio. ∎

La parametrización dada al describir una curva define una orientación de la curva; es decir, induce una dirección sobre la curva. Si se piensa de $\mathbf{P}(t)$ como un punto que se mueve y que ocupa la posición $\mathbf{P}(t)$ en el instante t, la parametrización introduce una relación de orden entre los

puntos de la curva. Si la curva es simple (y éste será el caso en la mayor parte de los ejemplos que trataremos) este orden será unívocamente determinado especificando los puntos inicial y terminal.

EJEMPLO. Evaluar $\int_C x^2y\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, donde C es el arco de $y = 3x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 3)$.

Solución. No se da una parametrización de la curva pero puede tomarse x como parámetro:

$$C: \quad x = t, \quad y = 3t^2 \qquad \{0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Entonces la integral se transforma en

$$\int_0^1 [t^2(3t^2)\,dt + (t^2 - 9t^4)6t\,dt] = \int_0^1 (3t^4 + 6t^3 - 9t^5)\,dt,$$

la cual se evalúa fácilmente mediante métodos elementales.

Ahora considérese una integral de línea de la forma

$$I = \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

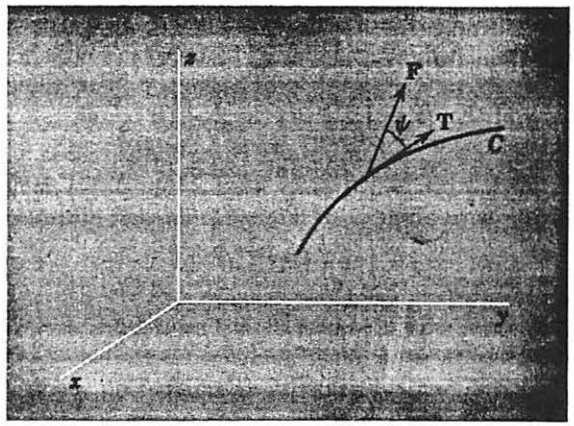
donde L, M, N son funciones continuas definidas en una curva suave o seccionalmente suave C. Esto puede escribirse

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

si $\mathbf{F}$ es la función vectorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$. Introduciendo la longitud de arco como parámetro se transforma en

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds,$$

donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario $d\mathbf{P}/ds$ usual.



Ahora bien $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = |\mathbf{F}| \cos \psi$, donde ψ es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$. Así que

$$I = \int_C |\mathbf{F}| \cos \psi \, ds.$$

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza, entonces esta integral es precisamente la definición del **trabajo** realizado por el campo de fuerza sobre una partícula de masa unitaria que se mueve desde el punto inicial al punto terminal a lo largo de C.

Ciertos campos de fuerza importantes en la física provienen de un potencial. Si existe una función ϕ definida en una región R y si un campo de fuerza $\mathbf{F}$ tiene la propiedad de que

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \mathbf{grad}\ \phi,$$

entonces se dice que ϕ es un **potencial** de $\mathbf{F}$. Es evidente que si ϕ es un potencial de $\mathbf{F}$ entonces también lo es $\phi + C$ para toda constante C. También es fácil ver que dos potenciales cualesquiera del mismo campo de fuerza pueden diferir solamente por una constante (Ejercicio B2). En las aplicaciones físicas, la selección de C se hace generalmente para normalizar alguna cantidad física conveniente.

Copiaremos nuestra nomenclatura de la física. Un campo vectorial continuo el cual se obtiene como el gradiente de una función escalar se llamará **campo gradiente** y una función ϕ de la cual se obtiene, la (o bien una) **función potencial.**

13.1b Teorema. Sea $\mathbf{F}$ un campo gradiente con potencial ϕ definido en una región R y sean $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$ dos puntos cualesquiera en R. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \phi(\mathbf{Q}_1) - \phi(\mathbf{Q}_0),$$

donde C es una curva seccionalmente suave en R yendo de $\mathbf{Q}_0$ a $\mathbf{Q}_1$.

Demostración. Sea C dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) \qquad \{a \leqslant t \leqslant b\}$$

y supongamos primero que C es suave. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} &= \int_C \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\,[\mathbf{P}(t)]\,dt \\
&= \phi[\mathbf{P}(t)]\Big|_a^b \\
&= \phi[\mathbf{P}(b)] - \phi[\mathbf{P}(a)] \\
&= \phi(\mathbf{Q}_1) - \phi(\mathbf{Q}_0).
\end{aligned}$$

Si C solamente es seccionalmente suave, este cálculo se aplica a cada sección suave. Cuando se suman los resultados de integrar sobre cada sección suave para obtener la integral sobre toda la curva, las contribuciones provenientes de los puntos intermedios se cancelan dejando el resultado deseado. ∎

Cuando el valor de una integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ sobre una trayectoria seccionalmente suave que conecta dos puntos en una región R depende solamente de los puntos extremos, se dice que la integral es **independiente de la trayectoria.** El Teorema 13.1b implica inmediatamente el siguiente.

13.1c Teorema. Si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente en una región R, entonces $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ es independiente de la trayectoria.

No es difícil ver que también la inversa de este teorema es verdadera.

13.1d Teorema. Si $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo en una región R y si $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ es independiente de la trayectoria, entonces $\mathbf{F}$ es un campo gradiente.

Demostración. Supuesto que la integral es independiente de la trayectoria escójase un punto fijo $\mathbf{P}_0$ en R y defínase ϕ en R por

$$\phi(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}, \tag{1}$$

donde la integral se calcula sobre cualquier curva seccionalmente suave en R.

Para demostrar que $\phi_1(\mathbf{P}) = L(\mathbf{P})$ hagamos $\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P} = (x + h, y, z)$ si $\mathbf{P} = (x, y, z)$. Entonces el cociente diferencia $\Delta\phi/\Delta x$ toma la forma

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{1}{h}\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{P}+\Delta\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

Supuesto que R es una región, existe una vecindad alrededor de $\mathbf{P}$ la cual se encuentra en R. Por lo tanto, podemos tomar h tan pequeño que $\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$ se encuentre en esta vecindad. En consecuencia, podemos tomar la trayectoria de integración como el segmento lineal desde $\mathbf{P}$ hasta $\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$ y esto puede parametrizarse por

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P} + t\mathbf{i} \qquad \{0 < t < h\}.$$

Así que

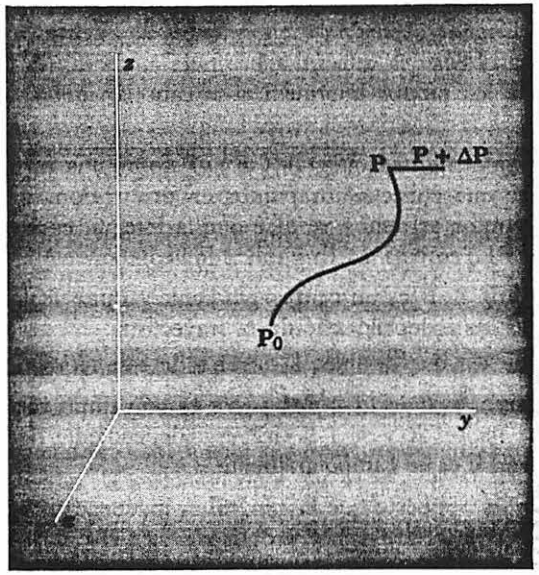
$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{1}{h}\int_0^h L(x + t, y, z)\,dt.$$

Por el teorema del valor medio esto se transforma en

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = L(x + t', y, z),$$

donde t' se encuentra entre 0 y h. Entonces, conforme $h \to 0$, se obtiene el resultado deseado. En forma semejante $\phi_2 = M$ y $\phi_3 = N$. ∎

Esta sucesión de teoremas dice que para que $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ sea independiente de la trayectoria en una región R, es necesario y suficiente que $\mathbf{F}$



sea un campo gradiente; en otras palabras, que exista una función escalar ϕ, el potencial, tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. En este caso

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{P} = d\phi,$$

la diferencial total de ϕ. Por esta razón, la forma diferencial

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

se llama **diferencial exacta,** como opuesta al caso donde no es la diferencial total de alguna función escalar.

Si un campo de fuerza tiene la propiedad de que el trabajo realizado sobre una partícula en movimiento conforme se mueve de un punto a otro, es independiente de la trayectoria, se llama **campo conservativo.** Los resultados de los teoremas anteriores pueden volver a formularse de la manera siguiente: una condición necesaria y suficiente para que un campo de fuerza sea conservativo es que sea un campo gradiente.

Puesto que puede ser difícil calcular todas las integrales de línea entre todos los pares de puntos en una región dada, es de desear contar con un criterio sencillo para determinar cuándo un campo dado es un campo gradiente. Por supuesto que en los casos sencillos puede ser factible calcular una función ϕ por medio de (1), la cual puede verificarse que se trata de un potencial. Si esto no es posible, existe una prueba la cual puede aplicarse a los campos vectoriales diferenciables. Para el caso bidimensional se dará esta prueba como un corolario del teorema de Green.

Cerraremos esta sección tal y como la empezamos, enfatizando que los resultados se aplican con igual propiedad en todos los espacios vectoriales Euclideanos de dimensión finita.

EJERCICIOS A

1. Calcular las siguientes integrales de línea:

   (*a*) $\int_C x^2y\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ desde (0, 0) hasta (1, 2) a lo largo de $y = 2x^2$.

   (*b*) $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy$ desde (0, 0) hasta (a, b) a lo largo de la línea recta que los une.

   (*c*) $\int_C y \operatorname{sen} x\,dx - x\cos y\,dy$ desde (0, 0) hasta (1, 1) a lo largo de $x = y$.

   (*d*) $\int_C (y - x^2)\,dx + x\,dy$ desde (1, 0) hasta (— 1, 0) alrededor de la mitad superior de $x^2 + y^2 = 1$.

   (*e*) Evaluar la integral dada en (*d*) a lo largo de la línea poligonal que une sucesivamente los puntos (1, 0), (1, 1), (— 1, 1), (— 1, 0).

   (*f*) Evaluar la integral dada en (*d*) a lo largo del eje x desde (1, 0) hasta (— 1, 0).

   (*g*) $\int_C \mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}$, donde C es una vuelta de la hélice $\mathbf{P} = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ desde (1, 0, 0) hasta $(1, 0, 2\pi)$.

2. Evaluar cada una de las siguientes integrales alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj:

   (*a*) $\int_C \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ (*b*) $\int_C x^2y\,dx$ (*c*) $\int_C x^2\,ds$

3. Evaluar $\int_C x\,dy - y\,dx$ alrededor de $x^2 + y^2 = 1$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

4. Evaluar $\int_C ds$, donde C es $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (2, 4).

5. El campo gravitacional de la tierra, cerca de su superficie, está dado aproximadamente por $-g\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ apunta verticalmente hacia arriba. Demostrar que si una partícula se mueve desde una altura h_1 hasta una altura h_2 a lo largo de una curva suave, el trabajo realizado por este campo sobre la partícula es $mg(h_1 - h_2)$. Encontrar una función potencial.

6. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido en una región R. Demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ es independiente de la trayectoria si y solamente si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = 0$ sobre toda curva cerrada, seccionalmente suave, en R.

7. Demostrar que los campos vectoriales siguientes son campos gradientes, encontrando un potencial:
   (*a*) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ en E_2 (*b*) $3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ en E_2
   (*c*) $(2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 3z)\mathbf{j} + (3z^2x + 3y)\mathbf{k}$ en E_3

EJERCICIOS B

1. Sean f y g funciones continuamente diferenciables en una región R. Si C es cualquier curva seccionalmente suave en R que va de $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$, entonces
$$\int_C f\nabla g \cdot d\mathbf{P} = f(\mathbf{P})_2 g(\mathbf{P}_2) - f(\mathbf{P}_1)g(\mathbf{P}_1) - \int_C g\nabla f \cdot d\mathbf{P}.$$
2. Demostrar que si ϕ y ψ son ambas funciones potenciales para un campo vectorial $\mathbf{F}$, entonces $\phi - \psi = C$, donde C es una constante.
3. Demostrar que el campo gravitacional de una masa puntual (Sección 10.6) es conservativo y encontrar una función potencial para él.
4. Si $\mathbf{F}$ es continuo en una curva suave C, demostrar que
$$\left|\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}\right| \leqslant (\max_C |\mathbf{F}|)L_C,$$
donde L_C denota la longitud de C.
5. Sea $\mathbf{F}$ un campo de fuerza continuo. Aplicando la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), demostrar que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre una partícula en movimiento es igual al cambio en la energía cinética. Recuérdese que la energía cinética es $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad.
6. Demostrar que $\int_C f(x, y)\,dx = 0$, si C es un segmento paralelo al eje y.

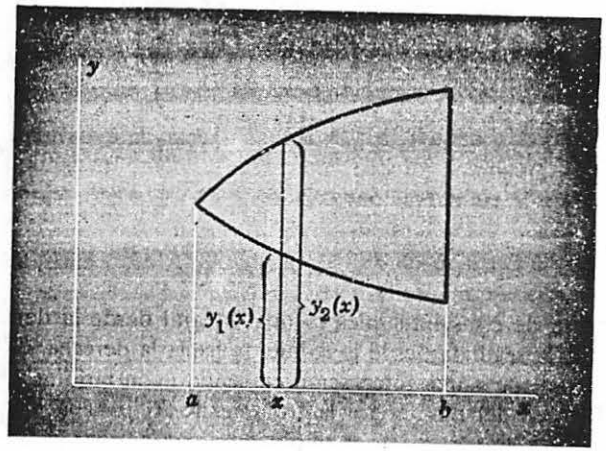
EJERCICIOS C

1. Sean u y v funciones diferenciables en una región R en E_2 las cuales satisfacen allí las relaciones $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Demostrar que si se sabe que u y v existen y u está dada, entonces v puede determinarse excepto por una constante aditiva. Dar una fórmula para v en términos de u y encontrar v si $u = x^2 - y^2$.
2. Sea C una curva suave y f continua en C. Demostrar que $\int_C f\,dx$ es independiente de la parametrización. Es decir, demostrar que si C está dada por
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) \qquad \{a \leqslant t \leqslant b\}$$
y por
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\tau) \qquad \{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\},$$
donde $\mathbf{P}'(t) \neq 0$ y $\mathbf{Q}'(\tau) \neq 0$, entonces
$$\int_a^b f[\mathbf{P}(t)]\frac{dx}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta f[\mathbf{Q}(\tau)]\frac{dx}{d\tau}\,d\tau.$$
3. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ en E_2 tiene una función potencial local pero no global. En otras palabras, demostrar que en una vecindad de cualquier punto $\mathbf{P}_0 = (a, b) \neq (0, 0)$ en E_2, existe una función ϕ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$, pero no existe la función ϕ sobre todo el dominio de $\mathbf{F}$ (es decir, el plano agujerado en el origen) para la cual $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

4. Sea f una función continuamente diferenciable definida en una región abierta R. Sean $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_1$ dos puntos cualesquiera en R conectados por una curva suave C desde $\mathbf{P}$ hasta $\mathbf{P}_1$. Demostrar que existe un punto $\mathbf{Q}$ en C tal que $f(\mathbf{P}_1) - f(\mathbf{P}) = \nabla f(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{T}L$, donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario en C, en $\mathbf{Q}$ y L es la longitud de C.

13.2 TEOREMA DE GREEN

Una derivada ordinaria se definió en un punto de un intervalo abierto. La idea de derivada definida en un intervalo cerrado se introdujo mediante el concepto de la derivada lateral la cual considera los puntos extremos. De manera semejante, las derivadas parciales han sido definidas en regiones abiertas, pero la extensión hacia las regiones cerradas no es tan fácil en las dimensiones superiores como lo fue en una dimensión. Por ejemplo, si f está definida en un disco circular cerrado $\{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| \leqslant a\}$ en E_2, ¿cómo podría definirse f_x en el punto superior sobre el círculo —es decir, en el punto $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{j}a$? El artificio que usaremos es el siguiente: Sea f una función continua definida en una región cerrada D y supóngase que f_x es continua en la región abierta formada eliminando la frontera. Entonces, si existe una función g continua en D y coincidente con f_x en la región abierta, se dice que f_x es continua en D y, por supuesto, que $f_x = g$ en D. Las demás parciales se manejan exactamente en la misma forma.



Al discutir la relación entre las integrales de línea y las integrales dobles, empecemos por considerar una región R de una forma particularmente simple, la cual describiremos a continuación. Supóngase que la proyección de R sobre el eje x es un intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$; es decir, si (x, y) está en R, entonces x está en I. Y supóngase que cada

línea descrita por $x = x_0$, donde x_0 está en I, encuentra a R en exactamente un intervalo cerrado, el cual puede degenerar a un punto en a o bien b (o en ambos). Así, R puede darse en la forma

$$\{y_1(x) < y < y_2(x), a < x < b\},$$

donde también se supone que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son continuas. Una región de este tipo se llamará **región proyectable sobre x.** De manera semejante, intercambiando los papeles de x y y podemos definir una **región proyectable sobre y.** Una región que es proyectable tanto sobre x como sobre y se llamará **región standard.**

Supóngase que R es una región standard cerrada con una frontera seccionalmente suave y que L y M son dos funciones continuamente diferenciales definidas en ella. Entonces considérese

$$\iint_R \frac{\partial L}{\partial y}\, dA.$$

Mediante el Teorema 12.3a esta integral puede escribirse como una integral iterada, así

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial L}{\partial y}\, dA &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial L}{\partial y}\, dy \\ &= \int_a^b \{L[x, y_2(x)] - L[x, y_1(x)]\}\, dx \\ &= -\int_b^a L[x, y_2(x)]\, dx - \int_a^b L[x, y_1(x)]\, dx.\end{aligned}$$

Estas últimas integrales pueden interpretarse como integrales de línea de L a lo largo de las curvas dadas por

$$y = y_1(x) \qquad \{a < x < b\}$$

y

$$y = y_2(x) \qquad \{a < x < b\}.$$

La primera de estas integrales es una integral desde la derecha hacia la izquierda y la segunda desde la izquierda hacia la derecha. Geométricamente esto equivale a una integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la frontera de R, para la integral de L sobre todo segmento vertical de R se obtendrá cero (¿por qué?). Por tanto, la fórmula anterior podría escribirse

$$\iint_R \frac{\partial L}{\partial y}\, dA = -\int_B L\, dx,$$

donde la integración en la integral de línea se efectúa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj recorriendo la frontera de R. Mediante un cálculo semejante se obtiene

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial x}\, dA = \int_B M\, dy.$$

Combinando estas dos fórmulas se deduce

$$\int_B L\, dx + M\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA, \tag{1}$$

donde la integral se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la frontera B de R. Esta es una forma débil de lo que se conoce como **teorema de Green,** el cual es un término genérico para todo teorema que da las condiciones suficientes para la validez de la fórmula (1).

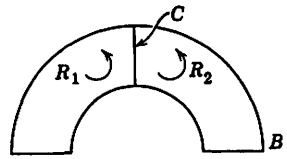
Podemos generalizar este resultado para dominios ligeramente más complicados. Sea R una región cerrada la cual puede dividirse en dos regiones standard R_1 y R_2 mediante una curva seccionalmente suave C, tal y como se muestra en la figura. Entonces

$$\int_{B_1} L\, dx + M\, dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA \tag{2}$$

y

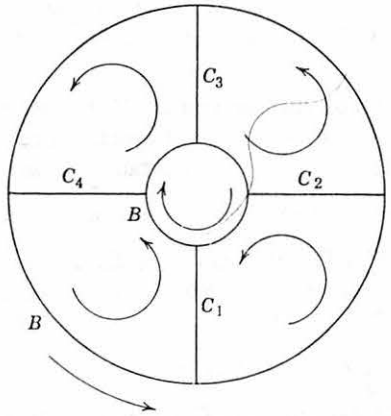
$$\int_{B_2} L\, dx + M\, dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA, \tag{3}$$

donde, por supuesto, B_1 y B_2 son, respectivamente, las fronteras de R_1 y R_2 y las integrales han de tomarse en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de estas fronteras. La curva C se tiene tanto en B_1 como en B_2 y de aquí que la integral de línea a lo largo de C forma



parte de los primeros miembros tanto de (2) como de (3). Además, forma parte de estas dos fórmulas con signos opuestos puesto que el movimiento en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto a R_1 da una orientación a C opuesta a la inducida por el movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a R_2. Cuando se suman (2) y (3), la contribución debida a C se cancela, dejando única-

mente la integral alrededor de B, de manera que la fórmula (1) es válida para regiones que puedan cortarse en dos regiones standard mediante una curva C.



Por inducción se deduce que la fórmula (1) es válida para una región cerrada que pueda cortarse en un número finito de regiones standard introduciendo curvas adicionales tales como la C. Sin embargo, debemos examinar una vez más la integral en la frontera. Supóngase que R tiene una frontera que consiste de más de una curva cerrada simple y puede descomponerse en un número finito de regiones standard. Apliquemos (1) a cada una de las regiones standard y sumemos. La contribución a las integrales de línea debida a las curvas auxiliares se cancela tal y como se esperaba, pero también se observa que entonces la integral sobre cada curva interior se toma en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Sin embargo, se observa que podemos caracterizar la dirección de integración de la siguiente manera: la dirección de integración a lo largo de cada curva de la frontera debe ser tal que siempre quede la región a la izquierda. Esta recibe el nombre de dirección **positiva** sobre la frontera.

Ahora podemos asegurar que la fórmula (1) es válida si R puede descomponerse mediante curvas auxiliares en un número finito de regiones y si la integral de línea se toma en el sentido positivo alrededor de la frontera.

Así se ha dado una demostración geométrica para la forma siguiente del teorema de Green.

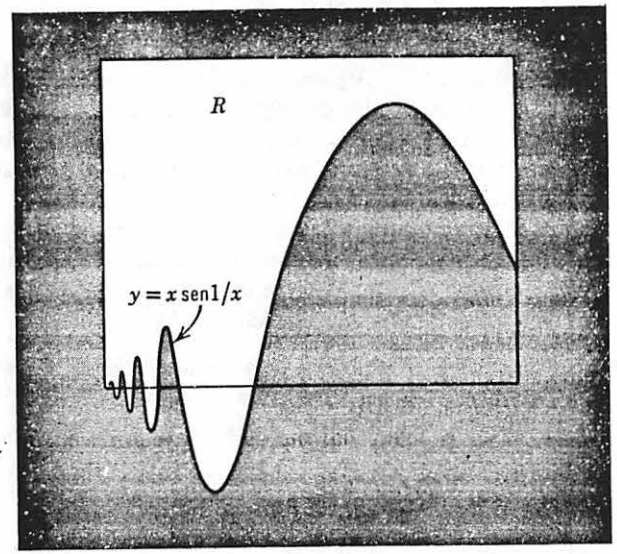
13.2a Teorema. Sea R una región cerrada acotada la cual puede subdividirse mediante un número finito de curvas seccionalmente suaves en un número finito de regiones standard. Sean L y M dos funciones con derivadas parciales continuas definidas en R. Entonces

$$\int_B L\,dx + M\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA,$$

donde la integral de línea se toma sobre la frontera B de R en el sentido positivo.

No trataremos una demostración no geométrica de este teorema sino que nos contentaremos con la demostración dada porque una demostración completa requiere una gran cantidad de detalles para situar nuestros argumentos geométricos sobre una base rigurosa.

El teorema es verdadero bajo condiciones más generales sobre la región. Por ejemplo, nuestra demostración no consideró todas las regiones cuyas fronteras consisten de un número finito de curvas cerradas simples,



seccionalmente suaves, porque posiblemente no puedan descomponerse en un número finito de regiones standard. Por ejemplo, la región en la figura es acotada por una sola curva cerrada simple seccionalmente suave y no puede descomponerse en un número finito de regiones standard. Sin embargo, pueden aproximarse tales regiones mediante regiones para las cuales es válido el teorema de Green y mediante un argumento de límite demostrar que también es válido para estas regiones. De hecho, podemos eliminar todas las condiciones de suavidad para la frontera y requerir únicamente que sea rectificable —para que las integrales de línea tengan sentido— y la fórmula todavía es válida.

13.2b Teorema. Sea R una región cerrada acotada cuya frontera consiste de un número finito de curvas rectificables cerradas simples. Supóngase que L y M tienen parciales continuas en R. Entonces

$$\int_B L\,dx + M\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA.$$

Una demostración de este teorema puede encontrarse en *Mathematical Analysis*, de Apostol.

Ahora regresaremos a la cuestión discutida al final de la Sección 13.1, a saber un criterio para determinar cuándo un campo vectorial es un campo gradiente. Si se tiene un campo gradiente continuamente diferenciable —esto es, si existe un potencial ϕ tal que $\phi_x = L$ y $\phi_y = M$, entonces es evidente que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \phi_{xy} = \phi_{yx} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Así se ve que, para que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ sea un campo gradiente, es necesario que $\partial L/\partial y = \partial M/\partial x$. Ahora resulta evidente que también es suficiente si la región en la cual está definido el campo se restringe suficientemente, porque en este caso puede integrarse para encontrar un potencial ϕ, tal y como se verá posteriormente. Primero definiremos conexidad simple.

Se dirá que una región es **simplemente conexa** si tiene la propiedad de que toda curva cerrada simple en R también tiene su interior en R. Así por ejemplo, una vecindad es simplemente conexa, pero la región anular $\{r_1 \leqslant |\mathbf{P}| \leqslant r_2\}$ entre dos círculos concéntricos no lo es.

13.2c Teorema. Supóngase que D es una región abierta simplemente conexa y que L y M tienen derivadas continuas en D. Entonces $\int L\,dx + M\,dy$ es independiente de la trayectoria en R si, y solamente si,

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Demostración. Supóngase primero que $\int L\,dx + M\,dy$ es independiente de la trayectoria. Entonces el campo vectorial $L\mathbf{j} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente —es decir, existe una función ϕ en R tal que $L = \partial\phi/\partial x$ y $M = \partial\phi/\partial y$. Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\,\partial x}$$

y

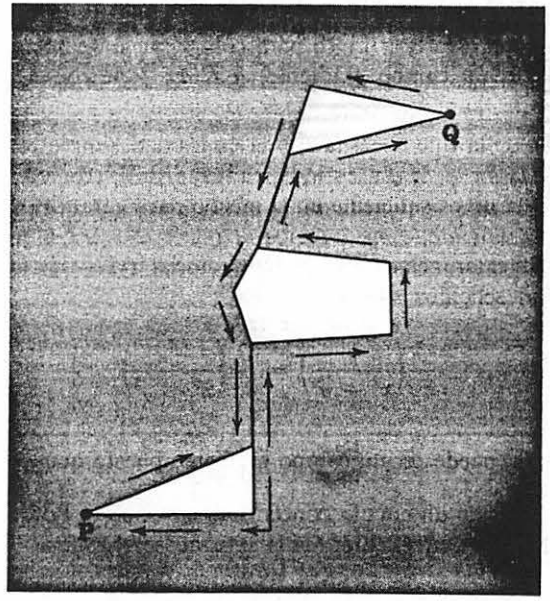
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y};$$

y, por el Teorema 10.1a, éstas son iguales. (Aquí no aplicamos la conexidad simple de R.)

Inversamente, supóngase que $\partial L/\partial y = \partial M/\partial x$ en toda la región R. Se desea demostrar que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente a partir de lo cual puede concluirse por el Teorema 13.1b que la integral es independiente de la trayectoria. Así que es suficiente demostrar que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente.

Sean **P** y **Q** dos puntos cualesquiera en R. Entonces existe una poligonal simple (es decir, que no se corta a sí misma) que los une (compárese con la definición de región). A continuación se demostrará que $\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} L\,dx + M\,dy$ tiene el mismo valor sobre todas las trayectorias poligonales simples que unan a **P** y **Q.** Sean C_1 y C_2 dos de esas trayectorias. Entonces se forma un polígono cerrado C (no necesariamente simple) con C_1, orientada de **P** hacia **Q**, y C_2, orientada de **Q** hacia **P**. Es suficiente demostrar que $\int_C L\,dx + M\,dy = 0$.

Es geométricamente evidente que C puede descomponerse en un número finito de polígonos cerrados simples, junto con un número finito de



segmentos los cuales se recorren dos veces —una vez en cada dirección. La contribución de estos segmentos a la integral es cero. Ahora consi-

dérese uno de los polígonos, denotándolo por B y su interior por D. Por el teorema de Green

$$\int_B L\,dx + M\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA = 0,$$

de modo que, como se deseaba,

$$\int_C L\,dx + M\,dy = 0.$$

Por tanto, puede decirse que $\int L\,dx + M\,dy$ es independiente de la trayectoria siempre y cuando únicamente se integre sobre trayectorias poligonales simples. Sin embargo, esto es suficiente para concluir que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente, porque fijando $\mathbf{P}_0$ en R definimos ϕ por

$$\phi(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} L\,dx + M\,dy$$

sobre una trayectoria poligonal simple. Esto verdaderamente define una función de $\mathbf{P}$, puesto que se ha demostrado que el valor es independiente de la trayectoria. Ahora podemos repetir el argumento del Teorema 13-1c para concluir que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = L, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = M.$$

Invoquemos el Teorema 13-1b para completar la demostración: puesto que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente, $\int L\,dx + M\,dy$ es independiente de la trayectoria, para todas las curvas rectificables. ∎

La razón por la que necesitamos la conexidad simple es asegurar que la integral $\int L\,dx + M\,dy$ es independiente de la trayectoria. Ver que $\partial L/\partial y = \partial M/\partial x$ no es suficiente en sí mismo para garantizar que $L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ es un campo gradiente; consideremos la región R: $\{r_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r_2^2\}$. En este anillo examinemos el campo vectorial $(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$. Mediante cálculos sencillos se ve que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right).$$

Sin embargo, no puede ser un campo gradiente puesto que $\displaystyle\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ tomada alrededor de un círculo concéntrico no es cero. Porque si hacemos $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces la integral se reduce a

$$\int_C d\theta = 2\pi.$$

Podemos ver geométricamente por qué no es posible tener una función gradiente única para todo el anillo. Si θ es el ángulo que forma el radio-vector con el eje x, entonces $\theta = \text{ang tan } y/x$, de modo que

$$d\theta = (y\,dx - x\,dy)/(x^2 + y^2),$$

y no podemos definir el ángulo de manera que sea continuo en el anillo completo; porque si recorremos una vez el círculo interno, incrementamos el ángulo en 2π.

EJERCICIOS A

1. Evaluar las integrales siguientes aplicando el teorema de Green. La integral se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la curva dada:

   (*a*) $\displaystyle\int_C (x - y^3)\,dx + x^3\,dy$ $\qquad C: x^2 + y^2 = 1$

   (*b*) $\displaystyle\int_C x\,dy + y\,dx$ $\qquad C: 4x^2 + 9y^2 = 1$

   (*c*) $\displaystyle\int_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$ $\qquad C$: cuadrado $x = \pm 1, y = \pm 1$

   (*d*) $\displaystyle\int_C x^2 y\,dx + xy^2\,dy$ $\qquad C: x^2 + y^2 = 4$

   (*e*) $\displaystyle\int_C x^2 y\,dx$ $\qquad C$: triángulo $x = 0, y = 2, x = 2y$

   (*f*) $\displaystyle\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy$ $\qquad C: x^2 + y^2 = 36$

   (*g*) $\displaystyle\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ $\qquad C: x^2 + (y - 4)^2 = 1$

2. Explicar por qué no es posible aplicar el teorema de Green para evaluar la siguiente integral:

$$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad C: x^2 + y^2 = 4$$

EJERCICIOS B

1. Sea C una curva simple cerrada seccionalmente suave.

   (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_C x\,dy = -\int_C y\,dx =$ área encerrada por C. Dar una explicación geométrica de este hecho.

   (*b*) Evaluar $\frac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx$.

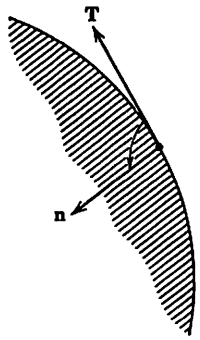
   (*c*) Aplicar (*b*) para calcular el área encerrada por una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

2. Aplicar 1(*b*) para verificar la fórmula usual para el área de un sector acotado por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y $\rho = f(\theta)$, donde $0 < \beta - \alpha < 2\pi$:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{f(\theta)} \rho\,d\rho$$

EJERCICIOS C

1. Sea C una curva seccionalmente suave la cual constituye una frontera orientada positivamente de una región R. Entonces la normal interior $\mathbf{n}$ se obtiene a



partir del vector unitario $\mathbf{T}$ mediante una rotación de 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (ver figura). Demostrar que si u tiene segundas derivadas continuas en R, entonces

$$\iint_R (\Delta u)\, dA = -\int_C \nabla_n u\, ds,$$

donde $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy}$.

2. Demostrar también que:

(a) $\displaystyle\iint_R (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dA = -\int_C u\nabla_n v\, ds$

(b) $\displaystyle\iint_R (u\Delta v - v\Delta u)\, dA = -\int_C (u\nabla_n v - v\nabla_n u)\, ds$

(c) $\displaystyle\iint_R |\nabla v|^2\, dA = -\int_C v\nabla_n v\, ds$, si $\Delta v = 0$.

3. A partir del teorema de Green, deducir las siguientes fórmulas:

(a) $\displaystyle\iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA = -\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$

(b) $\displaystyle\iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$

13.3 SUPERFICIES. AREA

Hemos discutido las superficies dadas explícitamente por $z = \phi(x, y)$ y, por medio del teorema de la función implícita, aquéllas dadas por $f(x, y, z) = 0$. Ahora deseamos discutir las superficies dadas paramétricamente.

Sea $\mathscr{D}$ una región en el plano E_2. Denotaremos los puntos en $\mathscr{D}$ por $\mathbf{Q} = (u, v)$. Y supóngase que $\mathbf{F}$ es una función vectorial continua en tres dimensiones, definida en $\mathscr{D}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \tag{1}$$

o bien, en términos de las componentes,

$$x = f(u, v) \qquad y = g(u, v) \qquad z = h(u, v). \tag{1'}$$

El rango de $\mathbf{F}$ se llamará una **superficie**, S. Sin embargo, así como pueden existir curvas llenadoras de espacio, también pueden existir superficies llenadoras de espacio. Entonces, simplemente bajo la hipótesis de continuidad es de esperar un comportamiento muy complicado de las superficies. Así que nos restringiremos inmediatamente a la consideración de elementos de superficie suave:

Supóngase que:

(i) $\mathscr{D}$ es una región cerrada, acotada, simplemente conexa, cuya frontera $\mathscr{B}$ es seccionalmente suave.

(ii) S no tiene puntos dobles; es decir, si $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_2)$, entonces $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$.

(iii) $\mathbf{F}$ tiene derivadas continuas en $\mathscr{D}$.

(iv) En ningún punto $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{D}$ los tres jacobianos

$$J_1 \equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 \equiv \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad J_3 \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

son todos igual a cero.

Si S: $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ satisface todas estas condiciones se llamará **elemento simple de superficie suave.**

13.3a Teorema. Sea $\mathbf{P}_0$ un punto en un elemento simple de superficie suave S. Entonces existe una vecindad de $\mathbf{P}_0$ en la cual S se representa por una ecuación en la cual una de las variables x, y y z se expresa como una función de las otras dos, por ejemplo, $z = \phi(x, y)$.

Demostración. No todos los jacobianos J_1, J_2, J_3 se hacen cero en $\mathbf{P}_0$. Supóngase que $J_3 \neq 0$ allí; ésta es precisamente la condición para que $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ puedan resolverse para (u, v) en términos de (x, y) en una vecindad de x_0. Entonces estas soluciones pueden sustituirse en las ecuaciones (1'). Las primeras dos de estas ecuaciones se reducen a identidades (¿por qué?) y la tercera se transforma en

$$z = h[u(x, y), v(x, y)] = \phi(x, y),$$

donde ϕ es diferenciable puesto que u, v y h lo son. ∎

13.3b Corolario. Si S es un elemento simple de superficie suave, entonces tiene un plano tangente en cada punto $\mathbf{P}_0$ y su normal está dada por $J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k}$.

Demostración. S tiene un plano tangente puesto que, por ejemplo, z es una función diferenciable de (x, y) cerca de $\mathbf{P}_0$.

Considérese la curva C_v que pasa por $\mathbf{P}_0$ dada por $v =$ constante. Por tanto, C_v tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{P} = f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j} + h(u, v_0)\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{Q}_0 = (u_0, v_0)$ es el punto para el cual $\mathbf{P}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)$. Entonces el vector

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = f_1\mathbf{i} + g_1\mathbf{j} + h_1\mathbf{k},$$

donde las derivadas se evalúan en $\mathbf{Q}_0$, es tangente a C_v en $\mathbf{P}_0$. En forma semejante, una tangente a C_u en $\mathbf{P}_0$ es

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = f_2\mathbf{i} + g_2\mathbf{j} + h_2\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, una normal a S en $\mathbf{P}_0$ está dada por

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

$$= J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

Nuestro principal objetivo aquí es definir área de una superficie. Salta a la vista que ciertos coeficientes presentes en la diferencial para la longitud de arco en una superficie tienen una importante relación con el área. En consecuencia, estudiaremos brevemente las curvas suaves sobre una superficie suave.

13.3c Teorema. Sea S: $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ para $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{D}$ un elemento simple de superficie suave. Sea $\mathscr{C}$: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$, $\{a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva suave en $\mathscr{D}$. Entonces C: $\mathbf{P} = \mathbf{F}[\mathbf{Q}(t)]$, $\{a \leqslant t \leqslant b\}$ es una curva suave en S.

Demostración. Evidentemente $\mathbf{P}$ es una función diferenciable de t, supuesto que $\mathbf{F}$ es una función diferenciable de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}$ es una función diferenciable de t. Falta concluir que $d\mathbf{P}/dt \neq 0$ a lo largo de C.

Para verlo, obsérvese que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},$$

de modo que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{P}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\right)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

donde

$$E = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

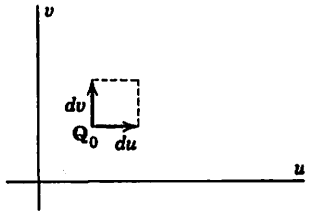
$$F = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

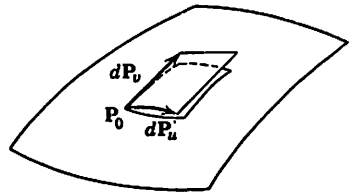
$$G = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

No ambas du/dt y dv/dt pueden ser cero (¿por qué?) De donde $(ds/dt)^2 > 0$ si $EG - F^2 > 0$ (¿por qué?) Mediante un cálculo directo (Ejercicio B4) se ve que

$$EG - F^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 > 0.$$

De donde $d\mathbf{P}/dt \neq 0$ y C es una curva suave. $\blacksquare$





Sea $\mathbf{Q}_0$ un punto de $\mathscr{D}$ y $\mathbf{P}_0$ el correspondiente punto S. Si hacemos un pequeño cambio du a lo largo de la línea $v = v_0$ y un pequeño cambio dv a lo largo de $u = u_0$ en Q_0, el área del rectángulo así formado en el plano uv es $du\,dv$. Estos cambios inducen cambios vectoriales en S dados aproximadamente como

$$d\mathbf{P}_u = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\,du = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}\right)du$$

y $$d\mathbf{P}_v = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\,dv = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}\right) dv.$$

Estas diferenciales $d\mathbf{P}_u$ y $d\mathbf{P}_v$ son aproximaciones a los lados de un pequeño paralelogramo en S cuya área $d\sigma$ está dada por

$$d\sigma = |d\mathbf{P}_u \times d\mathbf{P}_v| = \left|\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\right| du\,dv$$

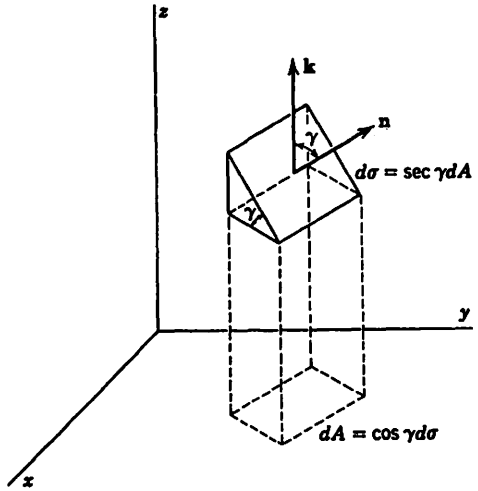
$$= |J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k}|\,du\,dv$$

$$= \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,du\,dv$$

o bien $$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Si la superficie está dada en la forma $z = f(x, y)$, esta expresión se reduce a

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$



Esta última fórmula tiene un significado geométrico sencillo. Porque si S se describe por $z = f(x, y)$, la ecuación vectorial de S es

$$\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

de modo que $$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} = \mathbf{i} + f_1\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} = \mathbf{j} + f_2\mathbf{k}$$

y $$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} = \mathbf{k} - \mathbf{j}f_2 - \mathbf{i}f_1.$$

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{N}$ se denotará por $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{j}f_2 - \mathbf{i}f_1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

Así que si γ es el ángulo entre $\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}$,

$$\cos\gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 1/\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2} = 1\Big/\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

de manera que $$d\sigma = \sec\gamma\,dx\,dy = \sec\gamma\,dA_{xy}.$$

La figura (pág. 340) ilustra la razón geométrica para esta relación. Si $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$ significa que $\mathbf{n}$ es la normal hacia arriba. Si se usa la normal hacia abajo, a saber $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$, el ángulo entre $\mathbf{n}'$ y $\mathbf{k}$ es obtuso, de manera que $\cos\gamma < 0$. Entonces podríamos expresar $d\sigma$ en términos de $dx\,dy$ mediante la fórmula

$$d\sigma = \sec(\pi - \gamma)\,dx\,dy.$$

Este argumento heurístico indica que un elemento de área $du\,dv$ se mapea sobre un elemento de área $\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,du\,dv$ cuando $\mathcal{D}$ se mapea sobre S mediante $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$. De acuerdo con lo anterior, se define el **área de un elemento simple de superficie suave** por

$$A = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,du\,dv.$$

Si S es una superficie la cual puede descomponerse mediante curvas seccionalmente suaves en un número finito de elementos simples de superficie suave, se dice que es una superficie seccionalmente suave. El área de una superficie seccionalmente suave se define como la suma de las áreas de esas secciones suaves.

Para que esta definición pueda ser útil, incluso razonable, debe saberse que es independiente de la forma en que se descomponga la superficie. Es suficiente demostrar que si un elemento simple de superficie suave se corta en secciones más pequeñas mediante líneas seccionalmente suaves, entonces el área del elemento es la suma de las áreas de esas secciones más pequeñas. Esto es equivalente a demostrar que la integral sobre $\mathcal{D}$ que da el área es aditiva, una situación cubierta por el Teorema 12.4g.

El estudiante podría pensar que es más natural obtener una aproximación de la superficie mediante un poliedro como se aproximan las curvas mediante polígonos. Sin embargo, una pequeña reflexión le llevaría a observar que es difícil inscribir un poliedro en una superficie. En verdad no es fácil dar un método general para hacerlo. Aún más, después de establecer un método de aproximación, las áreas de los poliedros de aproxi-

mación no siempre convergen al área de la superficie. Existe un ejemplo el cual muestra que aun en una superficie suave como la de un cilindro, las áreas de los poliedros pueden hacerse infinitas en lugar de dar una aproximación del área de la superficie.

EJEMPLO. Calcular el área de la superficie S dada por

$$S: \quad z = x^2 + y^2 \qquad \mathscr{D}: \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Aquí $\partial z/\partial x = 2x$, $\partial z/\partial y = 2y$, de manera que

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{4}(\sqrt{125} - 1). \end{aligned}$$

13.4 INTEGRALES DE SUPERFICIE. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Ahora estamos en posición de definir lo que se entiende por integral sobre una superficie. Sea S un elemento simple de superficie suave, dado por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ para $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{D}$ y sea ϕ una función definida en S. Entonces por $\iint_S \phi(\mathbf{P})\, d\sigma$ se entiende

$$\iint_{\mathscr{D}} \phi[\mathbf{F}(\mathbf{Q})] \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, dA_{\mathbf{Q}},$$

siempre que esta integral exista. (En particular, existirá cuando ϕ sea continua). Cuando S esté dada en la forma $z = f(x, y)$, esto se escribe como

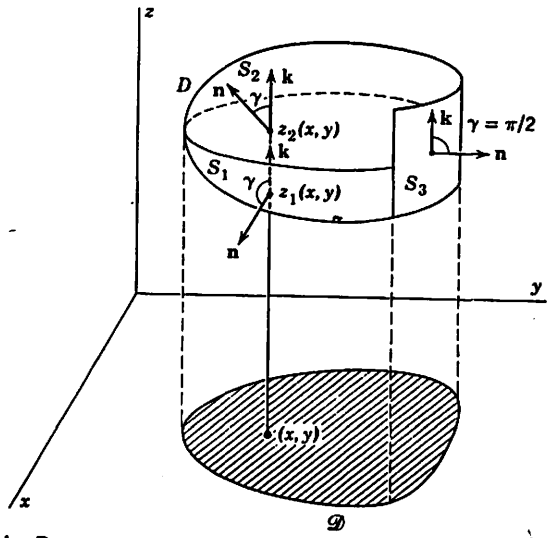
$$\iint_{\mathscr{D}} \phi(x, y, z) \sec\gamma\, dA_{xy}.$$

Existe un análogo al teorema de Green en tres dimensiones el cual expresa una relación entre las integrales de volumen y las de superficie. Y una vez más, como para el teorema de Green, daremos un argumento geométrico.

Supóngase primero que D es una región cerrada en el espacio tres con una frontera la cual es una superficie seccionalmente suave y que su proyección $\mathscr{D}$ en el plano xy es una región bidimensional cerrada con

una frontera seccionalmente suave. Supóngase además que toda línea vertical que pase por $\mathscr{D}$ intersecta a D en exactamente un intervalo:

$$\{z_1(x, y) < z < z_2(x, y)\}.$$



La frontera de D entonces consiste de tres partes: S_1, dada por $z = z_1(x, y)$; S_2, dada por $z = z_2(x, y)$ y S_3, una superficie (o superficies) paralela al eje z. Tal región se llamará **proyectable** sobre el plano xy. Se cumplen definiciones semejantes para regiones **proyectables** sobre los planos yz y xz. Si una región es proyectable sobre los tres planos se llamará **región estándar.**

Supóngase ahora que N es una función que tiene derivadas parciales continuas en una región standard D, cuya proyección en el plano xy es $\mathscr{D}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial N}{\partial z}\, dV &= \iint_{\mathscr{D}} dA_{xy} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial N}{\partial z}\, dz \\ &= \iint_{\mathscr{D}} N[x, y, z_2(x, y)]\, dA_{xy} - \iint_{\mathscr{D}} N[x, y, z_1(x, y)]\, dA_{xy} \end{aligned}$$

Si por $\mathbf{n}$ se denota al vector unitario en la dirección de la normal exterior y por γ el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{\mathscr{D}} N[x, y, z_2(x, y)]\, dA &= \iint_{\mathscr{D}} N[x, y, z_2(x, y)] \cos\gamma \sec\gamma\, dA \\ &= \iint_{S_2} N \cos\gamma\, d\sigma. \end{aligned}$$

Sobre S_1, la normal exterior apunta hacia abajo, de manera que $d\sigma = \sec(\pi - \gamma)dA$. Así se obtiene

$$-\iint_{\mathscr{D}} N[x, y, z_1(x, y)]\, dA = \iint_{\mathscr{D}} N \cos\gamma \sec(-\gamma)\, dA$$

$$= \iint_{S_1} N \cos\gamma\, d\sigma.$$

Y, finalmente,

$$\iint_{S_3} N \cos\gamma\, d\sigma = 0,$$

puesto que $\gamma = \pi/2$ sobre S_3. Por lo tanto, combinando todas estas integrales de superficie se ve que

$$\iiint_D \frac{\partial N}{\partial z}\, dV = \iint_S N \cos\gamma\, d\sigma.$$

En forma semejante,

$$\iiint_D \frac{\partial L}{\partial x}\, dV = \iint_S L \cos\alpha\, d\sigma$$

y

$$\iiint_D \frac{\partial M}{\partial y}\, dV = \iint_S M \cos\beta\, d\sigma,$$

donde L y M tienen derivadas continuas en D y donde $\cos\alpha = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}$ y $\cos\beta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{j}$. Sumando estas tres fórmulas, se expresan los resultados en la forma

$$\iiint_D \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) dV = \iint_S (L\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} + M\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} + N\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, d\sigma$$

$$= \iint_S (L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

o bien, en notación vectorial,

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma, \tag{1}$$

donde $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}$ es la normal exterior.

También debe ser evidente que si D es cualquier región que puede descomponerse en regiones standard mediante superficies seccionalmente suaves, la fórmula (1) se cumple para D. La fórmula (1) se cumple para cada región standard. Si S_n es una superficie auxiliar que se encuentra entre dos regiones standard, la normal exterior para una es la negativa de la normal exterior para la otra. Por tanto, la contribución para las integrales de superficie sobre estas superficies auxiliares se cancela, dejando precisamente la fórmula (1). Así se obtiene el siguiente teorema conocido

como teorema de Green, como teorema de Gauss, o bien, debido a la presencia de $\nabla\cdot\mathbf{F}$ en el integrando de la integral de volumen, como el **teorema de la divergencia.**

13.4a Teorema. Sea D una región cerrada acotada en E_3 la cual puede subdividirse en un número finito de regiones standard. Sea $\mathbf{F}$ una función continuamente diferenciable en D. Entonces.

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \qquad \mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior.

Como en el caso del teorema de Green, nos contentaremos con el argumento geométrico que se ha dado. Aunque es cierto que ésta no es de ninguna manera la forma más fuerte del teorema, sin embargo, es un teorema útil que sirve muy bien para muchos propósitos del análisis. Por ejemplo, en la teoría del potencial y la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, generalmente podemos restringir su uso a regiones muy sencillas cubiertas por el Teorema 13.4a.

EJERCICIOS A

1. Encontrar las áreas de las siguientes superficies:
   (a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad \mathscr{D}: \{x^2 + y^2 < 1\}$
   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \mathscr{D}: \{x^2 + y^2 < 1\}$
   (c) $2z = 4 - x^2 - y^2$ $\quad \mathscr{D}: \{1 < x^2 + y^2 < 2\}$
   (d) $z = xy$ $\quad \mathscr{D}: \{x^2 + y^2 < 1\}$
2. Encontrar el área cortada de la punta del paraboloide $x = y^2 + z^2$ por el plano $x + z = 1$.
3. Calcular las siguientes integrales de superficie:
   (a) $\displaystyle\iint_S x^2\, d\sigma$ $\quad S$: el cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$
   (b) $\displaystyle\iint_S x(z^2 + y^2)\, d\sigma$ $\quad S: x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$
   (c) $\displaystyle\iint_S (z^2 + y^2)\, d\sigma$ $\quad S: x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$
   (d) $\displaystyle\iint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ $\quad S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
4. Explicar por qué $\displaystyle\iint_S x\, d\sigma = 0$ si S es simétrica respecto al origen.

5. Calcular las siguientes integrales de superficie aplicando el teorema de la divergencia.

(a) $\iint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \qquad S: x^2+y^2+z^2=1$

(b) $\iint_S (x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$, donde S es la superficie del cubo $\{-1<x<1,\ -1<y<1,\ -1<z<1\}$.

(c) $\iint_S (x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma)\,d\sigma$ sobre la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, donde $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

EJERCICIOS B

1. Sea S definida implícitamente por $f(x, y, z)$, donde f es continuamente diferenciable, y supóngase que $f_3\neq 0$, de manera que la ecuación puede resolverse para z en términos de x y y, para (x, y) en $\mathscr{D}$. Demostrar que para ϕ continua en S:

$$\iint_S \phi\,d\sigma = \iint_{\mathscr{D}} \phi\,\frac{\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}}{|f_3|}\,dA$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{\mathscr{D}} \frac{\mathbf{F}\cdot\nabla f}{|f_3|}\,dA$$

2. Sea D una región standard y S su frontera. Si $\mathbf{O}$ no está en D, demostrar que:

(a) $\iint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 3\iiint_D dV$

(b) $\iint_S \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{P}|}\,d\sigma = 2\iiint_D \frac{dV}{|\mathbf{P}|}$

(c) $\iint_S \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{P}|^2}\,d\sigma = \iiint_D \frac{dV}{|\mathbf{P}|^2}$

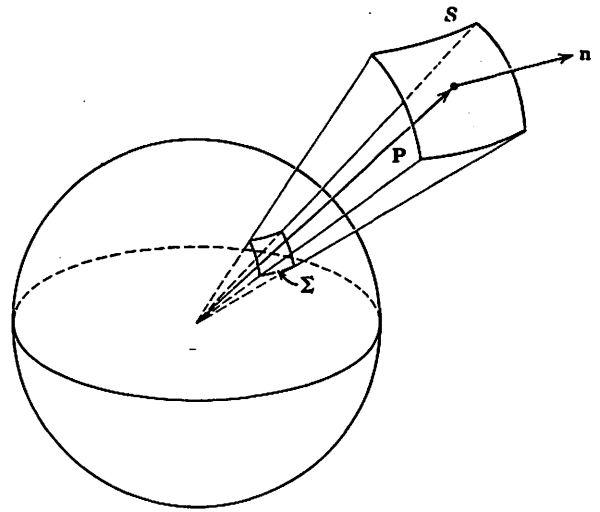
3. Si V es igual al volumen de D dado en los ejercicios del problema anterior, demostrar que:

$$V=\iint_S x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint_S y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint_S z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma.$$

4. Demostrar que $EG-F^2=J_1^2+J_2^2+J_3^2$, y así completar la demostración del Teorema 13.3c.

EJERCICIOS C

1. Sea S un elemento de superficie suave el cual intersecta cada rayo que parte del origen cuando más en un punto. El conjunto de rayos que intersectan S horadarán a la esfera unitaria con centro en el origen en un conjunto Σ. El área de Σ se llama **ángulo sólido**, subtendido por S. Demostrar que el ángulo sólido está dado por



$$\iint_S \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{P}|^3}\,d\sigma,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior en S. (Aplicar el teorema de la divergencia al volumen entre Σ y S.)

2. Sea D una región standard con superficie S y supóngase que tanto u como v tienen derivadas de segundo orden continuas en D. Demostrar que

(a) $\iiint_D (u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v)\,dV = \iint_S u\nabla v\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

(b) $\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_S (u\nabla v\cdot\mathbf{n} - v\nabla u\cdot\mathbf{n})\,d\sigma$

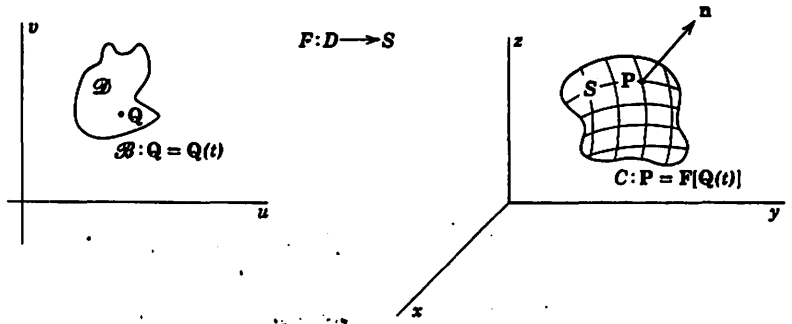
(c) $\iiint_D \Delta u\,dV = \iint_S \nabla u\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

(d) $\iiint_D |\nabla u|^2\,dV = \iint_S u(\nabla u\cdot\mathbf{n})\,d\sigma$, si $\Delta u = 0$.

3. Probar el inverso del Teorema 13.3c: Si C es una curva suave sobre un elemento simple de superficie suave, entonces $\mathscr{C}$, la imagen de C de vuelta en $\mathscr{D}$, es una curva suave.

13.5 TEOREMA DE STOKES. SUPERFICIES ORIENTABLES

Sea S un elemento simple de superficie suave descrito por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ para $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{D}$. Sea $\mathscr{B}$: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$, $\{a \leqslant t \leqslant b\}$ la frontera de $\mathscr{D}$ orientada



positivamente respecto a $\mathscr{D}$. Esto induce una parametrización y, de este modo, una orientación de C, la frontera de S, dada por $\mathbf{P} = \mathbf{F}[\mathbf{Q}(t)]$. (Entonces la normal unitaria, definida por $\mathbf{n} = (J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k})/\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$, apuntará de manera que la curva $\mathscr{C}$ quede orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de él, observando la rotación desde el extremo del vector normal).

Ahora supóngase que L, M y N son funciones diferenciables definidas en una región R que contiene a S (lo que realmente aplicaremos será la existencia de ∇L, ∇M, ∇N en S) y que la función vectorial $\mathbf{F}$ tiene segundas derivadas continuas en $\mathscr{D}$. Entonces considérese

$$\int_C L\,dx = \int_{\mathscr{B}} L\frac{\partial x}{\partial u}\,du + L\frac{\partial x}{\partial v}\,dv.$$

Por el teorema de Green esto se transforma en

$$\iint_{\mathscr{D}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(L\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(L\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dA_{uv} = \iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dA_{uv}.$$

Puesto que $\partial^2 x/\partial u\,\partial v = \partial^2 x/\partial v\,\partial u$, los términos que contienen estas derivadas se cancelan. Ahora bien

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

de manera que cuando multiplicamos estas expresiones respectivamente por $\partial x/\partial v$ y $\partial x/\partial u$, y sumamos se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial L}{\partial y}J_3 + \frac{\partial L}{\partial z}J_2,$$

donde $\quad J_1 = \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 = \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad J_3 = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$

Pero la normal $\mathbf{n}$ está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k}}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k},$$

de modo que $\quad J_1 = \cos\alpha\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$

y así sucesivamente. La integral entonces se transforma en

$$\int_C L\,dx = \iint_{\mathscr{D}}\left(-\frac{\partial L}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial L}{\partial z}\cos\beta\right)\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,dA_{uv}$$

$$= \iint_S\left(-\frac{\partial L}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial L}{\partial z}\cos\beta\right) d\sigma.$$

De manera semejante,

$$\int_C M\,dy = \iint_S\left(-\frac{\partial M}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial M}{\partial x}\cos\gamma\right) d\sigma$$

y

$$\int_C N\,dz = \iint_S\left(-\frac{\partial N}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial N}{\partial y}\cos\alpha\right) d\sigma.$$

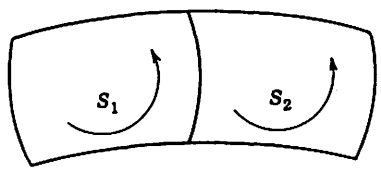
Sumando se obtiene

$$\int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz = \iint_S\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma.$$

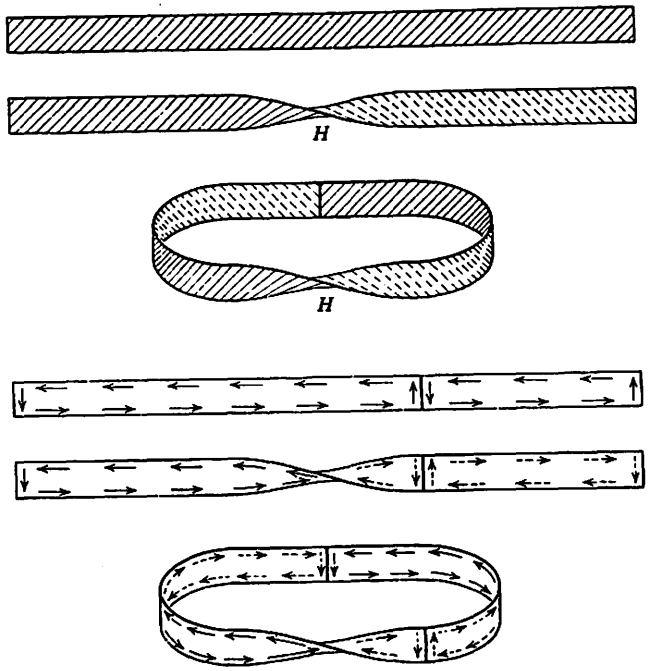
Y en notación vectorial se tiene

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{P} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{1}$$

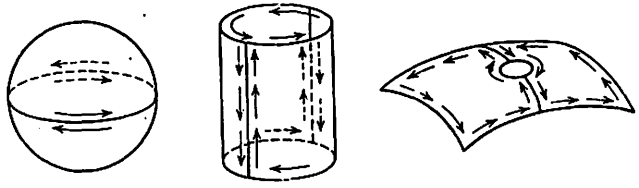
Esta expresión es el **teorema de Stokes** para un elemento simple de superficie suave.



Para extender esta fórmula a una superficie que puede descomponerse en elementos simples de superficie suave, debe verse cómo se ponen estos elementos para formar la superficie completa. La idea es ésta: Supóngase que S se compone de S_1 con frontera C_1 y S_2 con frontera C_2, donde C_1 y C_2



tienen uno o más arcos comunes. Si la fórmula (1) es aplicable tanto a S_1 como a S_2, nos gustaría sumar los resultados, saber que las integrales de línea sobre los arcos comunes se cancelan y obtener que (1) es válida para



la propia S. Desafortunadamente esto no siempre sucede. Esta distinción separa a las superficies en dos clases: aquéllas para las cuales puede lograrse tal descomposición y aquéllas para las cuales no es posible. El teorema de Stokes se extiende para una de las clases, pero no para la otra.

Supóngase que S consiste de dos elementos simples de superficie suave S_1 y S_2 con fronteras C_1 y C_2, respectivamente, orientadas positivamente, y que S_1 y S_2 se unen a lo largo de cuando más un número finito de arcos los cuales son comunes a C_1 y C_2. Cada uno de estos arcos comunes heredará una orientación de C_1 y de C_2. Si estas dos orientaciones son de direcciones opuestas se dice que la superficie de S es una **superficie orientable**, de lo contrario es **no orientable.** En general, supóngase que S puede descomponerse en un número finito de elementos simples de superficie suave $S_1, S_2, \ldots, S_n$ con fronteras $C_1, C_2, \ldots, C_n$, respectivamente. Si cada C_j tiene cuando más un número finito de arcos en común con los demás C_k y si las dos orientaciones inducidas en cada uno de estos arcos por C_j y C_k son opuestas, entonces se dice que S es **orientable,** en caso contrario es **no orientable.** Es un hecho, aunque no lo demostraremos, que la orientabilidad es una propiedad de la superficie y no de la descomposición; esto es, si una superficie es orientable bajo una descomposición, también será orientable bajo todas las demás descomposiciones.

Para que el estudiante se convenza de que existen superficies no orientables debe estudiar los diagramas de la cinta de Möbius. Esta superficie con un solo lado se construye de la siguiente manera: Tómese una pieza de papel rectangular y alargada, désele un medio giro (H), únanse los extremos y péguense. La superficie resultante tiene un solo lado, una sola arista y no es orientable. (Ver página anterior.)

El teorema de Stokes se extiende inmediatamente a las superficies orientables, porque, como se indicó anteriormente, las integrales de línea sobre las partes comunes de la frontera se cancelan, dejando precisamente la integral alrededor de la frontera de S. Así se tiene el siguiente teorema.

13.5a Teorema. Sea S una superficie orientable con frontera C, donde las ecuaciones que definen cada parte simple y suave de S tienen dos derivadas continuas. Supóngase además que $\mathbf{F}$ es una función diferenciable definida en una región que contiene a S. Entonces

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}.$$

Puede usarse el teorema de Stokes para establecer un análogo tridimensional del Teorema 13.2c, el cual proporciona una prueba derivativa para que un campo vectorial sea un campo gradiente. La idea de la prueba es la siguiente: Si ϕ es una función continuamente diferenciable por dos veces, sus derivadas mixtas son independientes del orden de la derivación. Así, por ejemplo,

$$\phi_{12} = \phi_{21}.$$

Esto se expresa vectorialmente por

$$\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}.$$

Ahora se desprende que, en regiones simplemente conexas, esto también es suficiente. (La necesidad para simple conexidad es casi la misma que para dos dimensiones.)

La simple conexidad es un concepto difícil en tres dimensiones, de manera que probaremos el teorema bajo la más restrictiva condición de convexidad. Se dice que un conjunto D es **convexo** si dos puntos cualesquiera en D pueden unirse mediante un segmento que se encuentre en D.

13.5b Teorema. Sea D una región convexa y sea $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ continuamente diferenciable en D. Entonces para que $\mathbf{F}$ sea un campo gradiente es necesario y suficiente que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{O}$.

Demostración: *Necesidad.* Si existe un ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{O}.$$

Suficiencia. Si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{O}$, entonces se define ϕ en D por

$$\phi(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P},$$

donde $\mathbf{P}_0$ es un punto fijo y la integral se toma sobre el segmento desde $\mathbf{P}_0$ hasta $\mathbf{P}$.

Primero demostraremos que, para $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ cualesquiera en D,

$$\phi(\mathbf{P}) - \phi(\mathbf{Q}) = \int_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P},$$

donde la integral se toma a lo largo del segmento que une $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$. Para observarlo, considérese

$$\text{(1)} \qquad \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} + \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} + \int_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{P}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P},$$

donde C es el triángulo con vértices $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Si S es la superficie triangular acotada por C, entonces S está en D (¿por qué?) y, por el teorema de Stokes, esta integral de línea es igual a

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

Por lo tanto el segundo miembro de (1) se hace cero, de modo que

$$\int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} + \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} + \int_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{P}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\phi(\mathbf{P}) - \phi(\mathbf{Q}) = \int_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}.$$

Aplicamos esta fórmula de la siguiente manera. Hagamos

$$\mathbf{Q} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{P} = (x + h, y, z).$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{h}[\phi(x + h, y, z) - \phi(x, y, z)] = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} L\, dx$

$$= L(x', y, z)$$

por el teorema del valor medio, donde x' se encuentra entre x y $x + h$.

Conforme $h \to 0$, se obtiene

$$\phi_1(\mathbf{Q}) = L(\mathbf{Q}).$$

En forma semejante, $\phi_2(\mathbf{Q}) = M(\mathbf{Q})$,

y $\phi_3(\mathbf{Q}) = N(\mathbf{Q})$.

De donde $\nabla\phi = \mathbf{F}$. ∎

Este teorema puede reestablecerse como un corolario.

13.5c Corolario. Sea D una región convexa y supóngase que $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ es continuamente diferenciable en D. Entonces para que $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ sea independiente de la trayectoria es necesario y suficiente que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{O}$.

13.6 ALGO DE HEURISTICA FISICA

Sea $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ un campo vectorial diferenciable en una región D y sea $\mathbf{P}_0$ un punto en D. Si D_r es una esfera de radio r con centro en $\mathbf{P}_0$, entonces por el teorema del valor medio

$$\text{(1)} \qquad \iiint_{D_r} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{P}')V_r,$$

donde V_r es el volumen de D_r y $\mathbf{P}'$ es un punto de D_r. También, por el teorema de la divergencia,

$$\text{(2)} \qquad \iiint_{D_r} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde S_r es la superficie de D_r y $\mathbf{n}$ es la normal exterior. Combinando (1) y (2), dividiendo entre V_r y haciendo que $r \to 0$, se obtiene

$$\text{(3)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{P}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Esto proporciona una interpretación de la divergencia de un campo vectorial que es independiente de las coordenadas. Por esta razón frecuentemente se usa como la definición de divergencia, a partir de la cual puede demostrarse que en cualquier sistema coordenado rectangular, la divergencia está dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Supóngase que un fluido se mueve en una región D y que en un instante dado la partícula de fluido en el punto $\mathbf{P}$ tiene un vector velocidad $\mathbf{F}$. El campo vectorial así definido se llama **campo de velocidades** del fluido en el instante en cuestión. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector unitario, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\alpha}$ es la componente de la velocidad en $\mathbf{P}$ en la dirección $\boldsymbol{\alpha}$.

Fijemos una vez más nuestra atención sobre la esfera D_r con centro en un punto $\mathbf{P}_0$ en D. Puesto que $\mathbf{n}$ es la normal exterior, $\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}$ es la razón de flujo del fluido hacia afuera de la esfera en el punto $\mathbf{P}$, y la integral $\iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ nos da la razón neta de flujo del fluido hacia afuera de la esfera. Dividiendo por V_r se obtiene la razón neta de flujo de fluido hacia afuera de D_r por unidad de volumen. Por lo tanto, $(1/V_r)\iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ es una medida de la rapidez a la cual el fluido se expande o diverge cerca del punto $\mathbf{P}_0$. Esto, por supuesto, es la razón del nombre de «divergencia» que se le da a $\nabla \cdot \mathbf{F} = L_1 + M_2 + N_3$.

Ahora considérese un plano que pasa por el punto $\mathbf{P}_0$. Sea C_r un círculo de radio r en este plano con centro en $\mathbf{P}_0$, con el disco acotado por C_r denotado por S_r. Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \iint_{S_r} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{4}$$

Por el teorema del valor medio se obtiene

$$\int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{P}') \cdot \mathbf{n} A_r, \tag{5}$$

donde $\mathbf{P}'$ está en S_r y A_r es el área del círculo. De (4) y (5) se obtiene

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{P}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}. \tag{6}$$

Ahora bien $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de C_r en la dirección positiva a lo largo de C_r, multiplicada por el elemento de longitud de arco. Integrada sobre C_r nos proporciona la componente neta de $\mathbf{F}$ en la dirección positiva alrededor de C_r, la cual mide la tendencia del fluido a girar alrededor de un eje en la dirección $\mathbf{n}$ en el punto $\mathbf{P}_0$. De este hecho proviene el nombre de **rot F** dado a $\nabla \times \mathbf{F}$. Esta expresión en ocasiones también recibe el nombre de **rotación** de $\mathbf{F}$.

EJERCICIOS A

1. Evaluar aplicando el teorema de Stokes:

   (a) $\int_C 2y\, dx - 2x\, dy + z^2 x\, dz$

   C: $\mathbf{P} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \{0 < \theta < 2\pi\}$

   (b) $\int_C yz^2\, dx + (xz^2 - 2y)\, dy + 2xyz\, dz$

   C: $\mathbf{P} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \quad \{0 < \theta < 2\pi\}$

EJERCICIOS B

1. Demostrar que si S es una superficie simple seccionalmente suave, acotada por C, entonces

$$\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \tfrac{1}{2} \int_C \mathbf{a} \times \mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}.$$

2. Demostrar que, si u es continuamente diferenciable en S,

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla u \times \nabla v\, d\sigma = \int_C u \nabla v \cdot d\mathbf{P}.$$

13.7 CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES MULTIPLES

En la integral

$$I = \int_a^b f(y)\, dy$$

un cambio de variables dada por $y = v(x)$ conduce a la fórmula

$$I = \int_c^d f[v(x)] v'(x)\, dx,$$

donde $v(c) = a$ y $v(d) = b$. Para simplificar la imagen de lo que se trata, supongamos que $v(x)$ es una función creciente, de manera que la ecuación $y = v(x)$ proporciona un mapeo uno a uno del intervalo $\{c \leqslant x \leqslant d\}$ sobre el intervalo $\{a \leqslant y \leqslant b\}$. Entonces $v(x + h) - v(x)$ es la longitud del intervalo sobre el eje y, el cual es la imagen del intervalo de x a $x + h$

sobre el eje x. La razón de estos intervalos es $[v(x+h)-v(x)]/h$. Conforme $h \to 0$, este cociente diferencia tiende a $v'(x)$. Por lo tanto, $v'(x)$ se ve como un «factor de amplificación local» por el cual debe multiplicarse el intervalo de longitud dx para transformarlo en su imagen de longitud dy sobre el eje y. Entonces el cambio de variables en I se ve heurísticamente como una sustitución de iguales por iguales: $f(y) = f[v(x)]$ y $dy = v'(x)\,dx$.

Así, es de esperarse una fórmula semejante en el caso de la integral múltiple. Sea

$$I = \iint_D f(\mathbf{P})\, dA_{\mathbf{P}}.$$

Si $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ proporciona un mapeo uno a uno de un dominio $\mathscr{D}$ sobre D, entonces debe esperarse una fórmula de la forma

$$I = \iint_{\mathscr{D}} f[\mathbf{F}(\mathbf{Q})]|J(\mathbf{Q})|\, dA_{\mathbf{Q}},$$

donde $|J(\mathbf{Q})|$ es el «factor de amplificación local» por el cual debe multiplicarse el elemento de área $dA_{\mathbf{Q}}$ para hacerlo igual al área $dA_{\mathbf{P}}$, hacia el cual se lleva mediante el mapeo $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$. Ya conocemos (por lo menos heurísticamente, por la Sección 11.5) un factor de ese tipo, a saber el valor absoluto del jacobiano de la transformación $\mathbf{F}$.

El mismo razonamiento se aplica con igual propiedad en cualquier número de dimensiones, de manera que es de esperarse que

$$\iiint_D f(\mathbf{P})\, dV_{\mathbf{P}} = \iiint_{\mathscr{D}} f[\mathbf{F}(\mathbf{Q})]|J(\mathbf{Q})|\, dV_{\mathbf{Q}}$$

El objeto de esta sección es determinar las condiciones bajo las cuales son válidas estas fórmulas. Sea R una región abierta en el plano (x, y) y supóngase que la ecuación $\mathbf{P}=\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, dada en coordenadas por $x=f(u, v)$, $y = g(u, v)$, es un mapeo uno a uno continuamente diferenciable de una región abierta $\mathscr{R}$ en el plano (u, v) sobre R. Supóngase ahora que $\mathbf{F}$ y su inversa mapean regiones a las cuales puede aplicárseles el teorema de Green sobre regiones a las cuales puede aplicárseles el teorema de Green. Supóngase además que el jacobiano

$$J(\mathbf{Q}) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}$$

nunca es cero en $\mathscr{R}$.

13.7a Lema. Sea D una subregión cerrada acotada de R a la cual puede aplicársele el teorema de Green. Y supóngase además que g es continuamente diferenciable dos veces. Entonces el área de D está dada por

$$A_D = \iint_{\mathscr{D}} |J(\mathbf{Q})|\, dA_{\mathbf{Q}},$$

donde $\mathscr{D}$ es la imagen en $\mathscr{R}$ de D bajo el mapeo inverso.

Demostración. Sea B la frontera de D. Entonces, por el teorema de Green,

$$\int_B x\, dy = \iint_D dA_{\mathbf{P}} = A_D.$$

Pero si $\mathscr{B}$ es la frontera de $\mathscr{D}$, se tiene

$$\int_B x\, dy = \int_{\pm\mathscr{B}} f\frac{\partial g}{\partial u}\, du + f\frac{\partial g}{\partial v}\, dv,$$

donde la integral se toma en el sentido positivo o negativo de acuerdo con que la orientación se conserve o se invierta por el mapeo. Pero

$$\begin{aligned}\int_{\pm\mathscr{B}}\left(f\frac{g}{u}\,du + f\frac{g}{v}\,dv\right) &= \pm\int_{\mathscr{B}}\left(f\frac{g}{u}\,du + f\frac{g}{v}\,dv\right)\\ &= \pm\iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial g}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right) dA_{\mathbf{Q}}\\ &= \pm\iint_{\mathscr{D}}(f_u g_v - f_v g_u)\, dA_{\mathbf{Q}} = \pm\iint_{\mathscr{S}} J(\mathbf{Q})\, dA_{\mathbf{Q}}\end{aligned}$$

Supuesto que el resultado debe ser positivo, el signo ambiguo se escoge como el del propio J. ∎

Si sucediera que g no es continuamente diferenciable dos veces, pero f lo es, entonces la demostración puede realizarse partiendo de

$$A_D = -\int_B y\, dx.$$

En la mayor parte de los casos tanto f como g serán altamente diferenciables; por ejemplo, las ecuaciones para introducir coordenadas polares son infinitamente diferenciables.

13.7b Teorema. Sean D y $\mathscr{D}$ relacionadas como en el Lema 13.7a y sea ϕ continua en D. Entonces

$$\iint_D \phi(\mathbf{P})\, dA_{\mathbf{P}} = \iint_{\mathscr{D}} \phi[\mathbf{F}(\mathbf{Q})]|J(\mathbf{Q})|\, dA_{\mathbf{Q}}.$$

Demostración. Fórmese una partición curvilínea Δ de D, de la cual cada subregión D_k es una región a la cual puede aplicársele el teorema de Green. Sea $\mathscr{D}_k$ la imagen de D_k en el plano (u, v). Entonces, por el Lema 13.7a y el teorema del valor medio,

$$A_{D_k} = \iint_{\mathscr{D}_k} |J(\mathbf{Q})|\, dA_{\mathbf{Q}} = |J(\mathbf{Q}_k)| A_{\mathscr{D}_k},$$

donde $\mathbf{Q}_k$ es un punto en $\mathscr{D}_k$. Hágase $\mathbf{P}_k = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_k)$ y obsérvese que

$$\sum_{\Delta} \phi(\mathbf{P}_k) A_{D_k} = \sum_{\Delta} \phi[\mathbf{F}(\mathbf{Q}_k)] |J(\mathbf{Q}_k)| A_{\mathscr{D}_k}$$

donde Δ' es la partición de $\mathscr{D}$ inducida por Δ. Entonces, por la continuidad uniforme,

$$\|\Delta'\| \to 0 \quad \text{conforme} \quad \|\Delta\| \to 0;$$

por tanto, tendiendo al límite, por el Teorema 12.4h se obtiene

$$\iint_D \phi(\mathbf{P})\, dA_{\mathbf{P}} = \iint_{\mathscr{D}} \phi[\mathbf{F}(\mathbf{Q})] |J(\mathbf{Q})|\, dA_{\mathbf{Q}} \qquad \blacksquare$$

Los mismos resultados se extienden a tres dimensiones. Supongamos que la transformación está dada por $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ o en coordenadas, por $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Como antes, supóngase que $\mathbf{F}$ mapea una región abierta $\mathscr{R}$ en el espacio $\mathbf{Q} = (u, v, w)$ sobre una región abierta R del espacio $\mathbf{P} = (x, y, z)$ en una forma uno a uno. Además supóngase que $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable dos veces. Sea D una subregión cerrada de R cuya frontera B es una superficie seccionalmente suave y sea $\mathscr{D}$ la imagen de D en $\mathscr{R}$ bajo el mapeo inverso. Entonces la frontera $\mathscr{B}$ de $\mathscr{D}$ es seccionalmente suave. (El argumento es muy semejante al aplicado en el Teorema 13.3c). Finalmente, supóngase que el teorema de la divergencia se aplica tanto a D como $\mathscr{D}$.

13.7c Teorema. Sean D y $\mathscr{D}$ relacionadas como se dijo en el párrafo anterior.
Entonces, si $J(\mathbf{Q}) \neq 0$, el volumen de D está dado por

$$V_D = \iiint_{\mathscr{D}} |J(\mathbf{Q})|\, dV_{\mathbf{Q}},$$

donde $J(\mathbf{Q})$ es el jacobiano de $\mathbf{F}$.

Demostración. Por el teorema de la divergencia

$$V_D = \iiint_D dV_{\mathbf{P}} = \iint_B z \cos\gamma\, d\sigma_{\mathbf{P}}.$$

Sea S un elemento simple de superficie suave sobre B y $\mathscr{S}$ su imagen sobre $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{S}$ está dado por $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(r, t)$; esto es, $u = u(r, t)$, $v = v(r, t)$ y $w = w(r, t)$ para (r, t) en una región plana M del plano (r, t), entonces S está dado por $\mathbf{P} = \mathbf{F}[\mathbf{Q}(r, t)]$. Ahora considérese

$$\iint_S z \cos\gamma\, d\sigma_{\mathbf{P}} = \pm \iint_M z \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, dA_{r,t}$$

$$= \pm \iint_M z J_3\, dA_{r,t} = \pm \iint_M z \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)}\, dA_{r,t}$$

Pero $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)} \dfrac{\partial(v, w)}{\partial(r, t)} + \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)} \dfrac{\partial(w, u)}{\partial(r, t)} + \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(r, t)}$.

(Ver ejercicio B5 de la Sección 11.3. Esto también puede verificarse por cálculo directo.) Por tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, w)} \mathscr{J}_1 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, v)} \mathscr{J}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathscr{J}_3,$$

donde las letras $\mathscr{J}$ se refieren a la superficie $\mathscr{S}$. Sustituyendo esto junto con $x = f$, $y = g$, $z = h$ en nuestra integral, se obtiene

$$\pm \iint_M \left[h \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)} \mathscr{J}_1 + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(w, u)} \mathscr{J}_2 + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \mathscr{J}_3 \right] dA_{r,t}$$

A continuación, denotemos $\mathscr{J}_1 / \sqrt{\mathscr{J}_1^2 + \mathscr{J}_2^2 + \mathscr{J}_3^2} = \cos\alpha'$, y así sucesivamente, de modo que esta integral se transforma en

$$\pm \iint_{\mathscr{S}} \left[h \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)} \cos\alpha' + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(w, u)} \cos\beta' + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \cos\gamma' \right] d\sigma_{\mathbf{Q}}.$$

Combinando las integrales sobre todas las secciones suaves da

$$V_D = \pm \iint_{\mathscr{S}} \left[h \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)} \cos\alpha' + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(w, u)} \cos\beta' + h \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \cos\gamma \right] d\sigma_{\mathbf{Q}}.$$

Aplicaremos el teorema de la divergencia a esta integral con

$$L = h \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)}, \quad M = h \frac{\partial(f, g)}{\partial(w, u)}, \quad N = h \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}.$$

Encontramos, después de un cálculo en el cual se cancelan algunas segundas derivadas, que

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial w} = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = J(\mathbf{Q}).$$

Así que finalmente se obtiene

$$V_D = \pm \iiint_{\mathscr{D}} J(\mathbf{Q})\, dV_{\mathbf{Q}}.$$

El signo debe escogerse como se indicó anteriormente. Por lo tanto, la demostración está completa. ∎

13.7d Teorema. Sean D y $\mathscr{D}$ relacionadas como en el teorema anterior y sea ϕ continua en D. Entonces

$$\iiint_{D} \phi(\mathbf{P})\, dV_{\mathbf{P}} = \iiint_{\mathscr{D}} \phi[\mathbf{F}(\mathbf{Q})]|J(\mathbf{Q})|\, dV_{\mathbf{Q}}.$$

Demostración. La demostración del Teorema 13.7b puede tomarse casi palabra por palabra. ∎

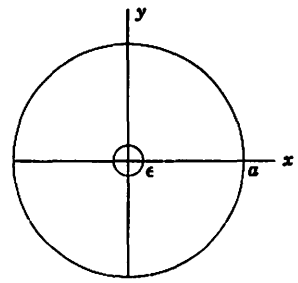
Quizá los cambios de variables más comunes son la introducción de coordenadas polares en el plano y de coordenadas esféricas y cilíndricas en el espacio tres. Discutiremos las coordenadas polares en el plano dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ las que presentan dificultades típicas de las tres.

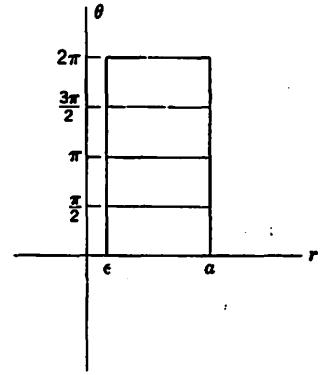
Existen dos dificultades principales con las cuales debe tratarse. La primera, y menos importante, proviene del hecho de que la transformación inversa dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{ang tan } y/x$ no es univaluada. Esto se maneja fácilmente dividiendo el plano en cuadrantes en los cuales es univaluada. (Una dificultad menor proviene del hecho de que ang tan y/x no está definida para $x = 0$. Sin embargo, entonces puede usarse una fórmula equivalente ang cot x/y.)

La dificultad principal proviene del hecho de que el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ se hace cero en el origen. Por las observaciones del párrafo anterior, es evidente que sólo necesitamos considerar la vecindad del origen. Así, sea f una función continua definida en D: $\{x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. Entonces evidentemente $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ existe. Ahora bien, f es acotada, digamos por M, de modo que si eliminamos de D una vecindad ϵ del origen se tiene

$$\left| \iint_{D} f\, dx\, dy - \iint_{D_\epsilon} f\, dx\, dy \right| < M\pi\epsilon^2,$$

donde D_ϵ es el anillo que se mantiene después de la eliminación. Si se divide este anillo en cuatro partes mediante los ejes, cada una de estas partes se mapea en una forma uno a uno sobre un rectángulo en el plano (r, θ). De donde se ve que el propio anillo se mapea sobre el rectángulo





R_ϵ: $\{\epsilon < r < a, 0 < \theta < 2\pi\}$. El mapeo es uno a uno excepto en que tanto la parte superior como la inferior del rectángulo se mapean sobre el mismo segmento del eje x. Así que

$$\iint_{D_\epsilon} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R_\epsilon} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

Ahora bien, si R es el rectángulo $\{0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, es evidente que la función definida por $rf(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ es integrable sobre R y

$$\left| \iint_{R} rf(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta - \iint_{R_\epsilon} rf(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta \right| < M\epsilon\pi\epsilon.$$

De donde, simbólicamente,

$$\left| \iint_{D} - \iint_{R} \right| < \left| \iint_{D} - \iint_{D_\epsilon} \right| + \left| \iint_{D_\epsilon} - \iint_{R} \right|$$

$$= \left| \iint_{D} - \iint_{D_\epsilon} \right| + \left| \iint_{R_\epsilon} - \iint_{R} \right| < 2M\pi\epsilon^2.$$

Supuesto que esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$\iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

EJERCICIOS A

1. Evaluar $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$ $\quad D: \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$. Hacer $x = au$, $y = bv$ y usar coordenadas polares.

2. Transformar la integral $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ D: $\{x^2 + y^2 < a^2\}$ como se indica y describir el nuevo dominio de integración:
(*a*) $x = u + 1, y = v - 2$ (*b*) $x = au + bv, y = cu + dv$

3. Sea f continuamente diferenciable sobre D: $\{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 1\}$. Transformar $\iint_D (f_x^2 + f_y^2)\,dx\,dy$ por $x = u/(u^2 + v^2)$, $y = v/(u^2 + v^2)$.

4. Encontrar el volumen abajo de $z = x$ y arriba de $z = x^2 + y^2$
(*a*) por coordenadas rectangulares; (*b*) por coordenadas cilíndricas.

5. Calcular $\iint_R \exp\left(\frac{x - y}{x + y}\right) dx\,dy$, donde R es el triángulo acotado por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Hacer la sustitución $u = x + y$, $v = x - y$.

6. Sea R el triángulo acotado por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Hacer la sustitución $x + y = u$, $y = uv$ y demostrar que $\iint_R e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy$ puede reducirse al producto de dos integrales sencillas.

EJERCICIOS B

1. Sea f continua en D: $\{x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$. Demostrar que

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f(r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi,\ r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi,\ r\cos\phi)r^2\,\text{sen}\,dr\,d\theta\,d\phi,$$

donde R es el rectángulo $\{0 < r < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$.

2. Encontrar el valor de $\iint_R \{(x - y)^2 + 2(x + y) + 1\}^{-1/2}\,dx\,dy$, sustituyendo $x = u(1 + v)$ y $y = v(1 + u)$, donde R es el triángulo acotado por $x = 0$, $x = 2$ y $x = y$.

3. Transformar $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ R: $\{|x|^{2/3} + |y|^{2/3} < a^{2/3}\}$ por $x = r\cos^3\theta$, $y = r\,\text{sen}^3\,\theta$.

parte III

TEORIA DE LA CONVERGENCIA

14

Series infinitas

14.1 CONVERGENCIA, ABSOLUTA Y CONDICIONAL

De aquí en adelante discutiremos las series infinitas y algunos tópicos relacionados con las mismas. Empezaremos con las definiciones.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números. Entonces la suma formal

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

o bien $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

se llama **serie infinita.** Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ son sus **términos** y los números $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sus **sumas parciales.**

Si $\lim S_n$ existe, su valor S se llama **suma de la serie.** En este caso se dice que la serie **converge** y se escribe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Si $\lim S_n$ no existe, se dice que la serie **diverge.**

Una serie puede empezar con el primero, segundo u otros términos, como por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=2}^{\infty} a_n, \ldots$. En ocasiones éstas se escribirán $\sum_{1}^{\infty} a_n, \sum_{2}^{\infty} a_n, \ldots$, y, donde no exista peligro de ambigüedad, simplemente se escribirá Σa_n.

EJEMPLO 1. Probar que $\sum_{0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$.

Solución:

Puesto que la convergencia se define en términos de sumas parciales, examinemos

$$S_n = 1 + x + \cdots + x^n = \sum_{0}^{n} x^k.$$

Del álgebra, tenemos que

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Y de nuestro estudio acerca de los límites, sabemos que $x^{n+1} \to 0$ si $|x| < 1$. De aquí que

$$\lim S = \frac{1}{1 - x}.$$

También es evidente que si $|x| \geqslant 1$, la serie diverge.

Nuestro segundo ejemplo ilustra una técnica útil en ciertas series sencillas.

EJEMPLO 2. Probar que $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ converge y encontrar su suma.

Solución:

Descompongamos $\frac{1}{n(n+1)}$ por fracciones parciales:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Así $S_n = \sum_1^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_1^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

A partir de esta expresión es evidente que

$$S = \lim S_n = 1.$$

Nuestro primer teorema sobre series establece lo que es realmente una prueba de divergencia.

14.1a Teorema. Supóngase que Σa_n converge. Entonces $\lim a_n = 0$.

Demostración. Nótese primero que si $\lim S_n = S$, entonces $\lim S_{n-1} = S$. Ahora bien, $a_n = S_n - S_{n-1}$, de modo que

$$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Esto no dice que si $\lim a_n = 0$, entonces Σa_n converge. Verdaderamente esto no es correcto, como se verá posteriormente. Dice que la convergencia de Σa_n implica $a_n \to 0$. De aquí que si a_n no tiende hacia cero, la serie no puede converger. Por lo tanto, en una serie dada Σa_n, podemos examinar $\lim a_n$. Si $\lim a_n = 0$ no se obtiene información acerca de la convergencia o de la divergencia; pero si $\lim a_n \neq 0$, ya sea porque no existe o porque existe y tiene otro valor, entonces Σa_n diverge.

EJEMPLO 3. Examinar $\sum_1^\infty \frac{n^n}{n!}$.

Solución:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n}{2}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) > 1.$$

De aquí que $\lim n^n/n! \neq 0$ y la serie diverge.

Puesto que la convergencia de una serie se define en términos de la convergencia de la sucesión de sumas parciales, cualquier información acerca de la convergencia de las sucesiones es útil en la discusión de las series. A este respecto es de particular importancia el criterio de Cauchy, el cual toma la siguiente forma.

14.1b Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una serie Σa_n converja es que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon)$ para el cual

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon \qquad \text{si } m > n > N.$$

Demostración. Aplicar el criterio de Cauchy para las sucesiones a la sucesión de sumas parciales. $\blacksquare$

La condición ϵ anterior en ocasiones se escribe

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \qquad \text{si } n > N,\ p \geqslant 1.$$

Esta expresión se obtiene haciendo $p = m - n$.

EJEMPLO 4. Examinar $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}$. (Comparar con la Sección 2.6.)

Solución. Se observa que

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces $\left|\sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k!}\right| = \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} < \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right]$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1 - (1/2)^p}{1 - 1/2} < \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1/2)^n$$

Ahora se sabe (Teorema 2.2a) que $(1/2)^n \to 0$. De aquí que para cada $\epsilon > 0$ existe un N para el cual

$$2(1/2)^n < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Por lo tanto $\left|\sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k!}\right| < \epsilon \qquad \text{si } n > N,\ p \geqslant 1,$

y, por el criterio de Cauchy, la serie converge.

En ocasiones sucede que una serie Σa_n converge mientras que la serie $\Sigma|a_n|$ diverge. En este caso se dice que la serie Σa_n **converge condicionalmente.** Cuando la serie $\Sigma|a_n|$ converge se dice que la serie Σa_n **converge absolutamente.** Un importante hecho acerca de las series absolutamente convergentes es que también son convergentes.

14.1c Teorema. Si $\Sigma|a_n|$ converge, Σa_n también converge.

Demostración. La desigualdad básica implicada en la demostración es la siguiente:

$$(1) \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

Hacemos una doble aplicación del criterio de Cauchy, aplicando tanto la necesidad como la suficiencia. Ahora bien, $\Sigma|a_n|$ converge. De manera que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ para el cual

$$(2) \quad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon \quad \text{si } n > N, p \geq 1,$$

siendo esto cierto por la parte de necesidad del criterio. Pero (1) y (2) implican

$$(3) \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \text{si } n > N, p \geq 1.$$

Entonces, por la parte de suficiencia del criterio, (3) implica que Σa_n converge. ∎

EJEMPLO 5. Examinar $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Solución. Hemos visto en el Ejemplo 2 que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

De aquí que, por el Teorema 14.1c, la serie dada también converge.

EJERCICIOS A

1. Sumar las series siguientes:
   (*a*) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$ (*b*) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (*c*) $\sum_{2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$
2. Examinar $\sum(-1)^n n!/n^n$ en relación con la convergencia absoluta.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que si Σa_n converge absolutamente y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces $\Sigma a_n b_n$ converge absolutamente.
2. Demostrar que si Σa_n converge a una suma S, entonces para cualquier c, la serie $\Sigma c a_n$ converge a cS.
3. Demostrar que si Σa_n es convergente, cualquier serie formada agrupando los términos arbitrariamente, tal como $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2}) + (\cdots) \cdots$ también es convergente.

14.2 SERIES CON TERMINOS NO NEGATIVOS: PRUEBAS DE COMPARACION

Una de las consecuencias significativas del último teorema es que, para muchos propósitos, es suficiente estudiar series con términos no negativos. En consecuencia, a continuación enfocaremos nuestra atención sobre un conjunto de teoremas acerca de tales series. Conforme el estudiante avance en esta sección debe mantener en mente que todas las pruebas dadas aquí pueden aplicarse para examinar, en relación con la convergencia absoluta, a series con signos variables.

14.2a Teorema. Si Σa_n tiene términos no negativos, converge si, y solamente si, la sucesión de sumas parciales es acotada.

Demostración. La sucesión de sumas parciales es no decreciente y de aquí que tiene un límite si, y solamente si, es acotada. ∎

EJEMPLO 1. Demostrar que la serie k, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, converge si $k > 1$ y diverge si $k \leq 1$. Esta serie es útil para las pruebas de comparación.

Solución:

(*a*) Supóngase que $k > 1$. Demostraremos que $\sum \frac{1}{n^k}$ converge. Examinemos las sumas parciales de orden $2^n - 1$:

$$S_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{7^k}\right) + \left(\frac{1}{8^k} + \cdots + \frac{1}{15^k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^k}\right)$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{4^k}\right) + \left(\frac{1}{8^k} + \cdots + \frac{1}{8^k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^k}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{(2^{k-1})^2} + \frac{1}{(2^{k-1})^3} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^{k-1}}$$

$$= \frac{1 - [1/(2^{k-1})^n]}{1 - (1/2^{k-1})} \frac{1}{1 - (1/2^{k-1})} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1} = \text{constante.}$$

Ahora bien, para todo entero m, existe un n para el cual $2^n - 1 > m$. De modo que también

$$S_m < S_{2^n-1} < \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1}.$$

De aquí que todas las sumas parciales son acotadas y, por lo tanto, la serie converge.

(*b*) Supóngase que $k \leqslant 1$. Ahora se demostrará que $\sum_1^\infty \frac{1}{n^k}$ diverge. Primero observemos que $n^k \leqslant n$, puesto que $k \leqslant 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \left(\frac{1}{5^k} + \cdots + \frac{1}{8^k}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^k} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^k}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

De aquí que las sumas parciales son no acotadas y, por lo tanto, la serie diverge.

Cuando $k = 1$, la serie se transforma en

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{k}.$$

Esta serie se llama **serie armónica,** la cual diverge, como se demostró en el ejemplo anterior.

A continuación trataremos un grupo de pruebas de comparación. Estas son pruebas en las cuales el conocimiento del comportamiento de una serie (a saber, su convergencia o divergencia) puede aplicarse para estudiar el comportamiento de otra, en el supuesto de que los términos de las dos series se relacionan apropiadamente. La naturaleza precisa de estas relaciones se hace evidente en las proposiciones de los siguientes teoremas. El más común de estos teoremas se llama **prueba de comparación.**

14.2b Teorema. Supóngase que Σa_n y Σb_n son dos series con términos no negativos y que existe un N tal que $a_n \leqslant b_n$ si $n > N$. Entonces
(i) si Σb_n converge, Σa_n converge;
(ii) si Σa_n diverge, Σb_n diverge.

Demostración. La desigualdad básica es

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+p} \leqslant b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_{N+p}$$

o bien

$$S_{N+p} - S_N \leqslant S'_{N+p} - S'_N,$$

donde la S_n se refiere a Σa_n y S_n' a Σb_n. El resultado se deduce inmediatamente basándose en el teorema anterior. ∎

EJEMPLO 2. Examinar $\sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Solución:

$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2},$$

de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}.$$

De aquí que $\sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ diverge por comparación con la serie armónica.

El siguiente teorema se llama **forma límite de la prueba de comparación.**

14.2c Teorema. Si Σa_n y Σb_n tienen términos positivos y si

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

entonces ambas series divergen o bien ambas series convergen.

Demostración. Supuesto que $\lim a_n/b_n = A$ existe, se tiene un N tal que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \frac{A}{2} \quad \text{si } n > N.$$

Entonces

$$-\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} - A < \frac{A}{2}$$

o bien

$$\tfrac{1}{2}A < \frac{a_n}{b_n} < \tfrac{3}{2}A < 2A,$$

de manera que

$$b_n < \left(\frac{2}{A}\right)a_n, \qquad a_n < (2A)b_n \quad \text{si } n > N.$$

De aquí se concluye el resultado buscado basándose en la prueba de comparación anterior. ∎

EJEMPLO 3. Examinar $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2 + 1/n}} \to \frac{1}{2}.$$

De aquí que la serie diverge por comparación con la serie armónica en la forma límite de la prueba de comparación.

La siguiente prueba, llamada **prueba de la integral,** también es una prueba del tipo de comparación, pero en este caso la comparación se realiza entre una integral y una serie, en lugar de entre dos series.

14.2d Teorema. Sea Σa_n una serie de términos positivos no crecientes. Sea $f(x)$ una función no creciente definida para $n \geqslant N$, para la cual

$$f(n) = a_n \qquad n > N.$$

Entonces la serie Σa_n y la integral $\int_N^\infty f(x)\,dx$ ambas convergen o ambas divergen.

Demostración. Para $k \geqslant N$, en el intervalo $k \leqslant x \leqslant k+1$, se tiene

$$a_k = f(k) > f(x) > f(k+1) = a_{k+1}.$$

Integrando desde k hasta $k+1$,

$$a_k > \int_k^{k+1} f(x)\,dx > a_{k+1}.$$

Entonces se tiene tanto

$$\sum_N^{n-1} a_k > \int_N^n f(x)\,dx. \tag{1}$$

como

$$\int_N^n f(x)\,dx > \sum_N^{n-1} a_{k+1} = \sum_{N+1}^n a_k. \tag{2}$$

En términos de las sumas parciales, la desigualdad (1) afirma que

$$S_{n-1} - S_{N-1} > \int_N^n f(x)\,dx.$$

Pero si la serie converge a una suma S, entonces $S > S_{n-1}$, de modo que

$$S - S_{N-1} > \int_N^n f(x)\,dx.$$

Puesto que el segundo miembro es una sucesión acotada creciente, la integral converge.

Si la integral converge entonces la desigualdad (2) implica que

$$\int_N^\infty f(x)\,dx > \int_N^n f(x)\,dx > S_{n+1} - S_N,$$

o bien

$$S_{n+1} < A + S_N.$$

De aquí que las sumas parciales son acotadas y la serie converge. ∎

Nuestro símbolo indica que se ha completado la demostración. Pero no hemos discutido el caso en donde la serie y la integral son divergentes. ¿Por qué no es necesario considerarlo? (Ver Ejercicio B3.)

EJEMPLO 4. (*a*) Reexaminemos la serie k

$$\sum 1/n^k \qquad k > 1.$$

Solución. Escójase $f(x) = 1/x^k$ y considérese

$$\int_1^n \frac{dx}{x^k} = \int_1^n x^{-k}\,dx = \frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_1^n$$

$$= \frac{n^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}$$

$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}.$$

Ahora bien $k - 1 > 0$; de aquí que

$$\frac{1}{n^{k-1}} \to 0 \qquad \text{conforme } n \to \infty.$$

Por tanto la integral converge y, en consecuencia, la serie converge.

(*b*) Reexaminemos la serie k

$$\sum 1/n^k \qquad k < 1.$$

Solución. Hagamos los mismos cálculos que en el caso anterior y obtengamos

$$\int_1^n \frac{dx}{x^k} = \frac{n^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}.$$

Pero en este caso $1 - k > 0$, de manera que

$$n^{1-k} \to +\infty \qquad \text{conforme } n \to \infty.$$

Por lo tanto la integral y, en consecuencia la serie, divergen.

La serie armónica, correspondiente al caso $k = 1$, debe tratarse separadamente. Los detalles se dejan como ejercicio.

EJERCICIOS A

1. Aplicar la prueba de la integral para demostrar que la serie armónica diverge.

2. Examinar Σa_n respecto a la convergencia absoluta si a_n es

(*a*) $\dfrac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$ (*b*) $(-1)^n\left[\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right]$ (*c*) $\dfrac{(-1)^n n^{(-1)^n}}{n}$

(*d*) $\dfrac{n\cos(n\pi/2)}{\sqrt{n^4+n^3-2}}$ (*e*) $\dfrac{(-1)^n \log n}{n}$ (*f*) $\dfrac{3^n}{n}$

(*g*) $\dfrac{\operatorname{sen} n}{n^2+1}$ (*h*) $\dfrac{3^n+2n}{4^n+5}$ (*i*) $\dfrac{n}{n^2+2n+1}$

(j) $\dfrac{(-1)^n}{n \log n}$ (k) $\dfrac{(-1)^n}{n (\log n)^2}$ (l) $\dfrac{(-1)^n}{\log n}$

(m) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + - \cdots .$

3. ¿Para qué valores de x converge $\dfrac{x}{x+1} - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3 - + \cdots$, y cuál es su suma?

EJERCICIOS B

1. Establecer la prueba del polinomio: si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios en n y $Q(n) \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $\sum_1^\infty \dfrac{Q(n)}{Q(n)}$ converge si, y solamente si, el grado de Q excede al de P en 2 o más.
2. ¿Para qué valores de x converge Σe^{-n^x}?
3. En la demostración de la prueba de la integral ¿por qué no es necesario considerar el caso en el cual la serie o la integral diverge?
4. Examinar $\Sigma \operatorname{sen}\{\pi(n + 1/n\}$ y $\Sigma \operatorname{sen}^2 \left\{\pi\left((n + \dfrac{1}{n}\right)\right\}$ respecto a la convergencia absoluta.
5. ¿Para qué valores de k converge $\sum_2^\infty \dfrac{1}{n (\log n)^k}$?
6. ¿Para qué valores de x converge $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{x^n}{x^{2n} - 1}$?

EJERCICIOS C

1. Supóngase que $a_n \geqslant 0$ y la sucesión $\{a_n\}$ es no creciente y Σa_n converge. Demostrar que $na_n \to 0$.
2. Sabemos que la serie armónica diverge, es decir, $H_n \to +\infty$ si $H_n = \sum_1^n \dfrac{1}{k}$. Demostrar que H_n crece análogamente a $\log n$. En particular, demostrar que $0 \leqslant H_n - \log n \leqslant 1$. Demostrar además que $H_n - \log n$ es una sucesión no creciente y de aquí que tiene un límite. (El valor de este límite es aproximadamente .577. Se conoce como constante de Euler-Mascheroni y se denota por γ. No se sabe si γ es racional o irracional.)
3. Demostrar que si a y b son dos números positivos cualesquiera tales que $a \geqslant b$, entonces

$$H_{[na]} - H_{[nb]} \to \log \frac{a}{b}.$$

(Ver el Ejercicio 2 anterior.)

4. Supóngase que Σa_n y Σb_n tienen términos positivos y supóngase que $b_{n+1}/b_n \leqslant a_{n+1}/a_n$. Demostrar que Σb_n converge si Σa_n converge.

5. Extender la forma límite de la prueba de la razón a los siguientes casos:
   (a) Si existen tres constantes positivas a, A y N tales que $a \leqslant a_n/b_n \leqslant A$ cuando $n > N$, entonces Σa_n y Σb_n ambas divergen o ambas convergen.
   (b) Si $a_n/b_n \to 0$ y Σb_n converge, entonces Σa_n también converge.
   (c) Si $a_n/b_n \to \infty$ y Σb_n diverge, entonces Σa_n también diverge.
6. Supóngase que se tiene una provisión inagotable de tarjetas rectangulares uniformes. Demostrar que, dada cualquier distancia d, puede amontonarse un número finito de estas tarjetas sobre una mesa de manera que la arista exterior de la tarjeta más alta se proyecte una distancia d más allá del borde de la mesa.

14.3 SERIES CON TERMINOS NO NEGATIVOS: PRUEBAS DE LA RAZON Y DE LA RAIZ. RESTOS

A continuación consideraremos una prueba que todavía es parcialmente una prueba de comparación pero que lleva el nombre de **prueba de la raíz de Cauchy.**

14.3a Teorema. Sea Σa_n una serie de términos no negativos.
(i) Si existe un $r < 1$ y un N tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < r \quad \text{para } n > N,$$

entonces Σa_n converge.
(ii) Si existe una cantidad infinita de números n para los cuales

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

entonces Σa_n diverge.

Demostración:

(i) Para todo $n > N$, se tiene $\sqrt[n]{a_n} < r$ o bien $a_n \leqslant r^n$. Entonces la serie converge, por comparación con la progresión geométrica.

(ii) Para una cantidad infinita de números se tiene $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. Por tanto, $a_n \geqslant 1$ para una cantidad infinita de números n y, en consecuencia $\lim a_n \neq 0$. ∎

Otra forma, ligeramente más débil, de la prueba de la raíz se da mediante el siguiente teorema.

14.3b Teorema. Sea Σa_n una serie de términos no negativos. Defínase ρ por

$$\rho = \limsup \sqrt[n]{a_n}.$$

(i) Si $\rho < 1$, Σa_n converge.
(ii) Si $\rho < 1$, Σa_n diverge.
(iii) Si $\rho = 1$, la prueba no es aplicable. (Es decir, algunas series para las cuales $\rho = 1$ divergen y otras convergen.)

Demostración:

(i) De acuerdo con la definición de límite superior (ver Sección 6.3), si $\rho < 1$, existe un N tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{\rho + 1}{2} < 1 \qquad \text{si } n > N,$$

y entonces Σa_n converge por la parte (1) del Teorema 14.3a.

(ii) Una vez más por la definición, si $\rho > 1$ existe una subsucesión a_{n_k} tal que $(a_{n_k})^{1/n_k} \to \rho$. Entonces, si k es lo suficientemente grande $(a_{n_k})^{1/n_k} > 1$, y Σa_n diverge por la parte (2) del Teorema 14.3a.

(iii) Ver Ejercicio B2. ∎

Por supuesto que si $\lim \sqrt[n]{a_n}$ existe, entonces $\sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$ y el teorema anterior es aplicable.

A menudo es importante saber qué tan aproximadas a la suma son las sumas parciales de una serie convergente. Podemos estimar la diferencia entre estas dos en el caso convergente del Teorema 14.3a.

14.3c Corolario. En el caso (1) del Teorema 14.3a se tiene

$$0 < S - S_n < \frac{r^{n+1}}{1 - r} \text{ para todo } n > N.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} S - S_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k &< \sum_{n+1}^{\infty} r^k \\ &= r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots \\ &= r^{n+1}[1 + r + r^2 + \cdots] \\ &= r^{n+1}/(1 - r). \end{aligned}$$

∎

EJEMPLO 1. Probar que $\sum_1^{\infty} [n/(n+1)]^{n^2}$ converge y estimar el error al usar S_n como una aproximación para S.

Solución. Apliquemos el Teorema 14.3a y el Corolario 14.3b

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n}.$$

Pero $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

De aquí que $$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} < \frac{1}{2}$$

o bien $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ahora que se tiene la convergencia por la prueba de la raíz, apliquemos el corolario para obtener

$$S - S_n < \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}.$$

El siguiente teorema se conoce como **prueba de la razón.**

14.3d Teorema. Sea Σa_n una serie de términos positivos para la cual $\lim a_{n+1}/a_n = q$ existe. Entonces:
(i) Σa_n converge si $q < 1$.
(ii) Σa_n diverge si $q > 1$.
Si $q = 1$ la prueba falla.

Demostración:

(i) Definir $r = \frac{1}{2}(1 + q)$ de modo que $q < r < 1$. Ahora existe un N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \qquad \text{si } n > N. \qquad (\text{¿Por qué?})$$

Entonces

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N < r \cdot r \cdots r \cdot a_N = r^{k-N} a_N.$$

De aquí que la serie converge, por comparación con la progresión geométrica con $r < 1$.

(ii) Definir $r = \frac{1}{2}(1 + q)$ de modo que $q > r > 1$. Ahora existe un N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r \qquad \text{si } n > N.$$

Entonces $\{a_n\}$ es una sucesión creciente para $n > N$. Por lo tanto $\lim a_n \neq 0$. ∎

Una vez más podemos estimar el resto —esto es, la diferencia $S - S_n$.

14.3e Corolario. En el caso (1) del Teorema 14.3d,

$$0 < S - S_n < \frac{a_N r^{n-N}}{1 - r} \qquad \text{si } n > N.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} S - S_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \\ &< a_N r^{n-N} + a_N r^{n-N+1} + \cdots \\ &= a_N r^{n-N}(1 + r + \cdots) \\ &= a_N r^{n-N}/(1 - r). \end{aligned}$$

∎

EJEMPLO 2. Probar que $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n n}{2^n}$ es absolutamente convergente y estimar el resto.

Solución. Estudiemos la serie $\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^n n}{2^n}\right| = \sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$.
Por la prueba de la razón

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0.6 \qquad \text{si } n > 5.$$

Por lo tanto, la serie es absolutamente convergente.

Sea S su suma. Entonces

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= \left|\sum_{n+1}^\infty \frac{(-1)^k k}{2^k}\right| \\ &< \sum_{n+1}^\infty \frac{k}{2^k} \\ &< \frac{|a_5|(0.6)^{n-5}}{0.4} \\ &= \frac{5}{2^5}\frac{(0.6)^{n-5}}{0.4} \\ &= \frac{25}{64}(0.6)^{n-5}. \end{aligned}$$

14.4 SERIES CON SIGNOS VARIABLES

Todo lo precedente sirve para establecer la convergencia absoluta de las series con signos variables. Pero para las series que son condicionalmente convergentes —y existen muchas de ellas— estas pruebas no revelarán su convergencia. De hecho, las únicas pruebas apropiadas que se tienen hasta el momento para tales series son la propia definición y el criterio de Cauchy, las cuales con frecuencia son difíciles de aplicar directamente. A continuación daremos el teorema más sencillo para trabajar con tales series. Se llama **prueba de las series alternantes.**

14.4a Teorema. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos decreciente monotónicamente hacia cero. Entonces $\Sigma(-1)^n b_n$ converge y

$$|S - S_n| < b_{n+1}.$$

Demostración. Examinemos las sumas parciales impares. Evidentemente

$$S_{2n-1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{2n-2} - b_{2n-1})$$

y

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (b_{2n} - b_{2n+1}) > S_{2n-1}.$$

Por lo tanto, las sumas impares forman una sucesión no decreciente. Además son acotadas:

$S_{2n-1} = b_0 - (b_1 - b_2) - \cdots - (b_{2n-3} - b_{2n-2}) - b_{2n-1} < b_0$. (¿Por qué?)

De aquí que $\lim S_{2n-1} = S$ existe.

Ahora bien $\qquad S_{2n} = S_{2n-1} + b_{2n}$,

de manera que $\qquad \lim S_{2n} = \lim S_{2n-1} + \lim b_{2n} = S$.

Puesto que tanto las sumas parciales pares como las impares convergen al mismo límite, la serie debe converger hacia S como su suma.

Para obtener la estimación, nótese que

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= |b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} \cdots| \\ &= (b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+3} - b_{n+4}) + \cdots \end{aligned}$$

la cual es positiva puesto que cada paréntesis es positivo. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - + \cdots \\ &= b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - (\quad) \cdots \\ &< b_{n+1}. \end{aligned}$$

Un ejemplo importante es la serie armónica alternante

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \cdots,$$

la cual evidentemente satisface las condiciones y, en consecuencia, converge. Su suma es log 2 pero esto no puede probarse sino hasta más tarde. En general, la serie k alternante es convergente si $k > 0$.

Para otras dos pruebas, a saber la de Dirichlet y la de Abel, véase el siguiente capítulo, donde se discuten estas pruebas en relación con la convergencia uniforme de series de funciones. El caso especial de funciones constantes conduce a una prueba para la convergencia de las series de constantes.

EJERCICIOS A

1. Examinar Σa_n para la convergencia y la convergencia absoluta, donde a_n es

(a) $\frac{(-1)^n}{2n}$ (b) $\frac{(-1)^n}{\log n}$ (c) $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(d) $\frac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$ (e) $\frac{(-1)^n \log n}{n}$ (f) $\frac{(-1)^n n}{n^2 - 5n + 1}$

(g) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1/n}}$ (h) $\operatorname{sen}\left\{\pi\left(n + \frac{1}{n}\right)\right\}$ (i) $n^k e^{-nx}$

(j) $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (k) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (l) $\frac{1}{x^n - y^n}$ $\quad x > y > 0$

2. En 1 (b), (c), (e) y (g), ¿cuántos términos deben tomarse para estar seguros de que el resto es menor que 10^{-10}?

3. Determinar para qué valores de x convergen las siguientes series:

$(a)\ \sum_1^\infty nx^n$ $\quad (b)\ \sum_1^\infty n^k x^n$ $\quad (c)\ \sum_1^\infty \frac{1}{x^n-1}$

$(d)\ \sum_1^\infty n^n x^n$ $\quad (e)\ \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$

4. En 3 (a), (b) y (e) dar una fórmula para el resto después del N-ésimo término.

5. Examinar Σa_n para la convergencia o divergencia donde a_n es

$(a)\ \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ $\quad (b)\ \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$

$(c)\ \frac{n!}{3^n}$ $\quad (d)\ \frac{3^n}{n!}$ $\quad (e)\ \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{4\cdot 7\cdots(3n+1)}$

$(f)\ \frac{n^{n^2}}{(n+1)n^2}$ $\quad (g)\ \frac{(n+1)^n}{(3n)^n}$

6. Estimar los restos en 5 (a), (d) y (e) después de 100 términos.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que si Σa_k converge y $a_k \geqslant 0$, entonces Σa_k^2 converge. Dar un ejemplo mostrando que la condición $a_k \geqslant 0$ no puede omitirse.
2. Dar ejemplos para probar la parte (3) del Teorema 14.3b.
3. (a) Demostrar que si $a_n > 0$ y si existe un N tal que $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ para todo $n > N$, entonces Σa_n diverge.

   (b) Si existe un N y un q, $0 < q < 1$ tal que $a_{n+1}/a_n \leqslant q$ para todo $n > N$, entonces Σa_n converge.

   (c) Dar ejemplos para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ no permite afirmar algo acerca de la convergencia o divergencia de la serie, es decir, bajo esta condición Σa_n puede converger o divergir.

EJERCICIOS C

1. Supóngase que Σa_n es una serie de términos positivos. Demostrar que

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < \liminf \sqrt[n]{a_n} < \limsup \sqrt[n]{a_n} < \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2. Probar que si Σa_n^2 y Σb_n^2 convergen, entonces $\Sigma a_n b_n$ y $\Sigma(a_n+b_n)^2$, también convergen.
3. Probar que si Σa_n^2 y Σb_n^2 convergen, entonces $|\Sigma a_n b_n| < \frac{1}{2}(\Sigma a_k^2 + \Sigma b_k^2)$.
4. Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para las series infinitas: Si Σa_n^2 y Σb_n^2 convergen, entonces $(\Sigma a_n b_n)^2 \leqslant (\Sigma a_n^2)(\Sigma b_n^2)$ y la igualdad se cumple si, y solamente si, $a_n = k b_n$.
5. Probar la desigualdad del "triángulo" para las series infinitas: si Σa_n^2 y Σb_n^2 convergen, entonces $\sqrt{\Sigma(a_n+b_n)^2} < \sqrt{\Sigma a_n^2} + \sqrt{\Sigma b_n^2}$, y la igualdad se cumple si, y solamente si, $a_n = k b_n$, donde $k \geqslant 0$.

14.5 PRUEBAS MAS DELICADAS

En esta sección se reúnen algunas pruebas de convergencia proyectadas principalmente para estudiar series para las cuales falla la prueba de la razón —es decir, series para las cuales $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. Empecemos con la **prueba de Kummer.**

14.5a Teorema. Sea Σa_n una serie de términos positivos.
(i) Si existe una sucesión positiva $\{b_n\}$, una constante positiva α y un N para el cual

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \geqslant \alpha \text{ para todo } n \geqslant N,$$

entonces Σa_n converge.
(ii) Si $c_n \leqslant 0$ para todo $n \geqslant N$, entonces Σa_n diverge si $\Sigma 1/b_n$ diverge.
Una forma alternativa de la conclusión es
(i) Σa_n es convergente si $\liminf c_n > 0$.
(ii) Σa_n es divergente si $\limsup c_n < 0$ y $\Sigma 1/b_n$ es divergente.

Demostración:
(i) Supuesto que $a_{n+1} > 0$,

$$b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1} \geqslant \alpha a_{n+1} \quad \text{si } n \geqslant N,$$

de modo que

$$\begin{aligned} b_N a_N - b_{N+1}a_{N+1} &\geqslant \alpha a_{N+1} \\ b_{N+1}a_{N+1} - b_{N+2}a_{N+2} &\geqslant \alpha a_{N+2} \\ &\cdots \\ b_{N+p-1}a_{N+p-1} - b_{N+p}a_{N+p} &\geqslant \alpha a_{N+p}. \end{aligned}$$

Sumando se obtiene

$$b_N a_N - b_{N+p}a_{N+p} \geqslant \alpha(a_{N+1} + \cdots + a_{N+p}).$$

Es decir,

$$S_{N+p} - S_N < \frac{1}{\alpha}(b_N a_N - b_{N+p}a_{N+p}) < \frac{1}{\alpha} b_N a_N$$

o bien

$$S_{N+p} < S_N + \frac{1}{\alpha} b_N a_N.$$

Por lo tanto, las sumas parciales son acotadas y de aquí que la serie converge.

(ii) Si la condición de la parte (ii) del teorema se satisface entonces

$$b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1} < 0 \quad \text{para } n > N.$$

Así que $\{a_n b_n\}$ es una sucesión no decreciente. De aquí que

$$b_n a_n > b_{n-1}a_{n-1} > \cdots > b_N a_N \equiv k$$

o bien $$a_n > k/b_n,$$

y Σa_n diverge, por comparación con $\Sigma 1/b_n$. ∎

Con base en el teorema anterior se deduce inmediatamente la **prueba de Raabe.**

14.5b Teorema. Sea Σa_n una serie con términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$$

existe. Entonces

(i) Σa_n converge si $r > 1$.

(ii) Σa_n diverge si $r < 1$.

Y, por supuesto, la prueba no es concluyente si $r = 1$.

Demostración. La demostración de este teorema se deja como ejercicio. ∎

También, como una consecuencia de la prueba de Kummer, puede obtenerse la **prueba de Gauss.**

14.5c Teorema. Si Σa_n es una serie con términos positivos y si existe una sucesión acotada $\{A_n\}$ tal que para $n > N$,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{A_n}{n^2},$$

entonces

(i) Σa_n converge si $r > 1$.

(ii) Σa_n diverge si $r \leqslant 1$.

También esta demostración se deja como ejercicio.

EJEMPLO. Examinar la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \cdots.$$

Solución. Apliquemos la prueba de la razón:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1 + 1/2n}{1 + 1/n} \to 1.$$

La prueba de la razón falla, entonces apliquemos la prueba de Gauss:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2(2n+1)}.$$

Esto se encuentra en la forma en donde se aplica el teorema de Gauss con

$$r = 1/2,\ A_n = -\frac{n}{2(2n+1)}.$$

Puesto que $r < 1$ y $|An| \leqslant 1/4$, la serie diverge por la prueba de Gauss.

14.6 REARREGLOS

En aritmética el estudiante se familiarizó con la propiedad conmutativa de la adición, la cual establece que una suma es independiente del orden de los términos en la suma. Por ejemplo,

$$a + b + c + d = c + b + d + a = d + a + c + b = \ldots$$

Sin embargo, en las series infinitas la suma se define en una nueva forma, a saber como un límite. Se desea inquirir si, bajo esta definición extendida, se conserva la independencia del orden de los términos. Por ejemplo, rearreglemos los términos de la serie armónica alternante

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots$$

para obtener la nueva serie

$$\sigma = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - - + - - + \cdots,$$

donde se toman dos términos negativos en orden y a continuación uno positivo.

Inmediatamente surgen dos preguntas:

(1) ¿Converge la nueva serie?

(2) Si así es, ¿se tiene $\sigma = S$?

Denotemos las sumas parciales de S por S_n, las de σ por σ_n y examinemos las sumas parciales de σ de orden $3n$:

$$\sigma_{3n} = \sum_1^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4}\sum_1^n \frac{1}{k}.$$

Ahora bien, en la primera suma de nuestra última expresión, agrupemos los términos pares con signos negativos y sumémoslos otra vez:

$$\sigma_{3n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{4}\sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{1}{4}\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \tfrac{1}{2}S_{2n}$$

Entonces, conforme $n \to \infty$,

$$S_{2n} \to S,$$

de manera que $$\sigma_{3n} \to \tfrac{1}{2}S.$$

Pero cualquier suma parcial de σ difiere de una de tercer orden en dos términos cuando más, los cuales tienden hacia cero conforme $n \to \infty$. De aquí que $\sigma_n \to \frac{1}{2}S$.

Es decir, $\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - - + - \cdots$.

De donde es evidente que la suma puede depender del orden de los términos. A continuación probaremos dos teoremas que se refieren a este fenómeno.

Primero estableceremos una notación conveniente: Si Σa_k es una serie con signos variables, designaremos el primer positivo a por p_1, el siguiente por $p_2, \ldots$; el primer negativo por $-n_1$, el siguiente por $-n_2, \ldots$. Entonces cualquier suma parcial puede escribirse

$$\sum_{1}^{n} a_k = \sum_{1}^{m} p_k - \sum_{1}^{r} n_k \qquad m + r = n.$$

Nuestro primer teorema es el siguiente.

14.6a Teorema. Si Σa_k es condicionalmente convergente, entonces tanto Σp_k como Σn_k son divergentes.

Demostración. Supóngase que una de ellas fuera convergente. Para fijar ideas podemos decir que Σp_k es convergente y escribir

$$\sum^{r} n_k = \sum^{m} p_k - \sum^{n} a_k.$$

Puesto que ambas sumas de la derecha tienen límites, también lo tendrá la de la izquierda. De aquí que tanto Σn_k como Σp_k convergen.

$$\sum_{1}^{n} |a_k| = \sum_{1}^{m} p_k + \sum_{1}^{r} n_k.$$

Una vez más ambas sumas de la derecha tienen límites. De aquí que $\Sigma|a_k|$ converge.

Pero esto contradice nuestra hipótesis de que Σa_k es condicionalmente convergente. De aquí que tanto Σp_k como Σn_k deben divergir. ∎

Ahora estamos en posición de observar un fenómeno muy extraño de las series condicionalmente convergentes.

14.6b Teorema. Sea Σa_k una serie condicionalmente convergente y A cualquier número real. Entonces existe un rearreglo de Σa_k el cual converge a A.

Demostración. En lugar de dar una demostración rigurosa, esbozaremos el procedimiento y trataremos de hacer que el resultado sea razonable. Primero notemos que las series asociadas Σp_k y Σn_k ambas divergen a $+\infty$, dado que todos los términos en cada serie son positivos. El procedimiento es como sigue, suponiendo, para concretar, que $A > 0$:

(i) Fórmense las sumas parciales sucesivas de Σp_k hasta obtener la *primera* que sea mayor que A. Esto puede hacerse supuesto que $\sum^{m} p_k \to +\infty$.

(ii) Empiécese a restar las sumas parciales de Σn_k hasta obtener la *primera* que lleve la suma abajo de A.

(iii) Súmense más términos de Σp_k para llevar la suma precisamente arriba de A otra vez.

.
.
.

Para que el estudiante se convenza a sí mismo que este procedimiento produce una serie convergente, obsérvese que $a_k \to 0$, supuesto que Σa_k converge. De aquí que $p_k \to 0$ y $n_k \to 0$. Ahora bien, en cada punto de inversión en el procedimiento anterior, la suma difiere de A en menos que un p_k o un n_k. Conforme se continúa el procedimiento, estas diferencias tienden hacia cero. Todas las sumas parciales intermedias son más aproximadas que las de los puntos de inversión. De aquí que las sumas parciales en esta construcción tienden hacia A. ∎

14.6c Teorema. Si Σa_k es absolutamente convergente, Σp_k y Σn_k convergen.

Demostración. Supóngase que una diverge, digamos $\sum^{m} p_k \to +\infty$. Entonces

$$\sum^{r} n_k = -\sum^{n} a_k + \sum^{m} p_k.$$

Entonces, puesto que $\sum^{n} a_k$ converge conforme $n \to \infty$, se ve que también $\sum^{r} n_k \to +\infty$.

$$\sum^{n} |a_k| = \sum^{m} p_k + \sum^{r} n_k \to +\infty,$$

lo cual contradice la suposición de que $\sum^{n} |a_k|$ converge. ∎

Sin embargo, no todo es caos en el rearreglo de series, porque las absolutamente convergentes nos salvan.

14.6d Teorema. Si Σa_k es absolutamente convergente, entonces cualquier rearreglo también es absolutamente convergente y además todos los rearreglos de esta serie tienen la misma suma.

Demostración. Primero probaremos el teorema anterior para términos positivos. Sea Σb_k el rearreglo. Sean $S = \Sigma a_k$, $S_n = \sum^n a_k$ y $\sigma_n = \sum^n b_k$. Ahora bien, para cualquier σ_n, todas las *b*es que forman la suma parcial se encuentran como *á*es. De aquí que se encuentran, junto con algunos otros, en S de manera que

$$\sigma_n \leqslant S \qquad \text{para todo } n.$$

De aquí que, como $\{\sigma_n\}$ es una sucesión monótona,

$$\sigma_n \to \sigma \qquad \text{donde } \sigma \leqslant S.$$

Pero el argumento es simétrico; se aplica también cuando las *á*es y las *b*es se intercambian de manera que

$$\sigma \geqslant S.$$

De aquí que $\sigma = S$,

y la demostración se completa para las *á*es positivas.

Supóngase ahora que Σa_k tiene signos variables. Entonces

$$\Sigma a_k = \Sigma p_k - \Sigma n_k.$$

Cualquier rearreglo de las *á*es conduce a un rearreglo de las p y las *e*nes. Pero por la primera parte, estas sumas son independientes del orden. De aquí que la suma no cambia por el rearreglo.

EJERCICIOS A

1. Para qué valores de a y b convergerá

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} + \cdots$$

2. Examinar las siguientes series para la convergencia:

(*a*) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ (*b*) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+5}$

(*c*) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\frac{4n+3}{2n+2}$

3. Examinar $\displaystyle\sum_1^\infty \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^k$ para diferentes valores de k.

4. En el caso ambiguo del Ejercicio 3 anterior, aplicar la prueba de Kummer con $b_n = n \log n$.

5. Sea $S = \displaystyle\sum_1^\infty 1/k^2$. Demostrar que $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}S$ y $\displaystyle\sum_1^\infty (-1)^k/k^2 = -\frac{1}{2}S$.

EJERCICIOS B

1. (*a*) Probar el teorema de Raabe, aplicando la prueba de Kummer con $b_n = n$.
(*b*) Demostrar la prueba de Gauss.

2. Discutir la convergencia de la serie binomial

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para toda x y toda a.

3. Demostrar que

$$\{(1+\tfrac{1}{2})^2 - (1+\tfrac{1}{3})^2\} + \{(1+\tfrac{1}{4})^2 - (1+\tfrac{1}{5})^2\} + \cdots$$
$$+ \left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2\right\} + \cdots$$

converge pero que la serie formada eliminando los corchetes es divergente.

4. Dar argumentos semejantes a los usados en la demostración del Teorema 14.6b para demostrar que los términos de una serie condicionalmente convergente pueden rearreglarse de modo que las sumas parciales (*a*) tiendan a $+\infty$; (*b*) tiendan a $-\infty$; (*c*) oscilen acotadamente; (*d*) oscilen no acotadamente.

EJERCICIOS C

1. Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Demostrar que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, y de aquí deducir que $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$.

2. Rearreglar la serie armónica alternante para que converja hacia cero.

3. Demostrar que cualquier serie convergente de términos positivos puede rearreglarse de manera que los términos se presenten en orden decreciente.

4. Sea

$$S = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - + \cdots$$
$$\sigma = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + + - + + - \cdots.$$

Demostrar que $\sigma = \frac{3}{2}S$.

15

Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme

15.1 INTRODUCCION

En el capítulo sobre funciones elementales, comentamos acerca de la escasez de funciones que pueden escribirse. Existen polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas y funciones trascendentes elementales. Podemos formar composiciones de estas funciones y colocarlas juntas sobre intervalos colindantes.

Pero muchos otros tipos de funciones son importantes en el análisis. Para usarlas es necesario poder representarlas; es decir, necesitamos una representación para toda función que se desea aplicar y es necesario que esta representación sea adecuada para las operaciones del análisis. Una representación de ese tipo es por medio de una integral, tal y como se ha visto, especialmente en el caso de las funciones circulares y sus inversas. Otra representación posible, y es la que se desea estudiar aquí, es como una serie convergente de funciones, o lo que es lo mismo, como el límite de una sucesión de funciones. En general, los términos de la serie, o los de aproximación de la sucesión, se espera que sean funciones simples cuyas propiedades se supone que se conocen en parte. A partir de estas propiedades de los términos de la serie, esperamos deducir las propiedades de la función límite. Los dos tipos de series que acapararán nuestra máxima atención serán las series de potencias de x o bien de $x - c$, donde c es alguna constante apropiada:

$$\Sigma a_n(x - c)^n,$$

y las series de Fourier cuyos términos, senos y cosenos, son múltiplos de x:

$$a_0/2 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Salta a la vista que tales series son útiles, no sólo para escribir funciones que de otra manera no serían fácilmente representables, sino también como medios para investigar las propiedades de funciones conocidas.

En el presente capítulo no nos referiremos a series especiales como éstas, sino que obtendremos algunos resultados generales pertenecientes a las series cuyos términos pueden ser cualesquiera funciones razonables, donde la razonabilidad se clarificará conforme avance nuestra discusión.

15.2 CONVERGENCIA UNIFORME

Resultará evidente que una importante herramienta en el estudio de las series y sucesiones de funciones es el concepto de convergencia uniforme.

Para cada entero n, sea u_n una función definida en algún intervalo fijo I del eje x. El intervalo I puede ser abierto, cerrado, semiabierto, semiinfinito, infinito o como se desee. (De hecho, podemos tomar los dominios de nuestras funciones como conjuntos generales, pero para nuestros propósitos es suficiente con restringirnos a los intervalos.) En cada punto x_1 en I, los números $u_n(x_1)$ forman una sucesión $\{u_n(x_1)\}$ y podemos inquirir acerca de la convergencia de esta sucesión. Si para cada x en I la sucesión $\{u_n(x)\}$ converge, por supuesto que el límite generalmente dependerá del punto x. De aquí que el límite define una función que se denotará por u.

Estas observaciones se aplican con igual propiedad a una serie Σu_n. Examinemos simplemente la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_1^n u_k$. Si existe la suma S dependerá de x definiendo, en consecuencia, una función. En general, denotaremos el valor de esta suma en el punto x por $S(x)$.

Puesto que toda serie Σu_k genera una sucesión S_n de sumas parciales y toda sucesión S_n genera una serie de la cual es la suma parcial, a saber

$$u_1 = S_1,\ u_n = S_n - S_{n-1}\ n \geqslant 2,$$

generalmente restringiremos nuestras observaciones a las sucesiones. En el caso de series se entenderá que $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales.

Para que la sucesión $\{S_n\}$ converja a una función límite S en un intervalo I debe tenerse en cada x en I y para cada $\epsilon > 0$ un $N(\epsilon, x)$ para el cual

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N,$$

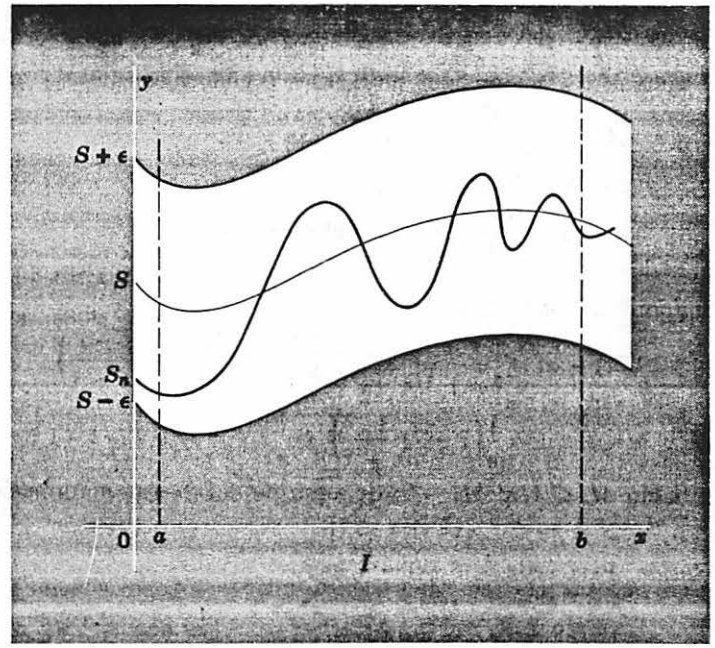
porque ésta es la definición de convergencia. Ahora bien, en dos x distintos, digamos x_1 y x_2 en I, en realidad estamos tratando con dos sucesiones distintas de números $\{S_n(x_1)\}$ y $\{S_n(x_2)\}$, de modo que ciertamente es de esperar que el índice N dependa de x. Por lo tanto, para obtener

$S_n(x)$ para que aproxime a $S(x)$ dentro de una tolerancia prescrita ϵ, puede ser necesario tomar n mayor en un punto que en el otro. Por supuesto que con sólo dos puntos x_1 y x_2 siempre puede tomarse n mayor que $N(\epsilon, x_1)$ y $N(\epsilon, x_2)$ y así hacer que $S_n(x)$ aproxime a $S(x)$ dentro de ϵ en ambos puntos. Pero si tratamos de lograr tal aproximación uniforme en todos los puntos de un intervalo se tienen mayores dificultades. Cuando esto es posible se dice que la sucesión **converge uniformemente** a S; o bien, si S_n es la suma parcial de una serie, se dice que la serie converge uniformemente. La presentación precisa de estos hechos es la siguiente.

Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones en un intervalo I. Se dice que $\{S_n\}$ **converge uniformemente** a S si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon, I)$, donde N es independiente del particular x en I, tal que

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N \text{ para todo } x \text{ en } I.$$

El significado geométrico de este hecho es muy sencillo. Si se traza la gráfica de $y = S(x)$ y se centra una banda de ancho vertical 2ϵ sobre esta curva entonces, para la convergencia uniforme, debe existir un N tal que para $n > N$ la gráfica de $y = S_n(x)$ se encuentra en todas partes dentro de esta banda. Evidentemente, la cantidad determinante es la diferencia máxima entre $S_n(x)$ y $S(x)$. Si ésta es $< \epsilon$, entonces la curva se encuentra en la banda 2ϵ. Esto conduce inmediatamente a las siguientes consideraciones.



Definamos la sucesión de constantes M_n por

$$M_n = \sup_I |S_n(x) - S(x)|.$$

15.2a Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $\{S_n\}$ converja uniformemente a S en I es que la sucesión M_n converja a cero.

Demostración. Suficiencia. Supóngase que $M_n \to 0$. Esto significa que para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ para el cual $0 \leqslant M_n < \epsilon$ si $n > N$. Pero supuesto que $|S_n(x) - S(x)| \leqslant M_n$ para toda x en I, se tiene

$$0 \leqslant |S_n(x) - S(x)| \leqslant \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Necesidad. Supóngase que $S_n \to S$ uniformemente. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$, independiente de x, para el cual

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Este ϵ es una cota superior para los números $|S_n(x) - S(x)|$. De aquí que la menor cota superior, a saber M_n, también es $\leqslant \epsilon$.

Esto es, $\qquad 0 \leqslant M_n \leqslant \epsilon \qquad$ si $n > N$.

Por tanto, $\qquad M_n \to 0.$ ∎

EJEMPLO 1. Sea $S_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} \qquad I\colon \{0 \leqslant x \leqslant \pi\}.$

Solución:

$$|S_n(x)| = |S_n(x) - 0| \leqslant M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Por lo tanto, $M_n \to 0$; y de aquí que $S_n(x) \to 0$ uniformemente.

EJEMPLO 2. Sea $S_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx} \qquad I\colon \{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$

Solución. Para cada x fijo, $S_n(x) \to x$,

$$S_n(x) = \frac{x^2}{x + 1/n} \to x \qquad \text{conforme } n \to \infty.$$

¿Es uniforme la convergencia?

$$|S_n(x) - x| = \left|\frac{x^2}{x + 1/n} - x\right| = \frac{x/n}{x + 1/n} = \frac{1}{n}\left(\frac{nx}{nx + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{nx + 1}\right) < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto $M_n \leqslant 1/n$, $M_n \to 0$; de aquí que $S_n(x) \to x$ uniformemente.

EJEMPLO 3. $S(x) = x^n \qquad \{0 \leqslant x < 1\}.$

Solución. Para cada x, $S_n(x) \to 0$, pero

$$M_n = \sup_{0 \leqslant x < 1} x^n = 1.$$

Puesto que M_n no converge hacia cero, la sucesión $\{S_n\}$ no converge uniformemente, aunque converge en cada punto.

Como podría esperarse después de lo que ocurre en tantos casos de convergencia, existe un criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.

15.2b Teorema. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones definida en un intervalo I. Para que la sucesión converja uniformemente en I, es necesario y suficiente que para cada $\epsilon > 0$ exista un $N(\epsilon)$ (independiente de x en I) para el cual

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N,\ m > N.$$

Demostración. La demostración se deja como un ejercicio (B1).

A continuación veremos una prueba para la convergencia uniforme de las series, conocida como **prueba M de Weierstrass.**

15.2c Teorema. Supóngase que $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones definida en un intervalo I y existe una sucesión de constantes positivas M_n con $|u_n(x)| \leqslant M_n$ para toda x en I y toda n. Si la serie ΣM_n converge, entonces la serie Σu_n converge uniformemente en I.

Demostración. Supuesto que ΣM_n converge, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ para el cual $\sum_{n+1}^{m} M_k < \epsilon$ si $n > N$. Entonces si $S_n(x) = \sum_{1}^{n} u_k(x)$, se tiene para toda x en I

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^{m} u_k(x)\right| < \sum_{n+1}^{m} |u_k(x)| < \sum_{n+1}^{m} M_n < \epsilon.$$

Dado el criterio de Cauchy, la serie converge uniformemente en I. ∎

EJERCICIOS A

1. Hágase $S_n(x) = 1/x + (1/n)$ sen $1/nx$ ¿$\{S_n\}$ converge uniformemente en $\{0 < x \leqslant 1\}$?

2. Demostrar que $\{x^n\}$ converge uniformemente en todo subintervalo cerrado de $\{-1 < x < 1\}$.

3. Discutir la convergencia, tanto puntual como uniforme de $\{nxe^{-nx^2}\}$ en:
   (*a*) $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ (*b*) $\{1 \leqslant x < \infty\}$

4. Determinar si $\left\{\dfrac{n^2x}{+ n^3x^2}\right\}$ converge (i) uniformemente (ii) puntualmente, en:
   (*a*) $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$ (*b*) $\{1 \leqslant x \leqslant 2\}$ (*c*) $\{x \geqslant 0\}$

5. Discutir la convergencia de $\left\{\dfrac{nx}{1 + n^2x^2}\right\}$ en:
   (*a*) $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$ (*b*) $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, donde $a > 0$.

6. Demostrar que $\sum_{0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente en $\{-a \leqslant x \leqslant a\}$ para toda a, $0 < a < 1$, pero no en $\{-1 < x < 1\}$.

7. Demostrar que $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente en todo intervalo $\{-a \leqslant x \leqslant a\}$, pero no en $\{-\infty < x < \infty\}$.

8. Discutir la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \cdot \frac{1}{n^2}$.

9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de constantes tales que Σa_n converge absolutamente. Demostrar que tanto Σa_n sen nx como Σa_n cos nx convergen uniformemente en $\{-\infty < x < \infty\}$.

10. Demostrar que si Σu_n converge uniformemente en un intervalo I, entonces la sucesión $\{u_n\}$ converge uniformemente hacia cero en I.

11. Discutir la convergencia de $\sum_0^\infty (x \log x)^n$ en $\{0 < x \leqslant 1\}$.

12. Sea $u_n(x) = a_n$ para toda x en I y todo n, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de constantes. ¿Qué significa que $\{u_n(x)\}$ converja uniformemente en I?

13. Discutir la convergencia, puntual y uniforme, para $\sum_0^\infty n^{75}e^{-nx}$ y $\sum_0^\infty nxe^{-nx}$ en $\{x > 0\}$.

EJERCICIOS B

1. Probar el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.

2. Supóngase que $\{S_n\}$ converge uniformemente en un intervalo acotado I: $\{a<x \leqslant b\}$ hacia una función S. Supóngase también que S y todas las S_n son integrables en I. Demostrar que

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

3. Demostrar que $\sum_0^\infty (-1)^n(1-x)x^n$ converge uniformemente en $\{0 < x \leqslant 1\}$.

4. ¿Qué tan grande puede ser a si $\sum_0^\infty (x \log x)^n$ converge uniformemente en $\{0 \leqslant x \leqslant a\}$?

5. Si $\{S_n\}$ converge uniformemente en I y la función límite S es acotada en I, demostrar que $\{S_n\}$ es uniformemente acotada en I; esto es, existe una constante M para la cual $|S_n(x)| \leqslant M$ para todo n y toda x en I.

6. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en I, demostrar que $\{h_n\}$ definida por $h_n = f_n \cdot g_n$ converge uniformemente en I si tanto $\{f_n\}$ como $\{g_n\}$ son uniformemente acotadas.

7. Supóngase que $0 \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$ y la sucesión $\{u_n\}$ converge a 0 uniformemente en un intervalo I. Demostrar que $\sum_0^\infty (-1)^n u_n(x)$ converge uniformemente en I.

EJERCICIOS C

1. Demostrar que si $\Sigma a_n x^n$ converge para $x = x_0$, entonces converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado en $\{|x| < |x_0|\}$.

2. Demostrar que $\sum_1^\infty \left[1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right]$ converge uniformemente en $\{-a \leqslant x \leqslant a\}$ para toda a, pero no en $\{-\infty < x < \infty\}$.

15.3 CONSECUENCIAS DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

Al principio de este capítulo se hizo la observación de que la convergencia uniforme es una herramienta muy útil para investigar las operaciones del análisis sobre funciones límite o sobre sumas de series. Habiendo visto los criterios sencillos básicos para probar la convergencia uniforme, a continuación enfocaremos nuestra atención hacia sus aplicaciones en estos problemas del análisis. Se verá que estamos básicamente interesados en el problema del intercambio del orden de las operaciones con límites.

Considérese la sucesión de funciones dada por

$$S_n(x) = x^n \qquad \{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Ahora bien, en $x = 1$, $S_n(1) = 1$; de aquí que $S_n(1) \to 1$. Para toda x en $\{0 \leqslant x < 1\}$, $S_n(x) \to 0$. De aquí que las funciones límite S están dadas por

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \{0 \leqslant x < 1\} \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Es evidente que esta función es discontinua, de modo que $\lim_{x\to 1} S(x) = 0$ y $S(1) = 1$.

De aquí que $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} S_n(x) = 1$

y $\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$

Es decir, los dos límites no son intercambiables, como serían si S fuera continua en $x = 1$.

Entonces nos gustaría saber qué condiciones sobre S_n asegurarán que S será continua, si las funciones de aproximación son continuas. La convergencia uniforme proporciona una condición suficiente para garantizar este resultado.

15.3a Teorema. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones en un intervalo I, cada una de las cuales es continua en I. Si $\{S_n\}$ converge uniformemente a una función límite S en I, entonces S es continua.

Demostración. Sea x_0 cualquier punto en I. Entonces debe demostrarse que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon)$ para el cual

$$|S(x) - S(x_0)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

Para cualquier n,

$$|S(x) - S(x_0)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)|$$

o bien

(1) $|S(x) - S(x_0)| < |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|.$

Por la convergencia uniforme, existe un $N(\epsilon)$, independiente de x, para el cual

(2) $\qquad |S_n(x) - S(x)| < \epsilon/3 \qquad$ si $n > N \qquad$ para toda x en I.

Escójase tal n y manténgase fija. Entonces, de (1) y (2), se tiene

(3) $\qquad |S(x) - S(x_0)| < \epsilon/3 + |S_n(x) - S_n(x_0)| + \epsilon/3.$

Pero $S_n(x)$ es una función continua. De aquí que existe un $\delta(\epsilon)$ para el cual

(4) $\qquad |S_n(x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3 \qquad$ si $|x - x_0| < \delta.$

Poniendo todo esto junto, se tiene

$$|S(x) - S(x_0)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta. \qquad \blacksquare$$

Aplicando este teorema a las sumas parciales de series, se obtiene el siguiente.

15.3b Corolario. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones cada una de las cuales es continua en un intervalo y si Σu_n converge uniformemente, entonces su suma es una función continua.

Otra importante operación es la integración. Se desea inquirir, ¿cuándo se tiene

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx,$$

es decir, cuando $\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \lim S_n(x)\,dx$?

Una vez más, esto es una cuestión de intercambio del orden de dos límites porque la propia integral, como el estudiante recordará, es más bien un tipo complicado de límite. Una vez más, la respuesta es que la convergencia uniforme es suficiente.

Antes de establecer y probar el teorema observemos que son necesarias algunas condiciones puesto que no siempre es cierto que los límites y la integración pueden intercambiarse. Considérese la sucesión dada por

$$S_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \qquad \{0 < x < 1\}.$$

Estas funciones son todas continuas; la sucesión tiene una función límite $S(x) = 0$. (Ver el Ejercicio A3 del conjunto anterior de ejercicios.) De aquí que

$$\int_0^1 \lim S_n(x)\,dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0.$$

Pero

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 e^{-nx^2}\,2nx\,dx = -e^{-nx^2}\Big]_0^1 = 1 - e^{-n},$$

A partir de lo cual es evidente que

$$\lim \int_0^1 S_n(x)\,dx = 1.$$

Continuaremos con el resultado establecido. (Ver Ejercicio B2 del conjunto de ejercicios anteriores.)

15.3c Teorema. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones integrables en un intervalo $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$. Si $\{S_n\}$ converge uniformemente a una función límite S la cual también es integrable en I, entonces

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Demostración. Sea dado $\epsilon > 0$. Entonces existe un $N(\epsilon)$ para el cual

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon/(b - a) \qquad \text{si } n > N.$$

Entonces, para $n > N$,

$$\left| \int_a^b S_n(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [S_n(x) - S(x)]\,dx \right|$$

$$< \int_a^b |S_n(x) - S(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Puntualizaremos dos casos especiales importantes.

15.3d Corolario. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones en un intervalo $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$ y supóngase que cada una de ellas es continua en I. Si $\{S_n\}$ converge uniformemente a S en I, entonces

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

15.3e Corolario. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones en un intervalo $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$ y supóngase que cada una de ellas es no decreciente en I. Si $\{S_n\}$ converge uniformemente a S en I, entonces

$$\lim \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Todas estas proposiciones tienen extensiones inmediatas hacia las series.

15.3f Corolario. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones integrables (por ejemplo, continuas o no decrecientes) en un intervalo $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$. Si $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente en I hacia una suma integrable, entonces

$$\int_a^b \sum_0^\infty u_n(x)\,dx = \sum_0^\infty \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

EJEMPLO. Supóngase que $|x| \leqslant r < 1$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Entonces

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 \cdots \pm x^{2n}\right| < \frac{|x|^{2n+2}}{1+x^2} < r^{2n+2}$$

Nótese que la estimación es independiente de x. Y conforme $n \to \infty$, $r^{2n+2} \to 0$, de manera que

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \{|x| < r\},$$

y la convergencia es uniforme para cada $r < 1$. Entonces para cualquier y, cuando $|y| \leqslant r$,

$$\text{ang tan } y = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^y \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^y x^{2n}\,dx,$$

la última igualdad se justifica por el último corolario. Entonces

$$\text{ang tan } y = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \qquad \{|y| < r\}.$$

Pero para cualquier $|y| < 1$ existe un $r < 1$ para el cual $|y| \leqslant r < 1$, a saber el propio $|y|$, de manera que

$$\text{ang tan } y = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \{|y| < 1\}.$$

Pregunta: En la ecuación anterior para $|y| < 1$, se observa que ambos miembros tienen sentido para $y = \pm 1$. Esto es, la serie converge para estos valores de y. ¿Puede extenderse esta igualdad para incluir $y = \pm 1$?. es decir, ¿puede afirmarse que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\ ?$$

Regresaremos a este asunto en la próxima sección.

Otra importante operación del análisis es la diferenciación. Veamos la sucesión dada por

$$S_n(x) = xe^{-nx^2} \qquad \{-1 < x < 1\}.$$

Es fácil ver que $\{S_n\}$ converge uniformemente hacia cero en $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$. De modo que $S'(x) = 0$ para toda x. Pero

$$S_n'(x) = e^{-nx^2}[1 - 2nx^2].$$

En particular, en $x = 0$, $S_n'(0) = 1$ para todo n. Así que $S_n'(0) \to 1$ y $S'(0) = 0$. Aquí se ve que la convergencia uniforme no es suficiente para garantizar que

$$\frac{d}{dx} \lim S_n(x) = \lim \frac{d}{dx} S_n(x).$$

Se ve otra vez que ésta es una cuestión del intercambio de dos operaciones con límites. El teorema que se probará es el siguiente.

15.3g Teorema. Supóngase que $\{S_n\}$ es una sucesión de funciones cada una de las cuales es continuamente diferenciable en un intervalo $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$; es decir, $S_n'(x)$ son todas continuas en I. Supóngase además que $\{S_n\}$ converge en un punto x_0 en I y que $\{S_n'\}$ converge uniformemente en I. Entonces $\{S_n\}$ converge uniformemente en I hacia una función S y $S' = \lim S_n'$.

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene para cualquier x en I

$$S_n(x) = \int_{x_0}^x S_n'(t)\,dt + S_n(x_0).$$

Por tanto

$$S_n(x) - S_m(x) = \int_{x_0}^x [S_n'(t) - S_m'(t)]\,dt + [S_n(x_0) - S_m(x_0)]$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant \int_{x_0}^x |S_n'(t) - S_m'(t)|\,dt + |S_n(x_0) - S_m(x_0)|.$$

Por el criterio de Cauchy para la convergencia de una sucesión de constantes y el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones, existe un $N(\epsilon)$ tal que si $m, n > N$,

$$|S_n'(t) - S_m'(t)| < \epsilon$$

y

$$|S_n(x_0) - S_m(x_0)| < \epsilon.$$

Por lo tanto $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon(x - x_0) + \epsilon < \epsilon(b - a + 1)$.

Por la parte de suficiencia del criterio de Cauchy, $\{S_n\}$ converge uniformemente en I. El argumento anterior supone que $x \geqslant x_0$. Para aquellas x menores que x_0, un cambio de signo lleva a cabo la misma estimación.

Denotemos la función límite por S y denotemos el límite de S_n' por σ. Falta demostrar que $S' = \sigma$. Se ve que

$$S_n(x) - S_n(x_0) = \int_{x_0}^x S_n'(t)\,dt.$$

Después de tomar los límites de ambos miembros, se obtiene

$$S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^{x} \sigma(t)\, dt.$$

Pero σ es continua, de modo que por el teorema fundamental del cálculo,

$$S'(x) = \sigma(x). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO. $S(x) = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n^{3/4}}$.

Solución. Esta serie converge uniformemente para toda x por la prueba M:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^{3/4}}\right| < \frac{1}{n^{3/4}} = M_n,$$

y $\sum M_n$ converge puesto que es una serie k con $k > 1$. Además, por la misma prueba, la serie diferenciada $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^{3/4}}$ también converge uniformemente para toda x:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^{3/4}}\right| < \frac{1}{n^{3/4}} = M_n.$$

De aquí que la serie diferenciada es la derivada de la serie original.

EJERCICIOS A

1. Sea $S(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^{3/5}}$, verificar que $S'(x) = -\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n^{4/5}}$ para toda x.
2. Sea $S(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$. ¿Dónde es $S'(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{x}{1-x}\right)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$?
3. Sea $S(x) = \sum_1^\infty n^{-x}$. ¿Dónde es $S'(x) = -\sum_1^\infty n^{-x} \log n$?
4. Sea $S_n(x) = \frac{nx^n}{1+nx^n}$. Calcular el límite puntual en el intervalo $\{0 \leqslant x \leqslant 2\}$ ¿Cómo puede decirse que la convergencia es no uniforme?
5. Sea $S(x)$ definida según el Ejercicio 1. Calcular una serie para $\int_0^x S(t)\, dt$.
6. Sea $S_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$.

   (*a*) Calcular el límite puntual en $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$. ¿Es uniforme la convergencia?

   (*b*) Calcular $\int_0^1 S_n(x)\, dx$ y $\int_0^1 \lim S_n(x)\, dx$. Explicar.

7. Sea $\sum na_n$ absolutamente convergente y supóngase que $f(x) = \sum_1^\infty a_n \cos nx$ y $g(x) = \sum a_n \operatorname{sen} nx$. Demostrar que, para toda x, $f'(x) = -\sum na_n \operatorname{sen} nx$ y $g'(x) = \sum na_n \cos nx$.
8. Sea $f(x) = \sum ne^{-nx}$. ¿Dónde es continua f? Calcular

EJERCICIO B

1. Sea $\sum u_n$ una serie de funciones positivas no decrecientes en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Demostrar que $\int_a^b \sum u_n(x)\, dx = \sum \int_a^b u_n(x)\, dx$, en el supuesto de que solamente $\sum u_n(b)$ converge.

EJERCICIOS C

1. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ la cual converge uniformemente hacia una función límite S en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para toda c en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Si S y S_n son todas uniformemente acotadas en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, demostrar que

$$\lim \int_a^b S_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx.$$

2. Sean ϕ y S_0 continuas en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Definir la sucesión S_n por

$$S_n(x) = \alpha + \int_a^x \phi(t)\, S_{n-1}(t)\, dt \qquad n > 1, \qquad \{a < x < b\}.$$

   (*a*) Demostrar que $\{S_n\}$ converge uniformemente en I hacia una función S la cual es una solución del problema $S'(x) = \phi(x)\, S(x)$, $S(a) = \alpha$.

   (*b*) Deducir que $S(x) = \alpha \exp \int_a^x \phi(t)\, dt$.

3. Si $S(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ converge para $x = x_0 \neq 0$, demostrar que

$$S'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \qquad \text{en } \{|x| < |x_0|\}.$$

4. Sea $S(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-nx}$. Demostrar que $\lim_{x \to 0+} S(x) = +\infty$.

15.4 PRUEBAS DE ABEL Y DIRICHLET

Consideremos ahora el problema de las condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie. La prueba M, aunque muy útil, requiere que la convergencia sea absoluta así como uniforme. Aquí se presentarán dos pruebas, más delicadas que la prueba M en el sentido de que no requieren la convergencia absoluta. Dependen del siguiente lema que se conoce como **identidad de Abel.** Es análoga a la integración por partes.

15.4a Lema. Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones y $\{U_n\}$ una sucesión con la propiedad de que $U_n - U_{n-1} = u_n$. Entonces

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k v_k = U_m v_m - U_n v_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1} U_k(v_{k+1} - v_k).$$

Demostración. Se escribe

$$\begin{aligned}\sum_{n+1}^{m} u_k v_k &= \sum_{n+1}^{m} v_k(U_k - U_{k-1}) \\ &= v_{n+1}(U_{n+1} - U_n) + v_{n+2}(U_{n+2} - U_{n+1}) + \cdots + v_m(U_m - U_{m-1}) \\ &= -U_n v_{n+1} - U_{n+1}(v_{n+2} - v_{n+1}) - U_{n+2}(v_{n+3} - v_{n+2}) - \cdots \\ &\quad - U_{m-1}(v_m - v_{m-1}) + U_m v_m.\end{aligned}$$

∎

Ahora apliquemos esta identidad a la demostración de dos teoremas que son modificaciones de las pruebas de Abel y Dirichlet. Estas modificaciones se deben al matemático inglés G. H. Hardy. La primera se llamará **prueba de Dirichlet modificada.**

15.4b Teorema. Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones de funciones definidas en un intervalo I. Y supóngase que

(i) $\sum_0^\infty u_n(x)$ converge uniformemente en I.

(ii) $\sum_1^\infty |v_n(x) - v_{n-1}(x)| < K$ (constante) en I.

(iii) $|v_0(x)| \leqslant K$ en I.

Entonces $\sum_0^\infty u_n(x)v_n(x)$ converge uniformemente en I.

Demostración. Sea $U(x) = \sum_0^\infty u_n(x)$, y defínase

$$U_n(x) = \sum_0^n u_k(x) - U(x) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Obsérvese también que

$$v_n(x) = \sum_1^n [v_k(x) - v_{k-1}(x)] + v_0(x),$$

de modo que

$$\begin{aligned}|v_n(x)| &< \sum_1^n |v_k(x) - v_{k-1}(x)| + |v_0(x)| \\ &< \sum_1^\infty |v_k(x) - v_{k-1}(x)| + |v_0(x)| \\ &< 2K.\end{aligned}$$

Con base en la convergencia uniforme de $\Sigma u_k(x)$ se tiene que $U_n \to 0$ uniformemente en I. Así que dado un $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon)$, independiente de x, para el cual $|U_n(x)| < \epsilon$ si $n > N$. De acuerdo con la identidad de Abel, se tiene

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n+1}^{m} u_k(x)v_k(x)\right| &= \left|U_m v_m - U_n v_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1} U_k(v_{k+1} - v_k)\right| \\ &< |U_m| \cdot |v_m| + |U_n|\,|v_{n+1}| + \sum_{n+1}^{m-1} |U_k|\,|v_{k+1} - v_k| \\ &< 2K\epsilon + 2K\epsilon + K\epsilon = 5K\epsilon\end{aligned}$$

si $m > n > N$. De aquí que por el criterio de Cauchy, $\Sigma u_n(x)v_n(x)$ converge uniformemente. ∎

El siguiente teorema es un **teorema de Abel modificado.**

15.4c Teorema. Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones de funciones definidas en un intervalo I. Y supóngase que

(i) las sumas parciales de $\Sigma u_n(x)$ son acotadas; es decir, existe una constante M para la cual $\left|\sum_0^n u_k(x)\right| < M$ en I;

(ii) $\sum_0^\infty |v_n(x) - v_{n-1}(x)|$ converge uniformemente en I;

(iii) $v_n(x) \to 0$ uniformemente en I.

Entonces $\Sigma u_n(x)v_n(x)$ converge uniformemente en I.

Demostración. Dado un $\epsilon > 0$, existe, por la hipótesis (iii), un N_1 uniforme tal que

$$|v_n(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N_1$$

y, por (ii), existe un N_2 uniforme tal que

$$\sum_{n+1}^{m-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N_2.$$

Supóngase ahora que $n > N = \text{máx}\,[N_1, N_2]$. Entonces, por la identidad de Abel y con $U_n = \sum_0^n u_k$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n+1}^{m} u_k(x)v_k(x)\right| &< |U_m|\,|v_m| + |U_n|\,|v_{n+1}| + \sum_{n+1}^{m-1} |U_k| \cdot |v_{k+1} - v_k| \\ &< M\left[|v_m| + |v_{n+1}| + \sum_{n+1}^{m-1} |v_{k+1} - v_k|\right] \\ &< 3\epsilon M.\end{aligned}$$

Por el criterio de Cauchy queda completa la demostración. ∎

EJEMPLO. Regresemos a la cuestión que planteamos en la sección anterior. Hemos visto que

$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge para $|x| \leqslant 1$ y de aquí que representa una función de x en ese intervalo. Denotemos esta función por $f(x)$:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \{|x| < 1\}.$$

También hemos visto que $f(x) = \text{ang tan } x$ para $|x| < 1$ y allí se presenta el interrogante de la persistencia de la igualdad cuando $x = \pm 1$. Esto es equivalente a inquirir acerca de la continuidad (continuidad lateral, desde luego) de $f(x)$, porque se tiene

$$f(x) = \begin{cases} \sum_0^\infty (-1)^n/(2n+1) & x = 1 \\ \text{ang tan } x & |x| < 1. \end{cases}$$

Entonces si se supiera que $f(x)$ es continua, se tendría

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \text{ang tan } x.$$

Pero ang tan x *es* continua; de aquí que

$$f(1) = \lim_{x \to 1} \text{ang tan } x = \text{ang tan } 1 = \pi/4.$$

Por lo tanto, todo gira alrededor de la continuidad de la función $f(x)$.

Ahora bien, $f(x)$ es continua en $x = 1$ si la serie es uniformemente convergente para $|x| \leqslant 1$. Para ver que éste es el caso apliquemos la prueba de Abel. Hagamos la identificación $u_n(x) = (-1)^n x^{2n+1}$, $v_n(x) = 1/(2n+1)$. Verifiquemos la hipótesis:

(i) $|U_n(x)| = \left|\sum_0^n (-1)^k x^{2k+1}\right| \leqslant 2$ para $|x| < 1$.

$$U_n(x) = \frac{x[1 - x^2 + x^4 - + \cdots + (-1)^n x^{2n}](1 + x^2)}{(1 + x^2)}$$

$$= \frac{x[1 + (-1)^n x^{2n+2}]}{1 + x^2}.$$

De aquí que $\qquad |U_n(x)| < \frac{1 \cdot [1+1]}{1} = 2 \qquad$ si $|x| < 1$.

(ii) $\sum_1^\infty |v_k(x) - v_{k-1}(x)|$ converge uniformemente para $|x| \leqslant 1$. Puesto que las v_k son constantes, la convergencia uniforme significa simplemente la convergencia (ver Ejercicio A9 de la Sección 15.2):

$$|v_k - v_{k-1}| = \left|\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right| = \frac{2}{4k^2 - 1}$$

y

$$\frac{2}{4k^2 - 1} \Big/ \frac{1}{k^2} = \frac{2k^2}{4k^2 - 1} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

De aquí que por la forma límite de la prueba de comparación, la serie converge; y puesto que es independiente de x, converge uniformemente.

(iii) $v_k(x) \to 0$ uniformemente. Pero

$$v_k = \frac{1}{2k+1} \to 0.$$

De aquí que todas las hipótesis se satisfacen y la convergencia es uniforme. Por lo tanto $f(x)$ es continua y finalmente se ha probado que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ahora bien, tal y como se ha visto en la aplicación de la prueba de Abel a nuestro ejemplo, $v_n(x)$ no necesita depender de x. De hecho, tanto $u_n(x)$ como $v_n(x)$ pueden ser constantes. Entonces tanto la prueba de Abel como la de Dirichlet se transforman en pruebas para la convergencia de sucesiones de constantes. En tales aplicaciones de los teoremas, una hipótesis necesaria para la convergencia uniforme se reduce simplemente a una hipótesis necesaria para la convergencia ordinaria y la conclusión se transforma en una conclusión acerca de la convergencia ordinaria. (Ver Ejercicio A1.)

15.5 UN TEOREMA DE DINI

Tal y como se ha visto en numerosos ejemplos y ejercicios, puede muy bien suceder que una sucesión de funciones continuas puede converger a un límite continuo aunque la convergencia no sea uniforme. Pero existe una situación importante en la cual esto no puede suceder, es decir, en la cual puede deducirse la uniformidad de la convergencia a partir de la continuidad de la función límite. Este es el caso cuando la convergencia es monótona; es decir, cuando para cada x fija en el intervalo (cerrado y acotado) la sucesión es no decreciente (o no creciente).

15.5a Teorema. Sea $\{S_n\}$ una sucesión no decreciente de funciones continuas en el intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Supóngase que $\{S_n\}$ converge a una función límite S, la cual también es continua en I. Entonces $\{S_n\}$ converge uniformemente a S.

Demostración. La demostración es semejante a la de los teoremas del Capítulo 6.

Supóngase que la convergencia no fuera uniforme. Entonces esto significaría que la sucesión de suprema

$$M_n = \sup_I |S_n(x) - S(x)| = \sup_I [S(x) - S_n(x)]$$

no tendiera hacia cero. De aquí que existe un ϵ_0 excepcional tal que $M_n \geqslant \epsilon_0$ para una subsucesión $\{n_k\}$. Ahora, para simplificar la notación,

hagamos $S_{nk}(x) = \sigma_k(x)$, $M_{nk} = M_k$ y $S(x) = \sigma(x)$. Puesto que σ_k y σ son continuas, así también $\sigma - \sigma_k$. Así que existe un punto x_k en I en el cual $M_k = \sigma(x_k) - \sigma_k(x_k)$. Pero $\{x_k\}$ es una sucesión acotada y, en consecuencia, tiene un punto límite en I. Esto es, existe una subsucesión de $\{x_k\}$ digamos $\{x_{k_j}\}$, tal que $x_{k_j} \to \xi$ en I.

Sea $R_k = \sigma - \sigma_k$. Entonces $\{R_k\}$ converge en una forma no creciente hacia 0 en cada punto, en particular ξ. Así que existe un N para el cual

$$0 \leqslant R_k(\xi) \leqslant \epsilon_0/2 \qquad \text{si } k > N.$$

Y también $$R_{k_j}(x_{k_j}) > \epsilon_0.$$

Por el carácter monótono de R_k, se tiene para $m < k_j$ que

$$R_m(x_{k_j}) > R_{k_j}(x_{k_j}) > \epsilon_0.$$

Ahora hagamos $j \to \infty$. Por la continuidad $R_m(x_{k_j}) \to R_m(\xi)$ y se obtiene

$$R_m(\xi) \geqslant \epsilon_0 \qquad \text{para todo } m.$$

Esta contradicción completa la demostración.

EJERCICIOS A

1. Establecer las pruebas de Abel y Dirichlet modificadas para la convergencia de una serie de constantes de la forma $\Sigma a_n b_n$.
2. Sea $f(x) = \sum_1^\infty (-1)^n e^{-nx}/n^2$, $\{x \geqslant 0\}$. Demostrar que
$$f'(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} e^{-nx}/n \qquad \{x \geqslant 0\}.$$
3. Demostrar que $\sum_2^\infty (-1)^n e^{-nx}/\log n$ es continua en $\{x \geqslant 0\}$.
4. Demostrar que $\sum_2^\infty \dfrac{(-1)^n e^{-nx} x^n}{\log n}$ converge uniformemente en $\{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\}$.
5. Demostrar que $f(x) = \sum_1^\infty \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$ converge uniformemente para toda x y calcular $f'(x)$ por derivación término a término.
6. Para la función f del Ejercicio 5, calcular $\int_0^x 2tf(t)\,dt$. . ¿Converge uniformemente esta serie para toda x?
7. Demostrar que la sucesión $\{e^{-nx}\}$ converge monotónicamente hacia cero para $x > 0$ y deducir que la convergencia es uniforme en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para cualquier $a > 0$.
8. Demostrar que $\{x^n\}$ converge monotónicamente hacia cero en $\{0 \leqslant x < 1\}$ y deducir que la convergencia es uniforme en cualquier subconjunto cerrado.
9. Sea $S_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx}$. . Demostrar que $\{S_n\}$ converge puntualmente hacia $S(x) = x$ en $\{0 < x < 1\}$ en una forma monótona y deducir que la convergencia es uniforme.

EJERCICIOS B

1. Sea $S_n(x) = \sum_1^n \operatorname{sen} kx$. Multiplicar por 2 sen $\frac{1}{2}x$, aplicar la identidad 2 sen a sen $b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ y demostrar que
$$S_n(x) = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x}.$$
2. Sea $S_n(x) = \sum_1^n \cos kx$. Multiplicar por 2 sen $\frac{1}{2}x$, aplicar la identidad 2 cos a sen $b = \operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b)$ y demostrar que
$$S_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)x - \operatorname{sen} 1/2x}{\operatorname{sen} 1/2\,x}.$$
3. Demostrar que $\sum_1^\infty \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}$ converge para toda x y que converge uniformemente en cualquier subintervalo cerrado de $\{0 < x < 2\pi\}$ para cualquier $\alpha > 0$.
4. Para cualquier $\alpha > 0$, demostrar que $\sum_1^\infty \dfrac{\cos nx}{n^\alpha}$ converge para toda x excepto múltiplos de 2π y que converge uniformemente en cualquier subintervalo cerrado de $\{0 < x < 2\pi\}$.
5. Demostrar que si $S = \sum_1^\infty u_n$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces puede integrarse término a término tantas veces como se desee.
6. Demostrar que $(1 + x/n)^n$ tiende en una forma monótona hacia e^x en $\{0 \leqslant x \leqslant b\}$ y deducir la uniformidad de la convergencia.
7. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones continuas en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Supóngase que $0 \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$ y que $S(x) = \Sigma(-1)u_n(x)$ es continua en I. Demostrar que la convergencia es uniforme.

EJERCICIOS C

1. Considérese que Σu_n converge uniformemente en un intervalo I y sea la sucesión $\{v_n\}$ uniformemente acotada y monótona en I. Demostrar que $\Sigma u_n v_n$ converge uniformemente en I.
2. Sea $\sum_1^n u_k$ uniformemente acotada en I y sea la sucesión $\{v_n\}$ monótona en n y convergente uniformemente hacia cero. Demostrar que $\Sigma u_n v_n$ converge uniformemente en I.
3. Justificar la ecuación
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{m + nk} = \int_0^1 \frac{t^{m-1}\,dt}{1 + t^k} \qquad m > 0.$$

16

La serie de Taylor

16.1 SERIES DE POTENCIAS. INTERVALO DE CONVERGENCIA

Al principio del capítulo anterior se discutió la importancia de las series para la representación de funciones. Uno de los tipos más importantes de series con este fin es el de las **series de potencias.** Estas son series cuyos términos son potencias de $x - x_0$ multiplicadas por constantes:

$$\sum_0^\infty a_n(x - x_0)^n.$$

Para estudiar las series de potencias es suficiente suponer que $x_0 = 0$, puesto que la sustitución $x' = x - x_0$ puede llevar nuestra serie a la forma

$$\sum_0^\infty a_n x'^n.$$

Cualquier serie de potencias, $\Sigma a_n x^n$, converge por lo menos para *un* valor de x, a saber $x = 0$; porque todos los términos, excepto a_0, se nulifican cuando $x = 0$, de manera que todas las sumas parciales S_n son iguales a a_0. Existen series las cuales no convergen para otros valores de x; por ejemplo,

$$\Sigma n! x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots.$$

Apliquemos la prueba de la razón. Escojamos cualquier valor fijo de x, digamos $x_0 \neq 0$, y comparemos $(n+1)!x_0^{n+1}$ con $n!x_0^n$.

$$|(n+1)!x_0^{n+1}/n!x_0^n| = (n+1)|x_0|.$$

Puesto que $x_0 \neq 0$, esta razón eventualmente se hará mayor que 1; de hecho diverge hacia $+\infty$ conforme $n \to \infty$. De aquí que la serie diverge para cualquier $x_0 \neq 0$.

Existen otras series de potencias las cuales convergen para todos los valores de x, por ejemplo,

$$\Sigma \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Una vez más apliquemos la prueba de la razón en algún $x_0 \neq 0$ fijo:

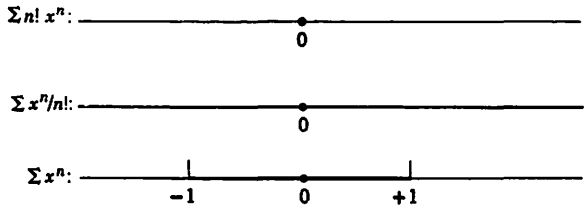
$$\left| \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x_0^{\,n}}{n!} \right| = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0 < 1.$$

De aquí que la serie converge por la prueba de la razón independientemente del valor x_0.

Existen otras series que convergen para determinadas x y divergen para otras. Por ejemplo, se sabe que la progresión geométrica

$$\sum_0^\infty x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

converge para $|x| < 1$ y diverge para todas las demás x.



El diagrama representa gráficamente el comportamiento, respecto a la convergencia, de los tres ejemplos que se han examinado.

Ahora es evidente que estos ejemplos son típicos del comportamiento de una serie de potencias. Converge ya sea solamente para $x = 0$ o para toda x o bien en un intervalo centrado en $x = 0$ (o centrado en x_0, en el caso de potencias de $x - x_0$). Los siguientes teoremas lo clarifican.

16.1a Teorema. Si $\Sigma a_n x^n$ converge para $x = x_0$, entonces es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x| < |x_0|$. Si diverge para $x = x_1$, es divergente para todos los valores de x tales que $|x| > |x_1|$.

Demostración. Supuesto que $\Sigma a_n x_0^{\,n}$ converge, la sucesión $\{a_n x_0^{\,n}\}$ converge hacia cero y de aquí que es acotada (Teorema 2.3b). Así que existe un M tal que

$$|a_n x_0^{\,n}| < M \qquad \text{todo } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Escojamos cualquier x tal que $|x| < |x_0|$. Entonces

$$r \equiv \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Por lo tanto $|a_n x^n| = \left| a_n x_0^{\,n} \cdot \dfrac{x^n}{x_0^{\,n}} \right| = |a_n x_0^{\,n}| \cdot \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n < Mr^n.$

Entonces la serie converge por comparación con una serie geométrica con $r < 1$.

A partir de esto, la segunda parte se deduce fácilmente. Supongamos que $\Sigma a_n x_1^{\,n}$ diverge y que existe otro valor de x, digamos $x = x_0$ con $|x_0| > |x_1|$ para el cual $\Sigma a_n x_0^{\,n}$ converge. Si esto sucediera se tendría la siguiente situación: existe un x_0 para el cual la serie converge y un x_1 con $|x_1| < |x_0|$ para el cual diverge. Pero esto contradice la primera parte del teorema. ∎

Parece evidente, con base en este teorema, que una serie de potencias tiene la propiedad de converger en un intervalo, si converge de alguna manera. Para precisar este hecho, hagamos la siguiente definición.

Dada una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, sea S el conjunto de x para las cuales esta serie converge. Entonces el número R, definido a continuación, se llamará **radio de convergencia** de $\Sigma a_n x^n$:

$R = 0$ si $\Sigma a_n x^n$ converge solamente para $x = 0$.
$R = +\infty$ si $\Sigma a_n x^n$ converge para toda x.
$R = \sup_S |x|$ si $\Sigma a_n x^n$ converge para algunas x y diverge para otras.

El intervalo $\{-R < x < R\}$ se llamará **intervalo de convergencia.**

16.1b Teorema. Una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para toda x dentro del intervalo de convergencia $\{-R < x < R\}$ y diverge en $\{|x| > R\}$.

Este teorema afirma que la serie converge en todos los puntos en el intervalo de convergencia y diverge en todos los puntos más allá de los extremos del intervalo de convergencia. Nada afirma respecto a los propios puntos extremos $x = \pm R$. En general, éstos requieren una prueba especial porque puede suceder que una serie converge en ninguno de los dos, o en uno y no en el otro, o en ambos.

Demostración. Nos restringiremos al último caso porque es evidente que si $R = 0$ o bien $R = \infty$ nada tiene que probarse. Esta prueba es más semántica que matemática en carácter. Principalmente examinemos el significado del concepto de suprémum. (El estudiante debe repasar esa definición.)

Ahora, sea dada cualquier x en $\{|x| < R\}$. Entonces existe un x_0,

$$|x| < |x_0| < R$$

para el cual la serie converge. (Esto es por la definición de suprémum.) Por el teorema anterior, converge absolutamente en x. De aquí que converge para todas tales x — es decir, todas para las cuales $|x| < R$.

Supóngase ahora que la serie no diverge para algún x_0, $|x_0| > R$. Esto significa que converge para x_0. Pero entonces se ha encontrado un miembro del conjunto S mayor que el suprémum. Esto es una contradicción. ∎

En el estudio de las series de potencias es conveniente conocer R exactamente. Por supuesto que podemos obtener cotas en R si conocemos un punto x_0 para el cual $\Sigma a_n x^n$ converge y un punto x_1 para el cual diverge. Entonces es evidente que

$$|x_0| \leqslant R \leqslant |x_1|.$$

En casos extremos, podríamos conformarnos con tales cotas, pero esta situación la aceptaríamos en el peor de los casos.

Podemos dar ciertos criterios para determinar R. La siguiente prueba es sencilla, útil y frecuentemente fácil de aplicar.

16.1c Teorema. Sea $\Sigma a_n x^n$ una serie dada para la cual $\lim a_{n+1}/a_n \equiv q$ existe. Entonces $R = 1/q$.

Demostración. Aplicando la prueba de la razón,

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| = q|x|$$

se ve que la serie converge si $|x| < 1/q$ y diverge si $|x| > 1/q$. ∎

Existe otra prueba que siempre da el valor exacto de R. En ocasiones es embarazosa su aplicación debido a la dificultad que se presenta al realizar los cálculos necesarios. El resultado se llama **fórmula de Cauchy-Hadamard.**

16.1d Teorema. Para cualquier serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, el radio de convergencia R está dado por

$$R = 0 \quad \text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$$
$$R = \infty \quad \text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$
$$R = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{si } 0 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Demostración. Este teorema es una consecuencia del Teorema 14.3b. Probemos $\Sigma|a_n x^n|$ mediante este teorema. Sea $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|q.$$

Ahora bien, se obtiene convergencia si $|x|q < 1$, lo cual es así para toda x si $q = 0$. Si $q = +\infty$ se cumple solamente para $x = 0$; si q no es cero ni ∞, solamente se cumple si $|x| < 1/q$.

16.1e Corolario. Para una serie de potencias, $\Sigma a_n x^n$, si $q = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, entonces

$$R = 0 \quad \text{si } q = \infty$$
$$R = \infty \quad \text{si } q = 0$$
$$R = 1/q \quad \text{si } 0 < q < \infty.$$

Demostración. Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, entonces $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. ∎

Determinaremos el intervalo de convergencia de las siguientes series e investigaremos la convergencia en los puntos extremos.

EJEMPLO 1. $1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \cdots$, donde $a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$ y $a_{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

Solución. $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ no existe. Examinemos la sucesión

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}: \quad 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots.$$

Es evidente que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. De aquí que $R = 2$. Por tanto, se sabe que la serie converge en $\{-2 < x < 2\}$.

¿Qué se puede decir acerca de los puntos $x = \pm 2$? En cualquiera de estos valores, todos los términos impares tienen valor absoluto 1. Es decir,

$$\lim a_n \neq 0.$$

De aquí que la serie diverge en cada extremo.

EJEMPLO 2. $1 + \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots$.

Solución. Intentaremos la determinación de R por la prueba de la razón:

$$\lim \frac{1}{n^2} \Big/ \frac{1}{(n+1)^2} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 = R.$$

Por lo tanto, nuestra serie converge en $\{-1 < x < 1\}$. En los puntos extremos se tiene $1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ y $1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$. En cada caso se tiene convergencia absoluta, puesto que las series son series k con $k > 1$.

EJEMPLO 3. $\sum_1^\infty \frac{10^n}{n} x^n = 10x + 50x^2 + 333\tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$.

Solución. Apliquemos una vez más la prueba de la razón:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{10^n}{n} \Big/ \frac{10^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{10} \to \frac{1}{10} = R.$$

De aquí que la serie converge en $\{-1/10 < x < 1/10\}$. En $x = +1/10$, la serie armónica diverge; en $x = -1/10$, la armónica alternante converge.

EJERCICIOS A

1. Determinar el radio de convergencia de $\Sigma a_n x^n$, donde a_n se da a continuación. Investigar la convergencia en cada extremo del intervalo de convergencia
   (*a*) $1/[n(n+1)(n+2)]$ (*b*) $(n-1)/n!$ (*c*) $(2n)!/(n!)^2$
   (*d*) $1/n^k$ (*e*) $(3^n + 2n)/(4^n + 5)$ (*f*) $a_{2n} = e^{-2n}$; $a_{2n+1} = e^{2n}$

2. Determinar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series:
   (*a*) $\Sigma(1 + 1/n)^{n^2}(x-10)^n$ (*b*) $\Sigma(x/2 - 1)^n$
   (*c*) $\Sigma(n^2/2^n)(x-3)^n$ (*d*) $\Sigma(\cos n\pi/2)(x-\pi)^n$

EJERCICIOS B

1. Discutir los siguientes problemas como en el A 1 anterior
   (*a*) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ (*b*) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ (*c*) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$

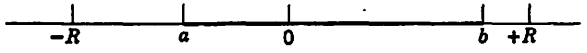
2. Probar que si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada lejos tanto de 0 como de ∞, entonces $\Sigma a_n x^n$ tiene el radio de convergencia igual 1.

3. Supóngase que $\Sigma a_n x^n$ y $\Sigma b_n x^n$ tienen los radios de convergencia R y R', respectivamente. ¿Qué puede decirse acerca de los radios de convergencia de las siguientes?
   (*a*) $\Sigma(a_n \pm b_n)x^n$ (*b*) $\Sigma a_n b_n x^n$ (*c*) $\Sigma(a_n/b_n)x^n$

16.2 PROPIEDADES DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ que tiene un radio de convergencia R diferente de cero converge para toda x en el intervalo $\{-R < x < R\}$ y por lo tanto define una función en ese intervalo. Si necesitamos usar esta función en cualquier cálculo requerimos el conocimiento de algunas de sus propiedades. En particular necesitamos saber si es continua, integrable, diferenciable. Si es diferenciable, deseamos saber cuántas derivadas tiene. Estas son preguntas que pueden responderse fácilmente mediante los criterios de convergencia uniforme del último capítulo.

16.2a Teorema. Supóngase que $\Sigma a_n x^n$ tiene un radio de convergencia R diferente de cero y sean a y b dos números cualesquiera que satisfacen la condición $-R < a < b < R$. Entonces $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en el intervalo cerrado I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.



Demostración. Sea $r = \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Si x está en I, entonces $|x| \leqslant r$. Y r es un punto en el intervalo de convergencia, de manera que $\Sigma|a_n r^n|$ converge. De aquí que

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|, \qquad x \text{ en } I.$$

Si escogemos $M_n = |a_n r^n|$, se ve que es aplicable la prueba M de Weierstrass. ∎

Inmediatamente se tiene el siguiente corolario.

16.2b Corolario. Si $\Sigma a_n x^n$ tiene un radio de convergencia diferente de cero, entonces la función que representa es continua en cada punto x en el intervalo $\{-R < x < R\}$. Además, para todo a, b para el cual $-R < a < b < R$,

$$\int_a^b \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) dx = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) = \sum_0^\infty \frac{a_n \cdot b^{n+1}}{n+1} - \sum_0^\infty \frac{a_n \cdot a^{n+1}}{n+1}$$

Demostración. Sea x_0 cualquier punto en $\{-R < x < R\}$. Entonces existe un número positivo a para el cual el intervalo I: $(x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a)$ está contenido en el intervalo de convergencia. (¿Por qué?) Por el teorema anterior, la convergencia es uniforme en I. De aquí que, por el Teorema 15.3a, la suma es continua en I; en particular, es continua en x_0. Pero supuesto que x_0 fue un punto arbitrario en el intervalo de convergencia, la suma es continua en todos esos puntos.

Para probar la segunda parte, escribimos

$$\int_a^b (\Sigma a_n x^n)\, dx = \int_0^b (\Sigma a_n x^n)\, dx - \int_0^a (\Sigma a_n x^n)\, dx.$$

Ahora bien, puesto que la convergencia es uniforme en el intervalo cerrado de 0 a b,

$$\int_0^b \Sigma a_n x^n\, dx = \Sigma a_n \int_0^b x^n\, dx = \Sigma a_n \frac{x^n}{n+1}\Big]_0^b = \Sigma \frac{a_n \cdot b^{n+1}}{n+1},$$

justificándose el intercambio de Σ por $\int$ mediante el Teorema 15.3c. En forma semejante, la otra integral puede calcularse y los resultados se combinan para dar la proposición contenida en el teorema. ∎

EJEMPLO 1. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - + \cdots = \sum_0^\infty (-x)^n \qquad \{|x| < 1\}.$

Solución:

$$\log(1+a) = \int_0^a \frac{dx}{1+x} = \sum_0^\infty \int_0^a (-x)^n dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n a^{n+1}}{n+1} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}.$$

Ahora surge otra pregunta. La serie original $\Sigma(-x)^n$ no converge en $x = 1$. Sin embargo, la serie integrada $-\sum_1^\infty (-1)^n a^n/n$ converge allí. Nuestra información nos permite asegurar que

$$\log(1+a) = -\sum_1^\infty (-a)^n/n!$$

solamente para $|a| < 1$. La pregunta es ¿se cumple para $a = +1$? (No existe duda respecto a $a = -1$, puesto que la serie diverge allí.) Una vez

más se ve que conduce a preguntar acerca de la continuidad de la función representada por la serie. Si la serie es continua en 1, entonces la igualdad sigue cumpliéndose; si no, la igualdad no se cumple.

Podría manejarse esta cuestión como se hizo en el ejemplo del ang tan en el último capítulo. Pero existe un teorema general, el **teorema de Abel**, que cubre la situación para todas las series de potencias de una vez.

16.2c Teorema. Si una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ tiene un radio de convergencia finito y diferente de cero, y si converge en $x = R$ — es decir, si $\Sigma a_n R^n$ converge, entonces converge uniformemente en $\{0 \leqslant x \leqslant R\}$. Si converge en $-R$, entonces converge uniformemente en $\{-R \leqslant x \leqslant 0\}$.

Demostración. Es conveniente desarrollar la demostración para $R = 1$ y esto es suficiente para efectuar la demostración completa. Porque la sustitución $x = Ry$ lleva $\Sigma a_n x^n$ hacia

$$\Sigma(a_n R^n)y^n = \Sigma b_n y^n,$$

donde $b_n = a_n R^n$ y donde la nueva serie tiene un radio de convergencia igual a 1. De aquí que supondremos que $R = 1$. Nuestra suposición de que $\Sigma a_n x^n$ converge en $x = R$ se transforma en una suposición de que Σa_n converge.

Apliquemos la prueba de Dirichlet, Teorema 15.4b, con

$$u_n(x) = a_n, \qquad v_n(x) = x^n.$$

Verifiquemos la hipótesis:

(i) $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente significa que Σa_n converge, lo cual es una suposición explícita.

(ii) Si $x \neq 1$, entonces

$$\sum_1^\infty |v_k - v_{k-1}| = \sum_1^\infty |x^k - x^{k-1}| = \sum_1^\infty x^{k-1}|x - 1|$$
$$= (1 - x)\sum_1^\infty x^{k-1} = (1 - x)\sum_0^\infty x^k = (1 - x)/(1 - x) = 1,$$

Si $x = 1$, entonces

$$\sum_1^\infty |v_k - v_{k-1}| = 0.$$

(iii) $|v_0(x)| = 1$.

De aquí que (ii) y (iii) se satisfacen con $K = 1$. ∎

Si regresamos a nuestro ejemplo se ve que la convergencia de la serie para $a = 1$, a saber $\sum_1^\infty(-1)^{n+1}/n$, nos permite asegurar que $\Sigma(-1)^{n+1}a^n/n$ converge uniformemente en $\{0 \leqslant a \leqslant 1\}$ y de aquí que representa una función continua allí. Entonces, puesto que

$$\log(1 + a) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}a^n}{n} \quad \text{para } |a| < 1,$$

al tomar límites se tiene

$$\log 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots.$$

Todavía debemos discutir la diferenciabilidad de las series de potencias pero antes de abordar este tema consideraremos uno preliminar. Si $\Sigma a_n x^n$ converge en un intervalo $\{|x| < R\}$, entonces la derivada formal (esto es, el resultado de derivar término a término, sin preguntar si es posible) es $\Sigma n a_n x^{n-1}$. Primero inquiriremos acerca de la convergencia de esta serie. Salta a la vista que tiene el mismo radio de convergencia.

16.2d Teorema. Si $\Sigma a_n x^n$ converge para $|x| < R$, entonces $\Sigma n a_n x^{n-1}$ también converge para $|x| < R$.

Demostración. Recuérdese que $nr^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para $r < 1$. De aquí que para cualquier $x_0 \neq 0$ fijo, $nr^n/|x_0| \leqslant 1$ para n lo suficientemente grande.

Sea x_0 cualquier punto para el cual $|x_0| < R$ y escójase x_1 tal que $|x_0| < |x_1| < R$. Entonces establézcase $r = |x_0/x_1|$ y calcular

$$|na_n x_0^{n-1}| = \left|\frac{na_n x_1^n}{x_0}\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n\right| = \frac{nr^n}{|x_0|} \cdot |a_n x_1^n| < |a_n x_1^n|$$

para n suficientemente grande.

Entonces $\Sigma n a_n x_n^{n-1}$ converge por la prueba de comparación. ∎

Ahora puede llegarse fácilmente a la cuestión de la diferenciabilidad.

16.2e Teorema. Supóngase que $\Sigma a_n x^n$ tiene un radio de convergencia R diferente de cero. Denotemos su suma por $f(x)$. Entonces f es diferenciable para $\{-R < x < R\}$ y

$$f'(x) = \sum_0^\infty a_n \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \qquad \{|x| < R\}.$$

Demostración. Sea x_0 cualquier punto en $\{-R < x < R\}$. Entonces existe una $a > 0$ para la cual el intervalo $I: \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a\}$ está en el intervalo de convergencia. De aquí que tanto $\Sigma a_n x^n$ como $\Sigma n a_n x^{n-1}$ son uniformemente convergentes en I, de manera que por el Teorema 15.3g se justifica la derivación término a término en I, en particular en x_0. Supuesto que x_0 es un punto arbitrario en $\{-R < x < R\}$, la derivación se justifica para todos los puntos en el intervalo de convergencia. ∎

16.2f Corolario. Bajo la hipótesis anterior $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{d^k}{dx^k}x^n = \sum_{n=k}^\infty a_n n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$
$$= \sum_{n=k}^\infty a_n \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{a_{n+k}(n+k)!}{n!}x^n \qquad \{-R < x < R\}.$$

Demostración. Un argumento de inducción basado en el Teorema 16.2e efectúa la demostración. ∎

EJEMPLO 2. Derivar

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad \{|x| < 1\}.$$

Solución. Derivando término a término

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad \{|x| < 1\},$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots \qquad \{|x| < 1\},$$

y en general

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} x^n + \cdots \qquad \{|x| < 1\}.$$

Sabemos que una serie de potencias representa una función infinitamente diferenciable en su intervalo de convergencia y que todas las derivadas pueden obtenerse derivando término a término. Podemos expresar los coeficientes en términos de estas derivadas. Este resultado se obtiene como un corolario del teorema anterior.

16.2g Corolario. Supóngase que $\Sigma a_n x^n$ tiene un radio de convergencia $R > 0$. Denotemos su suma por $f(x)$. Entonces

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Demostración. Hágase $x = 0$ en la fórmula del teorema anterior. ∎

Como un Corolario de 16.2g se obtiene la unicidad de una representación de una serie de potencias. Esto es, si una función f es representable en un intervalo $\{-R < x < R\}$ mediante dos series de potencias, entonces deben ser idénticas. La proposición precisa es la siguiente.

16.2h Corolario. Sean $f(x) = \Sigma a_n x^n$ y $f(x) = \Sigma b_n x^n$ en $\{-R < x < R\}$:

$$a_n = b_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demostración. Por el Teorema 16.2g

$$a_n = f^{(n)}(0)/n! = b_n.$$ ∎

EJEMPLO 3. Súmese la serie y obténgase f en forma finita, donde

$$f(x) = 1 + \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \cdots \qquad \{-1 < x < 1\}.$$

Solución. Ahora bien, en $\{-1 < x < 1\}$

$$f'(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

$$xf'(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

(¿Por qué podemos multiplicar término a término? Ver Ejercicio B2, Sección 14.1). Entonces

$$\frac{d}{dx}[xf'(x)] = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

De aquí que $$xf'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x),$$

de modo que $$f'(x) = \frac{-\log(1-x)}{x}$$

y $$f(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt + 1.$$

(¿Por qué tenemos + 1 al final?) Por el teorema de Abel, esta evaluación es válida en $\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

EJERCICIOS A

1. Calcular $f'(x)$ en cada una de las siguientes series y dar el intervalo de convergencia en cada caso:

   (a) $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^n}$ (b) $f(x) = \sum_0^\infty \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

   (c) $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ (d) $f(x) = \sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}$

2. Calcular $\int_0^x f(t)\,dt$ para cada parte del Ejercicio 1.

3. Evaluar $\lim_{x \to 1} f(x)$ para cada uno de los siguientes casos

   (a) $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$ (b) $f(x) = \sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}$

EJERCICIO B

1. Sumar las siguientes series:

   (a) $\sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}$ (b) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$ (c) $\sum_1^\infty nx^n$

   (d) $\sum_1^\infty \frac{nx^n}{(n+1)(n+2)}$ (e) $\sum_0^\infty n^2 x^n$ (f) $\sum_0^\infty x^{5k+1}$

EJERCICIOS C

1. Sea $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \quad \{-\infty < x < \infty\}$. Demostrar que para toda x, $f'(x) = f(x)$ y $f(0) = 1$, y deducir que $f(x) = e^x$. Sea cuidadoso; pueden existir puntos donde f se nulifique.
2. Supóngase que $f(x) = \Sigma a_n x^n$, con $a_n \geqslant 0$, tiene radio de convergencia 1. Demostrar que si $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sigma$, entonces Σa_n converge y $\sigma = \Sigma a_n$.

   (Este es un inverso del Teorema de Abel bajo la hipótesis adicional de que $a_n \geqslant 0$. La inversa exacta no es verdadera.)

16.3 LAS SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

Se desea considerar aquí la cuestión del desarrollo de una función dada, en términos de una serie de potencias. Con base en nuestro trabajo previo, puede verse que la serie debe poseer ciertas propiedades. Quizá la más sorprendente de estas propiedades es que la función debe poseer derivadas de todos los órdenes. Por el Corolario 16.2f hemos visto que cualquier serie de potencias tiene esta propiedad. De aquí que si una función es representable mediante una serie de potencias, también debe tener esta propiedad.

El estudiante podría preguntarse, y con razón, si esto es suficiente. Es decir, podría inquirir si toda función que es infinitamente diferenciable en un intervalo $\{-R < x < R\}$ es representable mediante una serie de potencias en ese intervalo. La respuesta es «No». Esto puede observarse por medio de ejemplos.

Antes de presentar un ejemplo de este tipo, observemos que puede escribirse inmediatamente la serie, si la función es representable en esa forma. Sea $f(x)$ una función dada, infinitamente diferenciable en $\{-R < x < R\}$. Si existen coeficientes a_n para los cuales

$$f(x) = \Sigma a_n x^n \qquad \{-R < x < R\},$$

entonces $$a_n = f^{(n)}(0)/n! \quad (\text{¿Por qué?})$$

Esto significa que, para cualquier función dada f, se sabe cuál es el único desarrollo en serie de potencias posible. La cuestión que debe encararse es ésta: ¿Es realmente una respuesta? Es decir, ¿cumple lo que requerimos: converge en $\{-R < x < R\}$? Y si converge, ¿es su suma la función que se requiere, a saber f?

Tal y como se señaló, la respuesta es «No». Puede observarse este hecho mediante el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es evidente que f tiene derivadas de todos los órdenes, excepto posiblemente en $x = 0$, lo cual debe manejarse separadamente. Primero calculemos $f'(0)$. Examinemos el cociente diferencia:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} e^{-1/x^2}.$$

Se desea determinar el límite de esta expresión conforme $x \to 0$. Sustituyendo $x = 1/t$, se obtiene

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = te^{-t^2} \to 0 \text{ conforme } x \to 0 \text{ (es decir conforme } t \to \infty).$$

De aquí que $f'(0) = 0$ y para $x \neq 0$ podemos calcular

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

En general, se ve que para $x \neq 0$, $f^{(k)}(x)$ es de la forma

$$e^{-1/x^2} P\left(\frac{1}{x}\right),$$

donde P es un polinomio en $1/x$. Por inducción, se concluye que $f^{(k)}(0) = 0$ para toda k. Los detalles de este argumento se dejan para los ejercicios.

Esto significa que todos los coeficientes en la serie que escribimos son cero. En otras palabras, para toda x la suma de la serie es 0. Pero la función que se desea representar mediante esa serie solamente es cero en un punto. De aquí que la serie no representa la función.

Veamos ahora bajo qué condiciones en f podría esperarse que la serie represente (es decir, converja hacia) la función f. Hemos indicado ocasionalmente que el hecho de que trabajemos con series centradas en $x = 0$ fue una cuestión de selección, porque cualquier serie de potencias de, digamos $(x - a)$ (es decir, centrada en $x = a$) podría llevarse hacia nuestra forma usual mediante una traslación $z = x - a$. Ahora escojamos para trabajar un punto arbitrario $x = a$.

Enfoquemos nuestra atención en la fórmula de Taylor con residuo como el medio de investigar este tema. Si se tiene una función f la cual es infinitamente diferenciable en un intervalo $\{-R < x - a < R\}$, podemos aplicar la fórmula de Taylor para cualquier x en nuestro intervalo y para todo n

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

y se tiene cualquiera de las varias maneras para expresar $R_{n+1}(x)$. De-

notemos por $S_n(x)$ la suma de los términos hasta $R_{n+1}(x)$. Entonces se tiene

$$f(x) - S_n(x) = R_{n+1}(x).$$

Debe enfatizarse que lo que debemos examinar es el comportamiento de este residuo.

16.3a Teorema. Sea $f(x)$ infinitamente diferenciable en

$$\{-R < x - a < R\}.$$

Si $R_{n+1}(x) \to 0$ conforme $n \to \infty$, entonces para esta x

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Demostración. La demostración de este teorema es inmediata a partir de la ecuación anterior. ∎

Esta serie se llama **serie de Taylor** de la función f. En ocasiones, si $a = 0$, recibe el nombre de **serie de Maclaurin**. No obstante, siempre nos referiremos a ella como serie de Taylor, sea o no $a = 0$.

16.3b Teorema. Toda serie de potencias es la serie de Taylor de su suma.

Demostración. Probar a partir del Corolario 16.2g. ∎

Esto explica el título de este capítulo.

EJEMPLO. Desarrollar e^x en una serie de Taylor en torno a $x = 0$.

Solución:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

De aquí que el desarrollo formal en serie está dado por

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Para saber si la serie converge hacia e debemos examinar el residuo. Sea x cualquier número fijo. Entonces

$$|e^x - S_n(x)| = |R_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)!}e^\xi |x|^{n+1},$$

donde ξ es un número entre 0 y x. Por lo tanto, si x es negativo $e^\xi < 1$; si x es positivo, $e^\xi < e^x$. En todo caso $e^\xi < e^{|x|}$. De aquí que

$$|e^x - S_n(x)| < e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}/(n+1)!$$

Ahora escojamos $N > 2|x|$ de modo que $|x|/N < 1/2$. Entonces para $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{e^{|x|}|x|^N}{N!}\,\frac{|x|^{n+1-N}}{(N+1)(N+2)\cdots(n+1)} \\ &= \frac{e^{|x|}\,|x|^N}{N!}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdot\frac{|x|}{N+2}\cdots\frac{|x|}{n+1} < \frac{e^{|x|}\,|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N} \\ &= \frac{2^N e^{|x|}\,|x|^N}{N!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Mantengamos ahora N y x fijos y hagamos que $n \to \infty$. Entonces se ve que el factor $(1/2)^n \to 0$, mientras que los demás no cambian. De aquí que $R_{n+1} \to 0$, y, por lo tanto, se ha probado que

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^n/n! + \cdots \quad \{-\infty < x < \infty\}.$$

De modo semejante se encuentra que

$$\operatorname{sen} x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\{-\infty < x < \infty\},$$

y

$$\cos x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - + \cdots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\{-\infty < x < \infty\}.$$

La serie de Taylor puede escribirse en una notación muy compacta y fácil de recordar. El estudiante está familiarizado con el operador diferencial $D = d/dx$, por su uso en ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, puede escribirse $D^2 = d^2/dx^2 \cdots$, de modo que una expresión como

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy$$

se escribe como

$$(aD^2 + bD + c)y.$$

Aunque debemos ser cuidadosos en el manejo de D. Por ejemplo,

$$xDy \neq D(xy). \qquad (\text{¿Por qué?})$$

Escribamos la serie de Taylor en la forma obtenida al remplazar a por x y x por $x + h$. Entonces $x - a$ se transforma en h y la serie toma la forma

$$f(x + h) = \sum_0^\infty \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_0^\infty \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

En términos del operador D, esto se transforma en

$$f(x + h) = \sum_0^\infty \frac{h^n}{n!} D^n f(x) = \left[\sum_0^\infty \frac{(hD)^n}{n!}\right] f(x).$$

La suma formal que se encuentra entre corchetes es el desarrollo formal de e^{hD}, de manera que

$$f(x + h) = e^{hD} f(x).$$

El estudiante debe darse cuenta que e^{hD} representa una operación y no un número y la operación que representa está definida por los desarrollos anteriores.

EJERCICIOS A

1. Desarrollar las siguientes funciones en series de Taylor centradas en los puntos indicados. Determinar el radio de convergencia en cada caso:

   (*a*) sen x, $\pi/4$ (*b*) cos x, $3\pi/4$ (*c*) log $(1 + x)$, 0

   (*d*) a^x, 0 (*e*) $\sqrt{1 + x}$, 0 (*f*) log $(1 - x)$, 0

   (*g*) $\sqrt{x}$, 4 (*h*) e^x, 1 (*i*) $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$, 0

   (*j*) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^3}\,dt$, 0 (*k*) $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt$, 0 (*l*) $\displaystyle\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt$, 0.

2. Evaluar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3}\,dx$ correcta hasta tres cifras decimales.

3. Desarrollar $(1 + x)^x$ en una serie de potencias en torno a $x = 0$. Obsérvese que la convergencia de esta serie ya ha sido discutida en el Ejercicio B 2 de la Sección 14.6.

4. Demostrar que si f es impar, la serie de Taylor alrededor del origen puede escribirse en la forma

$$f(h) = \operatorname{senh}(hD) f(0);$$

que si f es par, puede escribirse en la forma

$$f(h) = \cosh(hD) f(0).$$

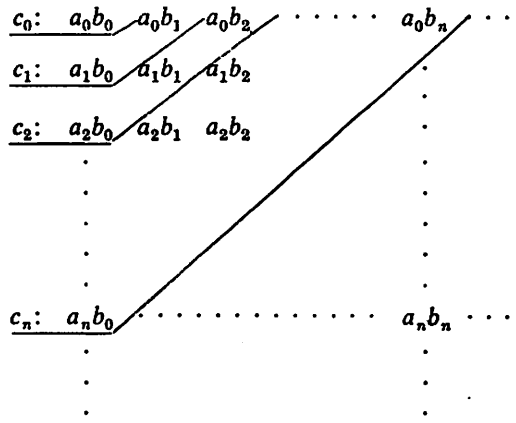
16.4 LA ARITMETICA DE LAS SERIES DE POTENCIAS

En sus intervalos de convergencia, las series de potencias representan funciones. En ocasiones es necesario realizar las operaciones elementales de la aritmética (adición, sustracción, multiplicación, división) sobre estas

funciones. En lo que se refiere a la adición y la sustracción, la situación es muy sencilla y se manejan en los problemas (ver Ejercicio B1). La multiplicación y la división, sin embargo, son más complicadas. Primero probaremos un teorema general acerca de la multiplicación de series, el cual se pospuso hasta ahora debido al hecho de que su principal aplicación es para las series de potencias.

16.4a Teorema. Sean $\sum_0^\infty a_n$ y $\sum_0^\infty b_n$ series absolutamente convergentes con sumas A y B, respectivamente. Defínase $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$. Entonces $\sum_0^\infty c_n$ es absolutamente convergente y su suma es $C = A \cdot B$.

Demostración. Antes de dar detalles de la demostración, nótese que todos los términos posibles de la forma $a_i b_k$ pueden arreglarse del modo siguiente:



Se ve que c_n es precisamente la suma de todos los términos para los cuales la suma de los índices es n — esto es, la suma de todos los términos que se encuentran en la n — ésima diagonal. De aquí que $\sum_0^n c_k$ es la suma de todos los términos sobre o arriba de la n — ésima diagonal.

Ahora convendremos en la siguiente notación:

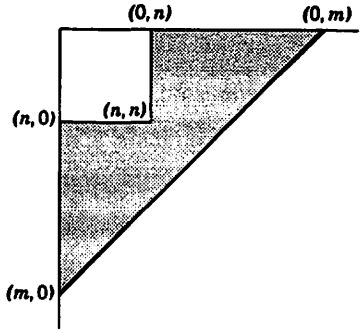
$$A_n = \sum_0^n a_k \qquad B_n = \sum_0^n b_k \qquad C_n = \sum_0^n c_k$$

$$A_n' = \sum_0^n |a_k| \qquad B_n' = \sum_0^n |b_k|$$

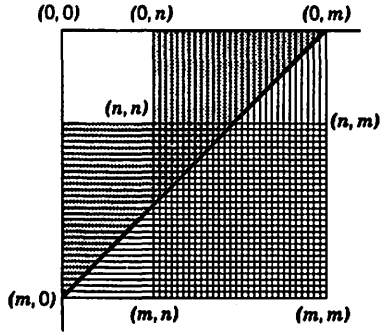
$$A' = \sum_0^\infty |a_k| \qquad B' = \sum_0^\infty |b_k|.$$

Supondremos que ni A' ni B' se nulifican. (¿Por qué?). Obsérvese que $A_n \cdot B_n$ es la suma de todos los términos en un cuadrado de lado n con una esquina en el término a_0b_0. Supuesto que $A_n \to A$ y $B_n \to B$, $A_nB_n \to AB$. De aquí que para cada $\epsilon > 0$ existe un $N_1(\epsilon)$ tal que

$$|A_nB_n - AB| < \epsilon \qquad \text{si } n > N_1.$$



Ahora consideremos $|C_m - A_nB_n|$. Esta es la suma de todos los términos arriba de la m — ésima diagonal menos la suma de los términos en el n — ésimo cuadrado. Si $m > 2n$, entonces esta diferencia es precisamente la suma de aquellos términos que se encuentran en el área sombreada del primer diagrama.



Estimemos esta suma a partir de lo anterior, remplazando cada término por su valor absoluto, lo cual conduce a una suma mayor. Todavía se obtiene una suma mayor si se remplaza esta suma por la suma de los valores absolutos de todos los términos en el área sombreada en el segundo diagrama. Una vez más, todavía se obtiene una suma mayor sumando los valores absolutos de todos los términos en el rectángulo con sombreado vertical a aquellos que se encuentran en el rectángulo

con sombreado horizontal, tomando de esta manera por dos veces aquellos términos que se encuentran en el área con sombreado cruzado. La suma de los términos en el rectángulo con sombreado vertical es $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{m} |a_jb_k|$, y la suma de los términos en el otro rectángulo es $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} |a_jb_k|$. De aquí que si $m > 2n$,

$$\begin{aligned} |C_m - A_nB_n| &< \sum_{n+1}^{m} |a_j| \cdot \sum_{0}^{m} |b_k| + \sum_{0}^{m} |a_j| \sum_{n+1}^{m} |b_k| \\ &= B_m' \sum_{n+1}^{m} |a_j| + A_m' \sum_{n+1}^{m} |b_k| < B' \sum_{n+1}^{m} |a_j| + A' \sum_{n+1}^{m} |b_k| \\ &= B'(A_m' - A_n') + A'(B_m' - B_n'). \end{aligned}$$

Las sucesiones A_n' y B_n' convergen. De aquí que, dado $\epsilon > 0$, existe un $N_2(\epsilon)$ para el cual

$$|A_m' - A_n'| < \epsilon \quad \text{y} \quad |B_m' - B_n'| < \epsilon \quad \text{si } n > N_2.$$

Si $n > N_2$ y $m > 2n$, entonces

$$|C_m - A_n \cdot B_n| < \epsilon B' + \epsilon A'.$$

Ahora podemos colocar nuestras estimaciones juntas para completar la demostración. Escojamos $m > N(\epsilon) \equiv$ el doble del mayor entre $N_1(\epsilon)$ y $N_2(\epsilon)$. Escojamos n mayor que $(1/2)N(\epsilon)$ y menor que $(1/2)m$. Entonces

$$\begin{aligned} |C_m - AB| &\leqslant |C_m - A_nB_n| + |A_nB_n - AB| \\ &\leqslant B'\epsilon + A'\epsilon + \epsilon \\ &= \epsilon(A' + B' + 1). \end{aligned}$$

Esto prueba que $\Sigma c_n = AB$. Ahora debemos demostrar que $\Sigma|c_n|$ converge. Observemos que la parte completada del teorema se aplica a las series $\Sigma|a_n|$ y $\Sigma|b_n|$. De aquí que si

$$c_n' = \sum_{k=0}^{n} |a_kb_{n-k}|,$$

entonces, según la demostración ya completada, $\Sigma c_n'$ converge. Pero

$$|c_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \right| < \sum_{k=0}^{n} |a_kb_{n-k}| = c_n',$$

de modo que por la prueba de comparación Σc_n converge absolutamente. ∎

Como se indicó previamente, la aplicación principal de este teorema general es en las series de potencias, tal y como se muestra en el siguiente teorema.

16.4b Teorema. Supóngase que $f_1(x) = \Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia R_1 y $f_2(x) = \Sigma b_n x^n$ radio de convergencia R_2. Entonces el producto $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ se representa por una serie de potencias $\Sigma c_n x^n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ en el intervalo $\{-R < x < R\}$, donde $R = \min(R_1, R_2)$.

En realidad, es posible que el radio de convergencia sea mayor que R_1 y también que R_2. Sin embargo, la interpretación propia en ese caso debe esperar el estudio de la teoría de las funciones analíticas. Ahora se demostrará el teorema.

Demostración. Sea x cualquier punto en el intervalo $\{-R < x < R\}$. Entonces tanto $\Sigma a_n x^n$ como $\Sigma b_n x^n$ son absolutamente convergentes, de manera que se aplica el teorema anterior. ∎

EJEMPLO. Desarrollar $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ en una serie de potencias.

Solución:

$$\log(1+x) = -\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = -\sum_{1}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (-1)^{n-k}$$

$$= -\sum_{1}^{\infty} (-1)^n x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Sea $H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$. Entonces

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = -\sum_{1}^{\infty} (-x)^n H_n.$$

Veamos ahora la división de series de potencias. Es evidente que basta el estudio del caso de dividir 1 entre una serie de potencias, puesto que

$$(\Sigma b_n x^n)/(\Sigma a_n x^n) = (\Sigma b_n x^n) \cdot (1/\Sigma a_n x^n).$$

También es evidente que puede suponerse que el primer coeficiente es 1; es decir $a_0 = 1$. No se considerará el caso en que $a_0 = 0$ (ver Ejercicio B2). Para cualquier otro a_0, simplemente se divide entre él, dejando el primer coeficiente igual a 1:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + (a_1/a_0)x + (a_2/a_0)x^2 + \cdots}.$$

Estos comentarios deben explicar la forma algo especial del teorema.

16.4c Teorema. Sea $\Sigma a_n x^n$ una serie en la cual $a_0 = 1$ y que tiene un radio de convergencia R diferente de cero. Entonces $1/(\Sigma a_n x^n) = \Sigma b_n x^n$ con un radio de convergencia diferente de cero. Los coeficientes b se determinan recursivamente (uno después del otro) mediante

$$b_0 = 1$$
$$b_1 = -a_1 b_0$$
$$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0)$$
$$\vdots$$
$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} (a_k b_{n-k})$$
$$\vdots$$

El estudiante recordará que anteriormente se dijo que en ocasiones tendríamos que conformarnos simplemente con una estimación para el radio de convergencia. Este es un caso de ese tipo. La demostración es típica de ciertas clases de demostraciones en el análisis.

Demostración. Si existe una solución, entonces

$$(\Sigma a_n x^n)(\Sigma b_n x^n) = 1.$$

Pero
$$(\Sigma a_n x^n)(\Sigma b_n x^n) = \Sigma c_n x^n,$$

donde
$$c_n = \sum_{0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

De aquí que, por la unicidad del desarrollo en serie de potencias

$$c_0 = 1, c_n = 0, n = 1, 2, \ldots. \text{(¿Por qué?)}$$

Esto es
$$a_0 b_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

o bien
$$a_0 b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Supuesto que $a_0 = 1$, esto completa la determinación de los coeficientes b.

Ahora debe demostrarse que la serie $\Sigma b_n x^n$ tiene un radio de convergencia diferente de cero. Para hacerlo, estimemos los coeficientes b. Obsérvese que si r es cualquier número $0 < r < R$, entonces $\Sigma a_n r^n$ converge. De aquí que existe una constante $M \geqslant 1$ para la cual

$$|a_n r^n| < M \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o bien
$$|a_n| < \frac{M}{r^n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Entonces

$$|b_0| = 1 = |a_0| < M$$

$$|b_1| = |a_1 b_0| = |a_1| < \frac{M}{r}.$$

$$|b_2| < |a_1 b_1| + |a_2 b_0| < \frac{M}{r}\cdot\frac{M}{r} + \frac{M}{r^2}M < \frac{2M^2}{r^2},$$

$$|b_3| < |a_1 b_2| + |a_2 b_1| + |a_3 b_0| < \frac{M}{r}\cdot\frac{2M^2}{r^2} + \frac{M}{r^2}\cdot\frac{M}{r} + \frac{M}{r^3}$$

$$< \frac{M^3}{r^3}(2+1+1) = 4\frac{M^3}{r^3} = 2^2\frac{M^3}{r^3}.$$

Por inducción se obtiene

$$|b_n| < 2^{n-1}M^n/r^n < 2^n M^n/r^n.$$

Por tanto $\quad \sqrt[n]{|b_n|} < 2M/r \qquad n = 1, 2, \ldots,$

y, en consecuencia, $\quad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|b_n|} < 2M/r.$

De aquí que el radio de convergencia es

$$1/\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|b_n|} > \frac{r}{2M} > 0.$$

Salta a la vista que los coeficientes b_n son precisamente aquellos obtenidos mediante división sin fin.

EJEMPLO. Calcular $\quad 1/\left(\sum_0^\infty x^n/n!\right) = 1/\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right).$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} & 1 - x + x^2/2! - \cdots \\ \hline 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots & 1 \\ & 1 + x + x^2/2! + \cdots \\ \hline & -x - x^2/2! - x^3/3! \cdots \\ & -x - x^2 - x^3/2! - \\ \hline & \vdots \end{array}$$

EJERCICIOS A

1. Elevando al cuadrado ambos miembros de $(1-x)^{-1} = \sum x^n$, demostrar que

$$(1-x)^{-2} = \sum_0^\infty (n+1)x^n.$$

2. Mediante la multiplicación de series de potencias, calcular los primeros términos en los desarrollos en torno a $x = 0$ de:
   (*a*) $\operatorname{sen} x \cos x$ (*b*) $e^x \operatorname{sen} x$
   (*c*) $\operatorname{sen} x \operatorname{ang} \operatorname{sen} x$ (*d*) $e^x \cos x$ (*e*) $(e^x)^2$
3. Mediante la división de series de potencias, calcular los primeros términos en torno a $x = 0$ de:
   (*a*) $\dfrac{1}{\cos x}$ (*b*) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (*c*) $\dfrac{1}{\cosh x}$
   (*d*) $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ (*e*) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ (*f*) $\dfrac{1}{e^x + 1}$

EJERCICIOS B

1. Deducir una fórmula general para los coeficientes b_n, definidos por

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\Sigma a_n x^n = \Sigma b_n x^n.$$

2. Supóngase que $f(x) = x^p \sum_0^\infty a_n x^n$, donde p es un entero positivo y $a_0 \neq 0$. Sea $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ y supóngase que ambas series tienen radios de convergencia diferentes de cero. Demostrar que para alguna vecindad agujereada de 0 (es decir, perforada en $x = 0$),

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{c_{-p}}{x^p} + \frac{c_{-p+1}}{x^{p-1}} + \cdots \frac{c_1}{x} + c_0 + c_1 x + \cdots.$$

3. Calcular los primeros términos de los desarrollos del tipo considerado en el Ejercicio 2 para $\csc x$ y $\cot x$.
4. Verificar que $d/dx \cot x = -\csc^2 x$ se cumple para los primeros términos de las series calculadas en el Ejercicio 3.

EJERCICIOS C

1. Verificar mediante la multiplicación de series que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.
   (*Sugerencia:*

$$(1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + 1 = 2^n$$

$$(1-1)^n = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n = 0.)$$

2. Los números de Bernoulli B_n se definen por $\dfrac{x}{e^x - 1} = \sum_0^\infty \dfrac{B_n}{n!}x^n$. Probar que $B_{2k+1} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ y que $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = -1/42$, $B_8 = -1/30$.
3. Demostrar que $\dfrac{1}{e^x + 1} = -\sum_0^\infty B_n(2^n - 1)\dfrac{x^{n-1}}{n!}$, donde los coeficientes B se definen como en el Ejercicio 2 anterior.

4. Probar que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ mediante la multiplicación de series. Aplicar la sugerencia dada en el Ejercicio 1 anterior.

16.5 SUBSTITUCION E INVERSION

A continuación se establecerán dos teoremas acerca de las series de potencias. El primero es un teorema de substitución. Las demostraciones se desarrollan mejor dentro del marco de la teoría de las funciones analíticas. Cualquier demostración que se diera aquí sería difícil y embarazosa.

16.5a Teorema. Supóngase que $g(y) = \sum_0^\infty a_n(y - y_0)^n$ converge en $\{-R_1 < y - y_0 < R_1\}$ y que $f(x) = b_0 + \sum_1^\infty b_n(x - x_0)^n$ converge en $\{-R_2 < x - x_0 < R_2\}$. Si $y_0 = b_0$, entonces existe un intervalo $\{-R_3 < x - x_0 < R_3\}$ en el cual $|f(x) - y_0| < R_1$. La función compuesta dada por $h(x) = g[f(x)]$ puede expresarse como un desarrollo de Taylor $h(x) = \sum_0^\infty c_n(x - x_0)^n$ en $\{-R_3 < x - x_0 < R_3\}$, donde los coeficientes c están determinados por la identidad

$$\sum_0^\infty c_n(x - x_0)^n = \sum_0^\infty a_n\left[\sum_1^\infty b_k(x - x_0)^k\right]^n.$$

Sea la función f dada por una serie de potencias $f(x) = \Sigma a_n(x - x_0)^n$ en un intervalo $\{-R < x - x_0 < R\}$. Si $f'(x_0) \neq 0$ (es decir, si $a_1 \neq 0$), entonces, por la continuidad, existe un intervalo I: $\{-r_1 < x - x_0 < r_1\}$ en el cual $f'(x)$ tiene el mismo signo que $f'(x_0)$. Entonces se ve que, en el intervalo I, la función f es monótona creciente o decreciente de acuerdo con que $f'(0) > 0$ o bien $f'(0) < 0$. Bajo estas condiciones, el Teorema 3.4a garantiza la existencia de una función inversa en una vecindad del punto $y_0 = a_0$. Es decir, existe un $r_2 > 0$ y una función ϕ definida en $\{-r_2 < y - a_0 < r_2\}$ la cual es inversa a f. Entonces es natural preguntar si ϕ puede representarse en potencias de $y - a_0$. La respuesta está dada por el siguiente teorema.

16.5b Teorema. Supóngase que $f(x) = \sum_0^\infty a_n(x - x_0)^n$ converge en $\{-R < x - x_0 < R\}$ y sea $a_1 \neq 0$. Entonces existe un r y una función inversa ϕ definida por

$$x = \phi(y) = x_0 + \sum_1^\infty b_n(y - a_0)^n \qquad \{|y - a_0| < r\},$$

donde los coeficientes b_n están dados por

$$x = x_0 + \sum_1^\infty b_n\left[\sum_{k=1}^\infty a_k(x - x_0)^k\right]^n.$$

EJEMPLO 1. Calcular los primeros términos del desarrollo de $e^{\text{sen } x}$ en torno a $x = 0$.

Solución:

$$e^{\text{sen } x} = \sum_0^\infty \frac{(\text{sen } x)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)^n$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 + \frac{1}{3!}(x - \cdots)^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

EJEMPLO 2. Calcular los primeros términos de ang sen y a partir del desarrollo para sen x.

Solución: Sea ang sen $y = \sum_1^\infty b_n y^n$. Entonces

$$x = \sum_1^\infty b_n y^n = \sum_1^\infty b_n\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)^n$$

$$= b_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) + b_2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)^2$$

$$+ b_3\left(x - \frac{1}{3!}x^3 - \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= b_1x + b_2x^2 + x^3\left(-\frac{1}{3!}b_1 + b_3\right) + \cdots.$$

De aquí que

$$b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = \frac{1}{3!}, \ldots.$$

Por lo tanto

$$\text{ang sen } y = y + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots.$$

16.6 SERIES COMPLEJAS

Recordemos los hechos básicos acerca de los números complejos.

La letra i representa la unidad imaginaria que se caracteriza por la relación

(1) $$i^2 = -1.$$

Si x y y son números reales, la expresión $z = x + iy$ se llama **número complejo**; x es su **parte real** y y su **parte imaginaria**. La adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos se describen por las siguientes relaciones. Aquí $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$(2) \qquad z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

$$(3) \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$(4) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad z_2 \neq 0.$$

El número complejo $z = x + iy$ puede representarse gráficamente por el punto o vector (x, y). La longitud del vector (x, y) (o, en otras palabras, la distancia del punto (x, y) al origen) se llama **valor absoluto** de z y se escribe $|z|$. De donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Algunas veces $|z|$ recibe el nombre de **módulo** de z.

Si se introducen coordenadas polares (ρ, θ), entonces las relaciones $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ nos permiten expresar el número complejo $z = x + iy$ en la forma

$$(5) \qquad z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Evidentemente $|z| = \rho$. El ángulo θ, llamado **argumento** de z, se denota frecuentemente por $\theta = \arg z$. Es evidente que θ está determinado hasta un múltiplo aditivo de 2π.

Si $z = x + iy$, el número $x - iy$ se llama **conjugado complejo** de z y se denota por $\bar{z}$. Nótese que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\bar{\bar{z}} = z$, y $|z|^2 = z\bar{z}$.

Enfocaremos ahora nuestra atención hacia algunas desigualdades sencillas pero importantes.

16.6a Teorema:

(i) Si $z = x + iy$, donde x y y son reales, entonces

$$|x| \leq |z| \quad \text{y} \quad |y| \leq |z|.$$

(ii) Si z_1 y z_2 son números complejos, entonces

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Demostración:

(i) $|x| = |\rho \cos \theta| \leqslant \rho = |z|$.

(ii) Esto se deduce a partir de la desigualdad del triángulo para los vectores. También puede verse directamente mediante

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2.$$

Ahora bien, $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$, de manera que la cantidad que se encuentra en el paréntesis es el doble de la parte real de $\bar{z}_1 z_2$, la cual por la parte (i) de este teorema es menor que $2|\overline{z_1} z_2| = 2|z_1| \cdot |z_2|$. Así que

$$|z_1 + z_2|^2 < |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \qquad \blacksquare$$

Supóngase que se tiene una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos. El límite se define exactamente como para los números reales: El número A es el límite de la sucesión si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que

$$|a_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

La terminología, notación y muchas de las demostraciones que se refieren a los límites de las sucesiones pueden tomarse completamente del caso real, puesto que dependen principalmente de la definición de límite y de la desigualdad del triángulo, las cuales tienen la misma forma en los dos casos.

En particular, el criterio de Cauchy para la convergencia de las sucesiones complejas no cambia. Sin embargo, esto no es una transcripción completamente trivial sino que es una consecuencia del Teorema 9.2c, sobre el criterio de Cauchy en los espacios dimensionales superiores.

El siguiente teorema se refiere a la relación entre el límite de una sucesión compleja y los límites de sus partes real e imaginaria.

16.6b Teorema. Para que una sucesión compleja $\{a_n\}$, donde $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ tenga un límite $A = \alpha + i\beta$, es necesario y suficiente que $\alpha_n \to \alpha$ y $\beta_n \to \beta$.

Demostración. Supóngase primero que $a_n \to A$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que

$$|a_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Pero por el Teorema 16.6a (i),

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant |a_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N$$

y

$$|\beta_n - \beta| \leqslant |a_n - A| < \epsilon \qquad \text{si } n > N.$$

Por lo tanto $\alpha_n \to \alpha$ y $\beta_n \to \beta$.

Supóngase ahora que $\alpha_n \to \alpha$ y $\beta_n \to \beta$. Se desea demostrar que $a_n \to A$. Sea dado $\epsilon > 0$. Existe un $N_1(\epsilon)$ y un $N_2(\epsilon)$ tal que

$$|\alpha_n - \alpha| < \epsilon/2 \qquad \text{si } n > N$$

y

$$|\beta_n - \beta| < \epsilon/2 \qquad \text{si } n > N_2.$$

Sea $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces para $n > N$ se tiene

$$|a_n - A| = |(\alpha_n - \alpha) + i(\beta_n - \beta)| < |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos, definimos la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ como una serie infinita de números complejos. La convergencia de

la serie se define precisamente como en el caso real, a saber Σa_n converge si la sucesión de sumas parciales converge. Los conceptos de convergencia absoluta y condicional no cambian.

Una serie de potencias $\Sigma a_n z^n$ en una variable compleja converge en un **círculo de convergencia** dado por

$$|z| < R,$$

donde el radio de convergencia R está dado por la fórmula de **Cauchy-Hadamard.**

$$R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Por el teorema de DeMoivre de la trigonometría (Ejercicio A4),

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta,$$

en ocasiones, las fórmulas complejas pueden usarse para sumar ciertas expresiones trigonométricas.

EJEMPLO. Sumar $S = \sum_1^n \cos k\theta$.

Solución. Sea $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$S = Re\left(\sum_1^n z^k\right),$$

donde $Re(\ )$ denota la parte real de todo lo que se encuentra dentro del paréntesis. Ahora bien

$$\sum_1^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\operatorname{sen}(n+1)\theta}{1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}.$$

Por medio de un poco de trigonometría se deduce que

$$S = Re\left(\sum_1^n z^k\right) = \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\theta}{2\operatorname{sen} 1/2\theta} - \frac{1}{2}.$$

De aquí que $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\theta}{\operatorname{sen} 1/2\theta}$.

16.7 FUNCIONES ANALITICAS REALES

Se dice que una función de una variable real o compleja es **analítica** en un punto a en su dominio si puede desarrollarse en una serie de potencias centrada en a. El estudio de las funciones analíticas se realiza más fácilmente para las variables complejas, haciéndose pronto evidente que la restricción de realidad es incómoda y verdaderamente no natural. El teorema que se desea probar aquí es tan sencillo en el caso real como

en el complejo; de hecho, la demostración que se da es igualmente válida para las funciones complejas.

Hemos visto que una condición necesaria para que una función (real) sea analítica es que sea infinitamente diferenciable. También hemos visto que esta condición no es suficiente —existen funciones infinitamente diferenciables las cuales no pueden desarrollarse en una serie de potencias. Ahora se desea dar un conjunto de condiciones el cual es necesario y suficiente para que una función sea analítica. Por simplicidad, supongamos que el centro de la serie de potencias se encuentra en el origen.

16.7a Teorema. Sea f definida en una vecindad del origen. Para que f sea analítica en el origen es necesario y suficiente que f sea infinitamente diferenciable y que existan dos constantes r y K tales que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{rKn!}{(r - |x|)^{n+1}} \qquad \text{en } \{-r < x < r\}.$$

Demostración. Necesidad. Ya se ha visto la necesidad de la diferenciabilidad infinita. Falta obtener las estimaciones. Supóngase que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \{-R < x < R\}.$$

Por el Corolario 16.2f,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k k!}{(k-n)!} x^{k-n}.$$

Escójase cualquier $r < R$. Existe un K para el cual

$$|a_k r^k| < K \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces para $|x| < r$,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &< \sum_{k=n}^{\infty} |a_k r^k| \frac{k!}{(k-n)!\, r^n} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-n} \\ &< \frac{K}{r^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-n} \\ &= \frac{K}{r^n} \frac{n!}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{rKn!}{(r - |x|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

donde la serie se suma mediante el Ejemplo 2 de la Sección 16.2.

Suficiencia. Ahora supóngase que f es infinitamente diferenciable y que se satisface la estimación del teorema. Entonces, por la fórmula de Taylor con residuo

$$f(x) - S_n(x) = R_{n+1}(x),$$

donde S_n y R_{n+1} tienen el significado acostumbrado. Escójase x con $|x| < r/2$ y manténgase fija. Entonces

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\bar{x})|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$< \frac{rK(n+1)!}{(r-|x|)^{n+2}}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{rK}{(r-|x|)}\left(\frac{|x|}{r-|x|}\right)^{n+1} \to 0 \quad \text{conforme } n \to \infty,$$

puesto que $|x| < r/2$. ∎

EJERCICIOS A

1. Por sustitución, calcular los primeros términos de los desarrollos de Taylor en torno a 0, para las funciones siguientes:
   (*a*) $e^{\cos x}$ (*b*) $e^{\tan x}$ (*c*) $\log \cos x$
2. Por inversión, calcular los primeros términos de los desarrollos de Taylor para las funciones siguientes:
   (*a*) tan y en torno a 0 a partir de ang tan x
   (*b*) ang cos y en torno a 0 a partir de cos x
   (*c*) ang senh y en torno a 0 a partir de senh x.
3. Probar el teorema de DeMoivre para el entero n:
   $$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$
4. A partir de $\Sigma z^n = 1/(1-z)$ con $|z| < 1$, deducir las sumas de $\Sigma r^n \cos n\theta$ y $\Sigma r^n \operatorname{sen} n\theta$, donde $0 \leqslant r < 1$.
5. Demostrar que sen x y cos x son analíticas para toda x.

17

Integrales impropias

17.1 INTEGRALES IMPROPIAS. CONVERGENCIA CONDICIONAL Y ABSOLUTA

Nuestra definición de integral requirió que el intervalo de integración fuera acotado y también que la función f que se integra fuera acotada en I. Existen ciertas extensiones del concepto de integral que nos permiten eliminar uno o ambos de estos requerimientos en algunos casos. Estas extensiones se llaman integrales impropias. Dichas integrales se definieron brevemente en el Capítulo 4. Ahora se desea restablecer esas definiciones y estudiar las integrales impropias sistemáticamente.

La teoría de las integrales impropias guarda una considerable semejanza a la de las series infinitas y el tratamiento que se les dé en este capítulo será análogo al estudio previo realizado con las series infinitas. Empezaremos por formular las definiciones de las integrales impropias.

Sea f definida en un intervalo $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Supóngase además que f es integrable en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c entre a y b y que f no es acotada en toda vecindad de b; es decir, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos que tienden hacia b para los cuales $|f(x_n)| \to +\infty$. El punto b se llamará **punto singular** o **singularidad** de la función f. El símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ se llamará **integral impropia** de f desde a hasta b. Se dirá que la integral impropia **converge** o **existe** si

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx$$

existe y este límite recibirá el nombre de **valor** de la integral. Si el límite no existe se dirá que la integral **diverge** o que no existe.

La integral impropia se define de modo análogo si el punto singular se encuentra en el límite inferior:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Un punto singular c también puede presentarse como un punto interior de un intervalo $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. En este caso, antes de afirmar que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, ambas integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ deben existir. Se dice que el valor de la primera integral es la suma de la segunda y la tercera. Y si ambos límites, superior e inferior, son puntos singulares, entonces antes de afirmar que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$ deben existir; y una vez más se dice que el valor de la primera integral es la suma de la segunda y la tercera. El estudiante debe convencerse por sí mismo que el valor de esta suma es independiente del punto c intermedio que se escoja.

Sea $f(x)$ definida en $\{a \leqslant x\}$ e integrable (es decir, propiamente integrable) en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para todo $b > a$. Entonces el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se llamará **integral impropia** de f desde a hasta ∞. Se dice que la integral **converge** o **existe** si

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existe y el límite se llamará **valor** de la integral. En este caso se dirá que el «punto ∞» es un punto singular, aunque f se transforme o no en no acotada conforme $x \to \infty$. Si el límite no existe se dirá que la integral **diverge** o que no existe.

EJEMPLO 1. Investigar la convergencia o divergencia de $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

Solución:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b} \to 1 \quad \text{conforme } b \to \infty$$

De aquí que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

EJEMPLO 2. Investigar $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución:

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_a^1 = \frac{1}{a} - 1 \to +\infty \quad \text{conforme } a \to 0.$$

De aquí que $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge.

EJEMPLO 3. Investigar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

Solución: Primero nótese que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ conforme $x \to 0$. De aquí que el integrando es no singular en $x = 0$. La singularidad se encuentra en el límite superior.

Escójase cualquier $b > 0$. Entonces existe una n tal que $b = n\pi + r_n$, donde $0 \leqslant r_n \leqslant \pi$. Evidentemente que entonces $n \to \infty$ conforme $b \to \infty$.

De aquí que puede escribirse

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{n\pi}^{n\pi+r_n} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \equiv I_1 + I_2,$$

respectivamente.

Examinemos I_2:

$$\left|\int_{n\pi}^{n\pi+r_n} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| < \int_{n\pi}^{n\pi+r_n} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx < \int_{n\pi}^{n\pi+r_n} \frac{1}{n\pi}\,dx < \frac{\pi}{n\pi} = \frac{1}{n}.$$

De aquí que $I_2 \to 0$ conforme $b \to \infty$. Por lo tanto es suficiente probar que I_1 tiene un límite conforme $b \to \infty$.

Ahora bien

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

donde

$$b_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Evidentemente que los signos de los coeficientes b alternan. Son decrecientes (¿por qué?) y $b_k \to 0$ (por la misma razón que $I_2 \to 0$). Por lo tanto I_1 es una suma parcial de una serie alternante convergente. Así que se ha demostrado que

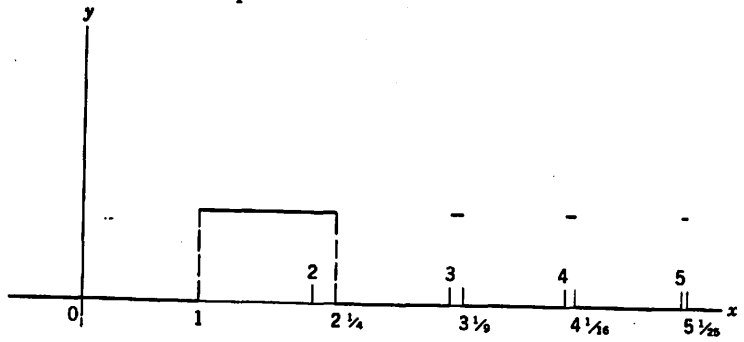
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

converge. Esta integral se evaluará en el siguiente capítulo.

El último ejemplo nos ayudó a puntualizar la analogía entre las series y las integrales —una analogía que guiará nuestro desarrollo en todo este capítulo—. No obstante, debemos ser cuidadosos porque esta analogía tiene sus límites: es una analogía y no un isomorfismo. Por ejemplo, puesto que $a_n \to 0$ en toda serie convergente Σa_n, podría pensarse que si $\int_a^\infty f(x)\,dx$

converge, entonces $f(x) \to 0$ *conforme* $x \to \infty$. Para observar que esto no es así, examinemos la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < x < n + 1/n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{para toda otra } x. \end{cases}$$



Entonces es evidente que para $n < a < n + 1$,

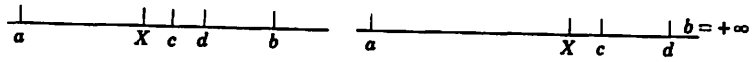
$$\sum_1^n \frac{1}{k^2} < \int_0^a f(x)\,dx < \sum_1^{n+1} \frac{1}{k^2},$$

de modo que

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2},$$

mientras que es obvio que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Existe un **criterio de Cauchy** para la convergencia de las integrales impropias. El diagrama ayudará a ilustrar la redacción del teorema.



17.1a Teorema. Sea b un número finito o el símbolo ∞ y sea f definida en $\{a \leqslant x < b\}$ e integrable en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c entre a y b. Una condición necesaria y suficiente para que $\int_a^b f(x)\,dx$ exista es que para cada $\epsilon > 0$ exista un $X(\epsilon)$ tal que

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| < \epsilon \quad \text{para } X < c < d < b.$$

Demostración. Sea

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx.$$

Entonces el teorema es precisamente un restablecimiento del criterio de Cauchy para la existencia del límite de la función $F(y)$. (Ver el Teorema 6.2b.) ∎

Es evidente que se cumple un criterio semejante para la existencia de una integral impropia cuando la singularidad es en el límite inferior.

Distinguiremos integrales convergentes absoluta y condicionalmente. Se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ (una vez más b puede ser finito o bien ∞) es **absolutamente convergente** si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ es convergente. Pero si la primera integral converge y la segunda diverge, entonces se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ es **condicionalmente convergente.**

EJEMPLO 4. Probar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$ respecto a la convergencia absoluta.

Solución. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Entonces

$$|f(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

y

$$\int_c^d |f(x)|\,dx < \int_c^d x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big|_c^d = 2(\sqrt{d} - \sqrt{c}) < 2\sqrt{d}.$$

Dado $\epsilon > 0$, escojamos $X(\epsilon) = \epsilon^2/4$. Entonces para $0 < c < d < X(\epsilon)$,

$$\int_c^d |f(x)|\,dx < 2\sqrt{d} < \epsilon.$$

De aquí que la integral converge absolutamente.

Precisamente, como en el caso de las series, la convergencia absoluta implica la convergencia ordinaria.

17.1b Teorema. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia absolutamente convergente, es convergente.

Demostración. En el teorema, b puede ser un punto finito o bien ∞. La demostración se deduce a partir de la desigualdad $\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| < \int_c^d |f(x)|\,dx$ con una aplicación en dos formas del criterio de Cauchy. (Ver la demostración del teorema análogo para las series.) ∎

EJEMPLO 5. Evaluar $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

Solución:

$$\int_0^a xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^a + \int_0^a e^{-x}\,dx.$$

$$= -ae^{-a} + 1 - e^{-a} \to 1 \quad \text{conforme } a \to \infty$$

De aquí que $\int_0^\infty xe^{-x} = 1$.

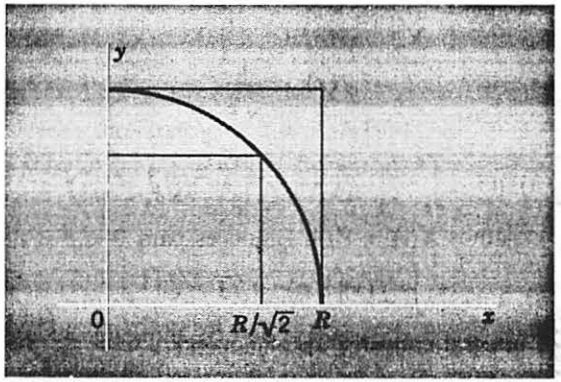
EJEMPLO 6. Demostrar que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Solución. Sea $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Primero desarrollemos el ejercicio formalmente y a continuación regresemos para justificar nuestros cálculos:

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

De aquí que

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$



Este cálculo sencillo hace fácil recordar el valor de la integral. Sin embargo, antes debe de agregarse mucho más para que pueda llamarse demostración:

Primero obsérvese que

$$I^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right),$$

y ahora procederemos a trabajar con el producto de estas dos integrales propias.

Es evidente que

$$\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right) = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2-y^2}\,dx\right) dy,$$

y la integral iterada puede escribirse como una integral doble:

$$\int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2-y^2}\,dx\right) dy = \iint_{S_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \equiv J_R,$$

donde S_R es un cuadrado de lado R en el primer cuadrante como se muestra en la figura adjunta. Por tanto se ha demostrado que $J_R \to I^2$ conforme $R \to \infty$.

Sea c_R el cuarto de círculo $\{0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ inscrito en S_R. Entonces $S_{R/\sqrt{2}}$ está contenido en c_R. Puesto que el integrando es positivo,

$$\iint_{S_{R/\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \iint_{c_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \iint_{S_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ahora bien, las integrales en los extremos son $J_{R/\sqrt{2}}$ y J_R, respectivamente. Conforme $R \to \infty$, cada una de estas integrales tiende hacia I^2. De aquí que lo mismo acontece con la integral de enmedio.

Introducimos coordenadas polares en esta integral y escribimos una vez más la integral doble resultante como una integral iterada en r y θ:

$$\iint_{c_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{c_R} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^R \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^R e^{-r^2} r\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta = -(\pi/2)\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^R = (\pi/4)[1 - e^{-R^2}].$$

Haciendo que $R \to \infty$ se obtiene el resultado deseado.

EJERCICIOS A

1. Probar las integrales siguientes respecto a la convergencia y la convergencia absoluta. Evaluar las convergentes cuando sea posible:

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$, $k > 1$.

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$, $k < 1$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$, $k > 1$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$, $k \leqslant 1$

(e) $\int_0^1 \csc x\,dx$

(f) $\int_0^1 \sqrt{x}\csc x\,dx$

(g) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

(h) $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

(i) $\int_0^\infty \cos x\,dx$

(j) $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$

(k) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

(l) $\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} x\,dx$

(m) $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$

(n) $\int_1^\infty e^{-x^2}x^4\,dx$

(o) $\int_0^\infty e^{-x^2}x^3\,dx$

(p) $\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx$

(q) $\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}\,dx$

EJERCICIOS B

1. Sea $\int_a^b f(x)\,dx$ una integral impropia absolutamente convergente y sea ϕ una función integrable acotada. Demostrar que $\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$ converge absolutamente.
2. Probar que $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ y $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$ convergen. (*Sugerencia:* Hacer la sustitución $y = x^2$.)
3. Se vio que para que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ exista no era necesario que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Sin embargo, demostrar que para cualquier constante positiva c.

$$\lim_{y\to\infty} \int_y^{y+c} f(x)\,dx = 0.$$

¿Es necesario que c sea constante?

4. Evaluar $\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x\,dx$. (*Sugerencia:* Aplicar la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.)
5. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

EJERCICIO C

1. Demostrar que $f(x) = \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt$ diverge logarítmicamente conforme $x \to 0$. En particular, demostrar que $\lim_{x\to 0+} [-\log x - f(x)] = a$ existe y que $23/96 < a < 1/4$.

17.2 INTEGRALES IMPROPIAS CON INTEGRANDOS NO NEGATIVOS

Los siguientes teoremas acerca de las integrales impropias son análogos a los de las series dados en la Sección 14.2. Puesto que las demostraciones son semejantes para ambos casos, aquí se dan en forma abreviada.

17.2a Teorema. Sea b un punto finito o bien ∞ y f una función no negativa en $I: \{a \leqslant x < b\}$, integrable en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c, $a < c < b$, con una singularidad en b. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe si, y solamente si, $\int_a^x f(t)\,dt$ es acotada para x en I.

Demostración. Esto es así porque $\int_a^x f(t)\,dt$ es no decreciente. ∎

Aquí, como en todos los teoremas de esta sección, supongamos que el punto singular se encuentra en el límite superior de la integral, que puede ser finito o infinito. Por supuesto que el estudiante debe darse cuenta que

estas pruebas se aplican con igual propiedad a las integrales en las cuales la singularidad se presenta en el límite inferior.

17.2b Teorema. Sean f y g funciones no negativas en $I: \{a \leqslant x < b\}$, integrables en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c, $a < c < b$. Supóngase además que cada una tiene una singularidad en b y que $f(x) \leqslant g(x)$ en I. Entonces

(i) si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, $\int_a^b f(x)\,dx$ también converge;

(ii) si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, $\int_a^b g(x)\,dx$ también diverge.

Demostración. Ambas conclusiones se deducen a partir de $\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt$ y el Teorema 17.2a. ∎

17.2c Teorema. Sean f y g funciones positivas en $\{a \leqslant x < b\}$ e integrables en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c entre a y b, y supóngase que

$$0 < \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty.$$

Entonces tanto $\int_a^b f(x)\,dx$ como $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen, o ambas divergen.

Demostración. Sea $q = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$. Entonces existe un X tal que

$$q/2 < \frac{f(x)}{g(x)} < 2q \qquad \text{si } X < x < b. \qquad (\text{¿Por qué?})$$

De aquí que

$$\frac{q}{2}\int_c^d g(x)\,dx < \int_c^d f(x)\,dx < 2q\int_c^d g(x)\,dx \qquad \text{para } X < c < d < b.$$

Por el criterio de Cauchy se llega a la conclusión del teorema. ∎

Una función útil para usar como comparación es la función potencia dada por $1/x^k$. Por los Ejercicios A1 (*a*), (*b*), (*c*) y (*d*) del último conjunto de ejercicios se ve que

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^k} \quad \text{para} \quad a > 0 \quad \text{converge si, y solamente si,} \quad k > 1$$

y

$$\int_0^a \frac{dx}{x^k} \quad \text{para} \quad a > 0 \quad \text{converge si, y solamente si,} \quad k < 1.$$

Por los mismos argumentos,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{(x-x_0)^k} \quad \text{para} \quad a > x_0 \quad \text{converge si, y solamente si,} \quad k > 1$$

y

$$\int_{x_0}^a \frac{dx}{(x-x_0)^k} \quad \text{para} \quad a > x_0 \quad \text{converge si, y solamente si,} \quad k < 1.$$

EJEMPLO 1. Examinar $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ (ver la Sección 5.3).

Solución. La singularidad está en $y = 1$. Ahora bien

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y)(1+y)}} < \frac{1}{\sqrt{1-y}} = \frac{1}{(1-y)^{1/2}}$$

Así que la integral converge por la prueba de comparación.

EJEMPLO 2. Examinar $\int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \operatorname{sen} t \, dt$ para la convergencia absoluta si $\alpha \geqslant 0$.

Solución. Ahora $|e^{-t} t^\alpha \operatorname{sen} t| < e^{-t} t^\alpha = e^{-t/2} e^{-t/2} t^\alpha$.

Se ve que $e^{-t/2} t^\alpha$ es acotada para $t \geqslant 0$, puesto que es 0 en $t = 0$, pequeña para t grande y continua para valores intermedios. De hecho, puede calcularse el valor máximo por los métodos de la Sección 7.4.

Sea M ese máximo. Entonces

$$|e^{-t} t^\alpha \operatorname{sen} t| \leqslant M e^{-t/2},$$

y $Me^{-t/2}$ es integrable. Esto es, $\int_0^\infty Me^{-t/2}\, dt$ converge (y es igual, de hecho, a $2M$), de manera que por la prueba de comparación

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \operatorname{sen} t \, dt$$

converge absolutamente, y de aquí que converge.

EJEMPLO 3. Probar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ no converge absolutamente.

Solución. En $\{[k + (1/6)]\pi < x < [k + (5/6)]\pi\}$ se tiene

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| > \frac{1}{2x} > \frac{1}{2(k+1)\pi}.$$

De modo que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx > \int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx > \frac{1}{2\pi(k+1)} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3(k+1)}.$$

Sumando desde $k = 0$ hasta $n - 1$, se obtiene

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx > \frac{1}{3} \sum_0^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3} \sum_1^n \frac{1}{k} \to +\infty \quad \text{conforme } n \to \infty.$$

17.3 EL VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

Se ha señalado que para que una integral con una singularidad en un punto interior c de $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ se admita como una integral impropia convergente, ambas integrales impropias $\int_a^c f(x)\, dx$ y $\int_c^b f(x)\, dx$ deben existir. La suma de estas integrales se define como el valor de la integral impropia desde a hasta b:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Existen circunstancias en las cuales es posible definir un valor para la integral de la izquierda cuando ninguna de las de la derecha existe. La idea es que ciertos $+\infty$ se cancelan con ciertos $-\infty$ para dejar una suma finita. La definición precisa es como sigue.

Sea f definida en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, excepto posiblemente en un punto interior c, el cual es un punto singular de f. Si $\int_a^b f(x)\, dx$ no existe, pero

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\, dx \right]$$

existe, esto se llamará el **valor principal de Cauchy** de $\int_a^b f(x)\, dx$ y se escribirá como

$$P_c \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\, dx \right].$$

No debe interpretarse P_c como un factor numérico. Es una bandera roja que nos llama la atención acerca del hecho de que no estamos trabajando con una integral propia ni aún con una impropia ordinaria o de alguna variedad. Al poner la P_c al principio de la integral se da a entender que es un valor principal. La c da la localización del punto singular o anómalo.

EJEMPLO. Calcular $P_0 \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

Solución. Es evidente que tanto $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ como $\int_0^2 \frac{dx}{x}$ divergen, una

hacia $-\infty$ y la otra hasta $+\infty$, de modo que la integral $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ no existe como una integral impropia ordinaria. Sin embargo,

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{2} \frac{dx}{x} = \log 2.$$

Así que $$P_0 \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \log 2.$$

17.4 UNA PRUEBA DE ALTERNACION

La siguiente prueba es una generalización de la idea aplicada anteriormente en el capítulo cuando se examinó $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$. La demostración es completamente semejante a los argumentos usados en el ejemplo.

17.4a Teorema. Sea f una función definida para $\{x \geqslant a\}$ y propiamente integrable en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para todo $b > a$. Supóngase que existe una sucesión de números $\{a_n\}$ con las propiedades $a_0 = a$, $a_{n+1} > a_n$, $a_n \to +\infty$, de modo que

(i) $f(x)$ tiene signo constante en cada intervalo $\{a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}\}$,

(ii) $f(x)$ cambia de signo desde $\{a_{n-1} \leqslant x \leqslant a_n\}$ hasta $\{a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}\}$,

(iii) $\left| \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx \right| > \left| \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx \right|$,

(iv) $\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx \to 0$ conforme $n \to \infty$.

Entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.

Demostración. Sea $c_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx$. Entonces $\sum_1^\infty c_n$ converge, por la prueba de la serie alternante. Y dado cualquier $b > a$, existe un n para el cual $b = a_n \pm r_n$, donde $0 \leqslant r_n < (a_{n+1} - a_n)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_1^n c_k + \int_{a_n}^{r_n} f(x)\, dx.$$

Ahora bien $$\left| \int_{a_n}^{r_n} f(x)\, dx \right| < \left| \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx \right| \to 0 \quad \text{conforme } n \to \infty. \ \blacksquare$$

Explicar cuidadosamente la desigualdad de la línea anterior.

Existen otras pruebas más delicadas semejantes a las pruebas de Abel y Dirichlet para las series. Estas se discutirán en el próximo capítulo. Otras pruebas se explorarán en los problemas.

EJERCICIOS A

1. Examinar las siguientes integrales respecto a la convergencia.

(a) $\int_0^\infty \cos x^3\, dx$

(b) $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^\alpha\, dx$, $\alpha > 1$.

(c) $\int_0^\infty t^{-t}\, dt$

(d) $\int_{7532}^\infty \frac{e^{1/x}}{1 + x^2} \operatorname{sen} x\, dx$

(e) $\int_{351}^\infty \frac{1}{t^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{t}\, dt$

(f) $\int_e^\infty \frac{1}{t^{1/2}} \cos \frac{1}{t}\, dt$

(g) $\int_0^{15} \frac{1}{t^{3/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{t}\, dt$

(h) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

(j) $\int_0^1 \log x\, dx$

(k) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(\log x)^p}$

(l) $\int_1^\infty \frac{(\log x)^{365}}{x^{35/34}}\, dx$

(m) $\int_0^\infty e^{\cos x} \frac{dx}{x}$

(n) $\int_0^1 \frac{x^{\alpha - 1}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$, $\alpha > 0$

(o) $\int_0^1 \frac{\log(1 - x)}{x^{3/2}}\, dx$

(p) $\int_0^{1/75} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^{5/2}} \cot x\, dx$

(q) $\int_0^\infty \frac{1}{x^{95}} e^{-1/x}\, dx$

(r) $\int_0^\pi \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

2. Examinar las siguientes integrales de valor principal respecto a la existencia.

(a) $P_0 \int_{-1}^{75} \frac{dx}{x^2}$

(b) $P_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$

(c) $P_0 \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn} x}{x}\, dx$

EJERCICIOS B

1. Demostrar que las integrales en los Ejercicios A1 (*a*) y (*b*) no son absolutamente convergentes.

2. Examinar $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}}$ respecto a la convergencia.

3. Sea f una función no negativa definida en $\{x \geqslant a\}$ e integrable en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para todo $b > a$. Demostrar que si existe un $r < 1$ y un $X \geqslant a$ para los cuales $[f(x)]^{1/x} \leqslant r$ para toda $x \geqslant X$, entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.

4. Sea f una función continua positiva en $\{x > a\}$. Demostrar que $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x + 1)}{f(x)} < 1$.

5. Sean f y g dos funciones diferenciables definidas en $\{a \leqslant x < b\}$, donde, como es costumbre, b puede ser finito o infinito. Sean f' y g' integrables en $\{a \leqslant x \leqslant c\}$ para todo c entre a y b. Demostrar que si $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ es una integral impropia convergente y $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe, entonces $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ existe, ya sea como una integral propia o bien como una impropia convergente, y

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

EJERCICIOS C

1. Sean f y g definidas en $I:\{a \leqslant x < b\}$, donde b es finito o infinito, y supóngase que $\int_a^b f^2(x)\,dx$ y $\int_a^b g^2(x)\,dx$ existen como integrales propias o bien como integrales impropias convergentes. Demostrar que:

(a) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ y $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx$ existen como integrales propias o impropias convergentes.

(b) $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| < \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)\,dx$

(c) $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 < \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$

(d) $\left[\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx\right]^{1/2} < \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]^{1/2}$

2. Sean a y b puntos finitos y sea $\int_a^b f(x)\,dx$ absolutamente convergente. Entonces $\int_a^b |f(x)|^{1/2}\,dx$ converge y

$$\int_a^b |f(x)|^{1/2}\,dx < \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b |f|\,dx}.$$

3. Establecer y probar un teorema de alternación semejante al 17.14a para el caso de un punto singular finito.

17.5 INTEGRALES MULTIPLES IMPROPIAS

Como en el caso de las integrales simples, la definición de integrales múltiples requiere que tanto la función f como el dominio de f sean acotados. Puede extenderse la definición eliminando una o ambas de estas restricciones. Una vez más, las extensiones recibirán el nombre de integrales impropias cuando existan.

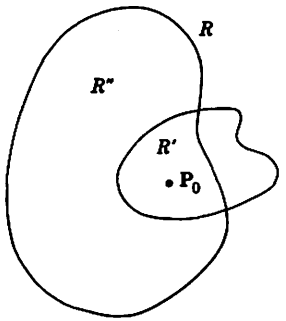
Debido a las variadas circunstancias bajo las cuales puede ser impropia una integral múltiple, no intentaremos un estudio exhaustivo de estas situaciones. Es mejor esperar hasta que el estudiante se familiarice con la teoría de la integración de Lebesgue. Las distinciones necesarias por los diferentes tipos de singularidades están todas absorbidas en la teoría general de la integral de Lebesgue. Aquí nos conformaremos con una discusión de dos casos, a saber una sola singularidad en un punto finito y un dominio infinito de integración. También, sólo trabajaremos en dos dimensiones, aunque es evidente que es posible un tratamiento semejante para las dimensiones superiores.

Antes de empezar nuestras definiciones, recordemos un poco la nomenclatura que se usará otra vez. Una región es un conjunto abierto-conexo. Una región cerrada es una región junto con su frontera. El diámetro d de un conjunto S está dado por

$$d = \sup |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|,$$

donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son puntos en S. Un conjunto acotado es cuadrable si tiene una área.

Sea f acotada y continua en una región cuadrable acotada R, excepto en un punto $\mathbf{P}_0$, donde se vuelve no acotada. Sea R' una región cuadrable acotada que contiene a $\mathbf{P}_0$ en su interior. Sea R'' el conjunto que consiste de aquellos puntos de R los cuales no están en R'. Entonces R'' es cuadrable (¿por qué?) y f es integrable en R''. Sea d el diámetro de R'.



Si $\lim_{d\to 0} \iint_{R''} f(\mathbf{P})\,dA = J$ existe, entonces se dice que f es **impropiamente integrable** sobre R. El valor de la **integral impropia** es J. Usaremos el mismo símbolo para representar una integral impropia que el usado para una propia:

$$J = \iint_R f(\mathbf{P})\,dA.$$

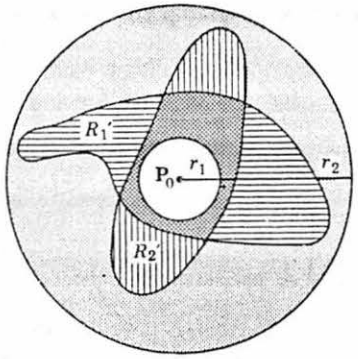
El significado preciso del límite involucrado en la definición es que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon)$ para el cual $\left| \iint_{R'} f(\mathbf{P})\, dA - J \right| < \epsilon$ para toda región R' para la cual $d < \delta$.

La convergencia absoluta y la condicional se definen como antes. Existe un criterio de Cauchy para este tipo de límite y se deduce que cualquier integral absolutamente convergente del tipo anteriormente definido es convergente. También se tienen las mismas pruebas de comparación como en el caso de integrales de una variable. En lugar de explorar estas cosas en detalle, nos contentaremos con probar un teorema, básicamente un teorema de comparación. Es el teorema más usado para tratar con integrales del tipo definido anteriormente. Supondremos el criterio de Cauchy.

17.5a Teorema. Sea f una función continua en una región cuadrable acotada R excepto en $\mathbf{P}_0$, donde se vuelve no acotada. Supóngase que f satisface una desigualdad de la forma

$$|f(\mathbf{P})| \leqslant \frac{C}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^\alpha} \qquad \mathbf{P} \text{ en } R,$$

donde $\alpha < 2$. (En general, $\alpha < n =$ dimensión del espacio.) Entonces $\iint_R f(\mathbf{P})\, dA$ converge absolutamente en R.



Demostración. Sean R_1' y R_2' dos regiones abiertas acotadas, conteniendo ambas a $\mathbf{P}_0$. Entonces R_1'' y R_2'' son, respectivamente los puntos de R no en R_1' y R_2'. Sea D el conjunto de aquellos puntos de R_1' no en R_2', junto con aquellos puntos de R_2' no en R_1'. Entonces

$$\left| \iint_{R_1''} f(\mathbf{P})\, dA - \iint_{R_2''} f(\mathbf{P})\, dA \right| \leqslant \iint_D |f(\mathbf{P})|\, dA \leqslant \iint_D \frac{C\, dA}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^\alpha}.$$

Ahora bien, supuesto que R_1' y R_2' son abiertas, existen dos círculos con radios r_1 y r_2 tales que D está contenido en el anillo $\{r_1 < |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < r_2\}$. Entonces esta última integral está acotada por $\iint_{r_1 \leqslant |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| \leqslant r_2} \frac{C\, dA}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^\alpha}$. Si se introducen coordenadas polares centradas en $\mathbf{P}_0$, entonces $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = r$ y la última integral se transforma en

$$\int_{r_1}^{r^2} \int_0^{2\pi} C r^{-\alpha} r\, dr\, d\theta = \frac{2\pi C r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{r_1}^{r^2} = \frac{2\pi C}{2-\alpha} [r_2^{2-\alpha} - r_1^{2-\alpha}] \leqslant \frac{2\pi C}{2-\alpha} r_2^{2-\alpha}.$$

Pero $\alpha < 2$. De aquí que esta diferencia puede hacerse tan pequeña como se desee haciendo pequeño a r_2 —es decir, haciendo pequeños los diámetros de R_1' y R_2'. Por lo tanto, por el criterio de Cauchy, el límite existe y la integral converge. ∎

Se cumple una definición y un teorema semejante con dominios de integración no acotados. Sea R una región no acotada con la propiedad de que, si R' es cualquier región cuadrable, entonces la parte común R'' de R y R' también es cuadrable. Sea f continua y acotada en R. Supóngase que el **radio interno** r de un conjunto R' sea el radio del mayor círculo centrado en el origen el cual es contenido en el conjunto. Entonces se dice que $J = \iint_R f(\mathbf{P})\, dA$ existe si $\lim_{r \to \infty} \iint_{R''} f(\mathbf{P})\, dA = J$, donde el significado preciso del límite es que para cada $\epsilon > 0$ existe un r_0 tal que

$$\left| \iint_{R''} f(\mathbf{P})\, dA - J \right| < \epsilon \qquad \text{si } r > r_0.$$

Entonces el teorema es como sigue.

17.5b Teorema. Sean R y f los descritos anteriormente. Si existen tres constantes $r_1 > 0$, $C > 0$ y $\alpha > 2$ tales que

$$|f(\mathbf{P})| \leqslant C/|\mathbf{P}|^\alpha \qquad \text{si } |\mathbf{P}| > r_1,$$

entonces $\iint_R f(\mathbf{P})\, dA$ existe.

Demostración. La demostración es semejante a la anterior y se deja como ejercicio (B1). ∎

EJERCICIOS A

1. Supóngase que $\mathbf{P}$ tiene coordenadas rectangulares (x, y) y coordenadas polares (r, θ), y sea R el conjunto $\{|\mathbf{P}| \leqslant 1\}$. Examinar respecto a la convergencia:

(a) $\iint_R \log \frac{1}{r}\, dA$ (b) $\iint_R \frac{x^2 y}{r^4}\, dA$

(c) $\iint_R \frac{\cos\theta}{r}\, dA$ (d) $\iint_R \frac{x^2 + y^4}{r^{5/2}}\, dA$

2. Sea R el conjunto $\{|\mathbf{P}| \geqslant 1\}$. Examinar respecto a la convergencia

(a) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2y}{r^8}\,dA$ (b) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2+y^4}{r^3}\,dA$

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2+y^4}{r^{9/2}}\,dA$ (d) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2y^4z^4}{r^{13}}\,dA$

EJERCICIOS B

1. Probar el Teorema 17.5b.
2. En el caso de integrables triples, demostrar que el Teorema 17.5a sigue siendo verdadero si $\alpha < 2$ se reemplaza por $\alpha < 3$, y que el Teorema 17.5b sigue siendo verdadero si $\alpha > 2$ se reemplaza por $\alpha > 3$.

EJERCICIOS C

1. Sea D una región estándar en E_3 (ver el Capítulo 13), S su frontera y D' el exterior de S. Sea $\mathbf{F}$ continuamente diferenciable en D' y supóngase que $|\mathbf{P}|^2|\mathbf{F}| \to 0$ uniformemente conforme $|\mathbf{P}| \to \infty$. Demostrar que el teorema de la divergencia se cumpla para $\mathbf{F}$ en D':

$$\iiint_{D'} \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal interior de D.

2. Sea D una región estándar en E_3 y sea $\mathbf{F}$ continuamente diferenciable en D excepto en un punto $\mathbf{P}_0$ en el interior, donde $\mathbf{F}$ puede volverse no acotada. Si $|\mathbf{F}|\ |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^2 \to 0$ uniformemente conforme $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_0$, demostrar que el teorema de la divergencia se cumple para $\mathbf{F}$ en D.
3. Sea R una región cuadrable acotada en E_2 y $\mathbf{Q} = (\alpha, \beta)$. Definir f en R por $f(\mathbf{Q}) = \displaystyle\iint_R \log(1/|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|)\,dA_{\mathbf{P}}$. Demostrar que f tiene ambas parciales en R y que pueden calcularse por derivación bajo el signo integral, por ejemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\mathbf{Q}) = \iint_R [(x - \alpha)/|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|^2]\,dA_{\mathbf{P}}.$$

(Sugerencia: Demostrar que la segunda integral converge y que el cociente diferencia $\Delta f/\Delta\alpha$ tiende hacia ella conforme $\Delta\alpha \to 0$.)

18

Representaciones integrales de funciones

18.1 INTRODUCCION. INTEGRALES PROPIAS

Tal y como se señaló al principio del Capítulo 15, existen relativamente pocas funciones que pueden expresarse en términos sencillos. Muchas requieren más bien expresiones esotéricas para sus representaciones, tales como integrales, o series de un tipo u otro. La clase de funciones que se desea discutir en este capítulo son aquéllas que pueden representarse mediante una integral que depende de un parámetro.

Supongamos que F está definida en el rectángulo R: $\{a \leqslant x \leqslant b;\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ y que para toda x, F es una función integrable de y. Entonces la integral $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ define una función de x en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Si se denota esta función por f, sus valores están dados por

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy \qquad \{a < x < b\}.$$

Es natural inquirir acerca de las propiedades de f. ¿Es continua? ¿Diferenciable? ¿Integrable? Las respuestas a estas preguntas dependen, por supuesto, de las propiedades de F. El objeto de este capítulo será la discusión de estos problemas. Primero se discutirán las integrales propias.

18.1a Teorema. Sea F una función continua de (x, y) en el rectángulo R: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$. Entonces tómese f definida en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ por

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$$

es continua en I. Por lo tanto, es integrable en I, y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\beta dy \int_a^b F(x, y)\,dx.$$

Demostración. Para x_1 y x_2 en I, examinemos $f(x_1) - f(x_2)$. Por el Teorema 9.6d, F es uniformemente continua en el rectángulo R. Por tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon)$ tal que

$$|F(x_1, y) - F(x_2, y)| < \epsilon \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta.$$

De donde
$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_a^\beta [F(x_1, y) - F(x_2, y)]\,dy \right|$$
$$< \int_a^\beta |F(x_1, y) - F(x_2, y|\,dy$$
$$< \epsilon(\beta - \alpha) \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Esto prueba la continuidad. La segunda conclusión se deduce, a partir del Teorema 12.3a, de la evaluación de una doble integral como una integral iterada. ∎

La continuidad de la integral como una función de x permite el intercambio del límite y la integración. Esto puede verse de la siguiente manera. Sea x_0 cualquier punto en I. Entonces la continuidad de f se expresa como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En términos de la representación integral, esto se transforma en

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^\beta F(x, y)\,dy = \int_a^\beta F(x_0, y)\,dy.$$

Y, puesto que F es continua, esto es equivalente a

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^\beta F(x, y)\,dy = \int_a^\beta \lim_{x \to x_0} F(x, y)\,dy.$$

Ahora enfocaremos la cuestión de la diferenciabilidad de una función f definida como en el último teorema. El resultado es el siguiente.

18.1b Teorema. Sean tanto $F(x, y)$ como $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ continuas en el rectángulo R: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$. Entonces f, dada por

$$f(x) = \int_a^\beta F(x, y)\,dy,$$

es diferenciable en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y además la derivada puede calcularse mediante la diferenciación bajo el signo integral

$$f'(x) = \int_a^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dy.$$

Es decir,
$$\frac{d}{dx} \int_a^\beta F(x, y)\,dy = \int_a^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dy.$$

Demostración. Sea la función g definida por

$$g(x) = \int_a^\beta \frac{\partial}{\partial x} F(x, y)\,dy.$$

Entonces, por el teorema anterior,

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^\beta dy \int_a^x \frac{\partial}{\partial t} F(t, y)\,dt = \int_a^\beta [F(x, y) - F(a, y)]\,dy$$

$$= \int_a^\beta F(x, y)\,dy - \int_a^\beta F(a, y)\,dy = f(x) - f(a).$$

Diferenciando los dos extremos de esta cadena de igualdades, se obtiene

$$g(x) = f'(x).$$ ∎

EJERCICIOS A

1. Para cualquier a positiva fija, sea f definida en

$$I: \{-a < x < a\} \text{ por } f(x) = \int_0^1 e^{-xt}\,dt$$

(*a*) Demostrar que f es continua en I.

(*b*) Evaluar la integral para obtener una fórmula explícita para f. ¿Define esta fórmula una función continua en $x = 0$?

(*c*) Derivar f mediante la derivación de la integral. Evaluar la integral resultante y verificar que se obtiene el mismo resultado al derivar la fórmula encontrada en (*b*).

(*d*) Integrar f desde 0 hasta a, integrando bajo el signo integral. Evaluar la integral interna. ¿Es continuo el integrando resultante?

(*e*) Desarrollar el integrante en una serie de potencias en (xt). Demostrar que puede integrarse término a término y que la serie de potencias resultante en x es la misma que la obtenida directamente a partir de la fórmula de la parte (*b*).

2. Examinar las funciones definidas en $\{-a \leqslant x \leqslant a\}$ por $\int_0^1 \operatorname{sen} xt\,dt$ y $\int_0^1 \cosh xt\,dt$ mediante el procedimiento usado en el Ejercicio 1.

3. Estudiar la función f definida por $f(x) = \int_0^1 e^{-xt^2}\,dt$.
   (*a*) ¿Para qué valores de x está f definida?
   (*b*) ¿Dónde es continua la función?
   (*c*) Calcular $\int_0^x f(y)\,dy$ y $f'(x)$ operando bajo el signo integral.
   (*d*) Demostrar que f es una función de x estrictamente decreciente.
   (*e*) ¿Es $f(x)$ grande o pequeña cuando x es grande y > 0?
   (*f*) ¿Es $f(x)$ grande o pequeña cuando x es grande y < 0?

4. Sea $f(x) = \int_0^\pi \frac{dy}{(1 + x\cos y)^2}$.
   (*a*) ¿Para qué valores de x está f definida?
   (*b*) Calcular $f'(x)$.

5. Usar el resultado del Ejercicio B 2 para calcular f' donde f está dada por

   (*a*) $\int_0^x \tan(x - y)\,dy$. (*b*) $\int_0^{x^2} \tan\frac{t}{x^2}\,dt$.

   ¿Para qué valores de x está f definida en cada caso?

6. Verificar que $y = \int_0^x \phi(t)\,\mathrm{sen}(x - t)\,dt$ es una solución del problema
   $$y'' + y = \phi(x) \qquad y(0) = 0,$$
   si ϕ es continua.

EJERCICIOS B

1. Sea b un punto finito o bien el símbolo ∞. Supóngase que F es continua en R: $\{a \leqslant x < b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ y f está definida en I: $\{a \leqslant x < b\}$ por $f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$.
   (*a*) Demostrar que $f(x)$ es continua en I.
   (*b*) Demostrar que $\int_a^x f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta dy \int_a^x F(t, y)\,dt$ para x en I.
   (*c*) Si $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ es continua en R, demostrar que f es diferenciable en I y que
   $$f'(x) = \int_a^b (\partial F/\partial x)(x, y)\,dy.$$
   (*d*) Dar un ejemplo para demostrar que $\lim_{x \to b} f(x)$ no necesita existir.
   (*e*) Demostrar que si b es finito, el requerimiento adicional de que F sea uniformemente continua implica que $\lim_{x \to b} f(x)$ exista.
   (*f*) Sea $b = \infty$. Dar un ejemplo para demostrar que si F es uniformemente continua y acotada, $\lim_{x \to b} f(x)$ no necesita existir.

2. Sea F continua en R: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ y supóngase que $\frac{\partial F}{\partial x}$ también es continua en R. Sean u y v funciones diferenciables de x definidas en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ con valores en J: $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ —es decir, $\alpha \leqslant u(x) \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant v(x) \leqslant \beta$. Deducir la regla de Leibnitz.
   $$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y)\,dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dy + F[x, v(x)]v'(x) - F[x, u(x)]u'(x).$$

3. Demostrar que si f es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces
   $$\int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 = \int_a^x f(t)(x - t)\,dt.$$

4. Demostrar que si f es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces
   $$\int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x - t)^{n-1}\,dt \qquad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

18.2 CONVERGENCIA UNIFORME

Por supuesto que es verdad que si $\int_a^b F(x, y)\,dy$ es una integral impropia todavía define una función, suponiendo que es convergente. Una vez más, como en la sección anterior, nos interesaremos en aplicar las operaciones del análisis a tal función. No obstante, existen ciertas dificultades inherentes al hecho de que la integral es impropia. Como en el caso de las series infinitas que dependen de un parámetro, sobrepasaremos estas dificultades con auxilio del concepto de convergencia uniforme. Ahora se definirá la convergencia uniforme para integrales.

Sea F definida en R: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β es finito o bien $+\infty$; y supóngase que para cada x en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ la integral $\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ existe como una integral propia o impropia. (Es enteramente permisible para la integral si β es finito, ser impropia para ciertos valores de x en I y propia para otros.) Si para cada $\epsilon > 0$ existe un $Y(\epsilon)$ independiente de x, para el cual $\left|\int_\eta^\beta F(x, y)\,dy\right| < \epsilon$ para todo $\eta > Y(\epsilon)$, entonces se dice que $\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ **converge uniformemente** respecto a x en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

Existe una prueba M para la convergencia uniforme de tales integrales.

18.2a Teorema. Supóngase que F está definida en R: $\{a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β puede ser finito o bien $+\infty$; supóngase que $\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ converge para cada x en I: $\{a < x < b\}$. Supóngase además que existe una función M en $\{\alpha \leqslant y < \beta\}$ para la cual $|F(x, y)| < M(y)$ y $\int_\alpha^\beta M(y)\,dy$ converge. Entonces $\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ converge uniformemente para x en I.

Demostración. Sea dado $\epsilon > 0$. Entonces existe un $Y(\epsilon)$ tal que

$$0 < \int_\eta^\beta M(y)\,dy < \epsilon \qquad \text{si } \eta > Y(\epsilon). \text{ (¿Por qué?)}$$

Entonces si $\eta > Y$,

$$\left|\int_\eta^\beta F(x, y)\,dy\right| < \int_\eta^\beta |F(x, y)|\,dy < \int_\eta^\beta M(y)\,dy < \epsilon,$$

∎

Otra vez se recuerda al estudiante que aunque este teorema se establece para la singularidad del límite superior, se aplica con igual propiedad a las integrales con la singularidad en el límite inferior.

EJEMPLO 1. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{1 + t^2}\,dt$ converge uniformemente para toda x.

Solución:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} xt}{1 + t^2}\right| < \frac{1}{1 + t^2} = M(t) \quad \text{y} \quad \int_0^\infty M(t)\,dt \text{ converge.}$$

EJEMPLO 2. Para toda c, $\int_0^i \frac{1}{\sqrt{1 - z}} e^{zv}\,dz$ converge uniformemente respecto a v en $\{v < c\}$.

Solución:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1 - z}} e^{zv}\right| < \frac{1}{\sqrt{1 - z}} e^{|c|} = M(z)$$

y $\int_0^1 M(z)\,dz$ converge.

También necesitamos el concepto de la convergencia uniforme de una función que depende de un parámetro. Sea F una función definida en R: $\{a \leqslant x < b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, donde b puede ser finito o infinito. Puede mirarse F como definiendo una función de y para cada x, la variable x jugando el papel de un parámetro. Entonces podemos inquirir acerca de la convergencia de F conforme $x \to b$. Si existe una función ϕ definida en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ tal que para cada y se tiene que $F(x, y) \to \phi(y)$ conforme

$x \to b$, se dice que F converge **puntualmente** hacia ϕ conforme $x \to b$. Esto significa que para cada ϵ y cada y existe un $X(\epsilon, y)$ para el cual

$$|F(x, y) - \phi(y)| < \epsilon \qquad \text{si } X < x < b.$$

Si puede escogerse X de modo que sea independiente de y, aunque puede depender del intervalo $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, se dice que F **tiende uniformemente** hacia ϕ conforme $x \to b$. El término «uniforme» se refiere, por supuesto, al hecho de que se aplica la misma X para toda y en el intervalo.

En esta convergencia, el interés principal está relacionado con el caso en el cual b es infinito. Si b es finito, puede definirse $F(b, y) = \phi(y)$; y entonces F se vuelve continua en el rectángulo cerrado $\{a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$. Este punto se discute en los ejercicios. (Ver Ejercicio B2 en la Sección 18.3).

EJEMPLO 3. Sea $F(x, y) = e^y(1 + e^{-x}) + \operatorname{sen} y + \frac{1}{x}\cos y$ en $\{x > 0, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Investigar la convergencia de F conforme $x \to \infty$.

Solución. Puesto que $e^{-x} \to 0$ y $\frac{1}{x} \to 0$ conforme $x \to \infty$, nos conduce a considerar $\phi(y) = e^y + \operatorname{sen} y$. Entonces

$$|F(x, y) - \phi(y)| = \left|e^{y-x} + \frac{1}{x}\cos y\right| < e \cdot e^{-x} + \frac{1}{x}.$$

Esta última expresión es independiente de y y evidentemente $\to 0$ conforme $x \to \infty$. De aquí que F tiende uniformemente hacia ϕ.

La prueba M, aunque muy útil, sufre del mismo inconveniente en relación con las integrales que en su aplicación a las series, a saber su requerimiento de convergencia absoluta tanto como uniforme. De aquí que son de desear pruebas más delicadas. Pueden demostrarse pruebas análogas a las de Dirichlet y Abel para las integrales. El punto crítico en la demostración es la integración por partes que es la análoga de la identidad de Abel. Sin embargo, en muchos casos es tan fácil probar la convergencia uniforme directamente como lo es verificar la hipótesis de uno o de los otros teoremas. El siguiente ejemplo ilustrará el método.

EJEMPLO 4. Demostrar que $\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ converge uniformemente en $\{x \geqslant 0\}$.

Solución. Integremos por partes, integrando sen t y diferenciando e^{-xt}/t. Para $x > 0$ se obtiene

$$\int_\tau^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{e^{-x\tau}\cos\tau}{\tau} - \int_\tau^\infty \frac{(1 + xt)e^{-xt}\cos t\,dt}{t^2}.$$

Ahora bien $\qquad |(1 + xt)e^{-xt}\cos t| < e^{xt} \cdot e^{-xt}|\cos t| < 1,$

de manera que

$$\left|\int_\tau^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right| < \frac{1}{\tau} + \int_\tau^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{\tau}.$$

De donde

$$\left|\int_\tau^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right| < \epsilon \qquad \text{si } \tau > \frac{2}{\epsilon}.$$ ∎

Estableceremos el criterio de Cauchy en el cual se basan las demostraciones de los teoremas de Abel y Dirichlet.

18.2b Teorema. Sea F continua en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β puede ser finito o infinito. Para que $\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy$ converja uniformemente en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ es necesario y suficiente que para cada $\epsilon > 0$ exista un $Y(\epsilon)$ independiente de x, en I, para el cual

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\,dy\right| < \epsilon \qquad \text{si } Y < y_1 < y_2 < \beta.$$

Demostración. Suficiencia. Para cada x fijo, la condición ϵ es simplemente el establecimiento del criterio de Cauchy para la convergencia de la integral. De aquí que la integral converge para cada x. Manteniendo y_1 fijo y haciendo que $y_2 \to \beta$, entonces se obtiene

$$\left|\int_{y_1}^{\beta} F(x,y)\,dy\right| < \epsilon \qquad \text{si } Y < y_1 < \beta.$$

Necesidad. Ver el Ejercicio B5. ∎

La **prueba modificada de Abel** se da mediante el siguiente teorema.

18.2c Teorema. Sean u, v y $\partial v/\partial y$ continuas en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β puede ser finito o infinito. Supóngase también que:

(i) existe una constante M para la cual

$$\left|\int_\alpha^\tau u(x, y)\,dy\right| < M \qquad \text{en } \{\alpha < \tau < \beta, a < x < b\},$$

(ii) $\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right| dy$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$,

(iii) $v(x, t)$ converge uniformemente hacia cero conforme $y \to \beta$.

Entonces $\int_\alpha^\beta u(x, y)\,v(x, y)\,dy$ converge uniformemente para x en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

Demostración. Hágase

$$\phi(x, \tau) = \int_\alpha^\tau u(x, y)\,dy.$$

Por la hipótesis (i), $\phi(x, \tau)$ es acotada en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant \tau < \beta\}$. Integrando por partes se obtiene

$$\int_{y_1}^{y_2} u(x, y)v(x, y)\,dy = \phi(x, y_2)v(x, y_2) - \phi(x, y_1)v(x, y_1) - \int_{y_1}^{y_2} \phi(x, y)\frac{\partial}{\partial y}v(x, y)\,dy.$$

De aquí en adelante, la demostración es semejante a la de las series: aplicar el hecho que ϕ es acotada, la pequeñez de v y $\int_{y_1}^{y_2}\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| dy$. Los detalles se dejan como ejercicio. ∎

El siguiente teorema da la **prueba modificada de Dirichlet.**

18.2d Teorema. Sean u, v y $\partial v/\partial y$ continuas en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$. donde β puede ser finito o infinito. Supóngase también que

(i) $\int_\alpha^\beta u(x, y)\,dy$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$,

(ii) existe una constante M para la cual $\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial y}{\partial y}(x, y)\right| dy < M$ en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

(iii) $|v(x, \alpha)| \leqslant M$ en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

Entonces $\int_\alpha^\beta u(x, y)v(x, y)\,dy$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio (B4). Integrar por partes como en el Teorema 18.2c, pero remplazar ϕ por ψ, donde ψ está definida por

$$\psi(x, \tau) = \int_\alpha^\tau u(x, y)\,dy - \int_\alpha^\beta u(x, y)\,dy = -\int_\tau^\beta u(x, y)\,dy.$$ ∎

EJERCICIOS A

1. Demostrar que las siguientes integrales convergen uniformemente en los intervalos establecidos:

(*a*) $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2 + x^2}\,dt \qquad \{x > 1\}$

(*b*) $\int_0^\infty e^{-xt}(1 + t^3)\,dt \qquad \{x > a\}$, donde $a > 0$.

(c) $\int_0^1 \log\frac{x}{t}\,dt$ $\{a < x < b\}$, donde $a > 0$, $b < +\infty$

(d) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t^y}\,dt$ $\{0 < y < 2 - a\}$, donde $0 < a < 2$

(e) $\int_0^1 \frac{e^{-xy}\,dy}{\sqrt{y}(1+y)}$ $\{x > c\}$, donde c es cualquier constante

(f) $\int_0^\infty e^{-t(x+1)} \cos xt \frac{t}{t+x^2}\,dt$ $\{x > 0\}$

EJERCICIOS B

1. Demostrar que los siguientes límites son alcanzados uniformemente en los intervalos indicados:

   (a) $e^{-xy}\frac{1}{1+y} \to \frac{1}{1+y}$ conforme $x \to 0$ en $\{-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\}$

   (b) $t^2 e^{-xt} \cos xt \to 0$ conforme $x \to \infty$ en $\{t \geqslant 0\}$.

2. Examinar las siguientes integrales para la convergencia uniforme en el intervalo indicado:

   (a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t}\,dt$ $\{x > c > 0\}$.

   (b) $\int_0^\infty \frac{\cos y}{x+y}\,dy$ $\{x > c > 0\}$.

   (c) $\int_0^\infty \frac{t \operatorname{sen} t}{x^2+t^2}\,dt$ $\{x > c > 0\}$.

   (d) $\int_0^\infty x^{y-1} \operatorname{sen} x\,dx$ $\{-1 + \delta < y < 1 - \delta\}$, donde $0 < \delta < 1$.

   (e) $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} xy^2\,dy$ $\{x > 0\}$.

3. Sea F definida en $\{a \leqslant x < b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ y sea ϕ definida en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$. Establecer y probar el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de F hacia ϕ conforme $x \to b$.

4. Demostrar que la convergencia uniforme de una integral que depende de un parámetro es un caso especial de la convergencia uniforme de una función y que el criterio de Cauchy para la convergencia de las integrales se deduce del Ejercicio 3 anterior.

5. Completar las demostraciones de los Teoremas 18.2*b*, *c* y *d*.

6. Demostrar que $e^{-t(x+1)} \cos xt \frac{t}{t+x^2} \to e^{-t}$ uniformemente en $\{y \geqslant 0\}$ conforme $x \to 0$.

18.3 CONSECUENCIAS DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

El objeto principal de esta sección es discutir la continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de las funciones definidas mediante integrales impropias que dependen de un parámetro. Primero probaremos un teorema preliminar referente al paso hacia el límite bajo el signo integral de las integrales propias.

18.3a Teorema. Sea F continua en $\{x \geqslant a,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ y sea f definida en I: $\{x \geqslant a\}$ por

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy.$$

Supóngase que existe una función ϕ definida en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ tal que F tiende uniformemente hacia ϕ conforme $x \to \infty$. Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy.$$

Demostración. La integrabilidad de ϕ queda cubierta por el Ejercicio B1. Considérese:

$$\Delta = f(x) - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta [F(x, y) - \phi(y)]\,dy.$$

Por la convergencia uniforme, para cada $\epsilon > 0$ existe un $X(\epsilon)$ tal que $|F(x, y) - \phi(y)| < \epsilon$ si $x > X$. Para tales x,

$$|\Delta| < \int_\alpha^\beta |F(x, y) - \phi(y)|\,dy < \epsilon \cdot (\beta - \alpha).$$

∎

En realidad no usamos aquí todo el poder de la continuidad. Lo usamos para deducir la integrabilidad de ϕ vía el Ejercicio B1. No obstante, debe aclararse que lo que realmente se usó fue la integrabilidad de F y ϕ, y la convergencia uniforme de F hacia ϕ.

Ahora volvamos hacia el estudio de las integrales impropias.

18.3b Teorema. Sea F continua en R: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β puede ser finito o infinito; pero supondremos que β es un punto singular de F. Y supóngase que f está definida en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ por

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy,$$

donde la integral es uniformemente convergente. Entonces f es continua en I y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x, y)\,dx.$$

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en I y sea dado $\epsilon > 0$. Entonces existe un $Y(\epsilon)$ tal que

$$\left| \int_\eta^\beta F(x, y)\, dy \right| < \epsilon \quad \text{para } Y < \eta < \beta$$

para todo x en I. (¿Por qué) Escójase tal η y manténgase fijo. Entonces en el rectángulo cerrado acotado $R: \{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \eta\}$, la función F es uniformemente continua. Por tanto existe un $\delta(\epsilon)$ tal que

$$|F(x_1, y) - F(x_2, y)| < \frac{\epsilon}{\eta - \alpha} \quad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \int_\alpha^\beta [F(x_1, y) - F(x_2, y)]\, dy \right| \\ &< \int_\alpha^\eta |F(x_1, y) - F(x_2, y)|\, dy + \left| \int_\eta^\beta F(x_1, y)\, dy \right| + \left| \int_\eta^\beta F(x_2, y)\, dy \right| \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon \quad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad. Por el mismo argumento del Teorema 18.1a, esto implica que pueden intercambiarse el límite y la integración.

Puesto que f es continua, ciertamente es integrable, de modo que

$$J_1 = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta F(x, y)\, dy\, dx$$

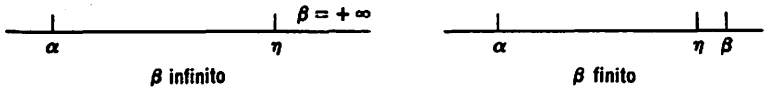
existe. Solamente necesitamos demostrar que

$$J_2 = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x, y)\, dx$$

existe, igual a J_1.

Ahora si J_2 existe, está definida por

$$J_2 = \lim_{\eta \to \beta} \int_\alpha^\eta dy \int_a^b F(x, y)\, dx.$$



Por lo tanto, considérese la diferencia Δ dada por

$$\Delta = J_1 - \int_\alpha^\eta dy \int_a^b F(x, y)\, dx.$$

La integral tiende hacia J_2 conforme $\eta \to \beta$, si J_2 existe. De aquí que si puede demostrarse que $\Delta \to 0$ conforme $\eta \to \beta$, se habrá demostrado que

J_2 existe y es igual a J_1, lo cual es nuestro fin. Ahora puede intercambiarse el orden en esta integral propia y así escribir

$$\Delta = J_1 - \int_a^b dx \int_a^\eta F(x, y)\, dy.$$

De donde

$$\Delta = \int_a^b dx \int_\eta^\beta F(x, dy)\, dy.$$

Ahora, como en la primera parte de la demostración, si $\eta > Y$ se tiene

$$|\Delta| < \int_a^b \left| \int_\eta^\beta F(x, y)\, dy \right| dx < \int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b - a).$$

Así que $\Delta \to 0$ conforme $\eta \to \beta$, como se requirió. ∎

EJEMPLO 1. Demostrar que $\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} e^{-xt}\, dt$ converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado acotado $I: \{a \leqslant x \leqslant b\}$.

Solución: Sea $m = \max(|a|, |b|)$. Entonces

$$|t^{-\frac{1}{2}} e^{-xt}| = t^{-\frac{1}{2}} e^{-xt} < t^{-\frac{1}{2}} e^{m} = M(t),$$

y $\int_0^1 M(t)\, dt$ converge. Esto establece la convergencia uniforme en I. Por tanto puede integrarse bajo el signo integral del modo siguiente:

$$\int_0^b dx \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} e^{-xt}\, dt = \int_0^1 dt \int_0^b t^{-\frac{1}{2}} e^{-xt}\, dx = \int_0^1 t^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-bt})\, dt.$$

No es necesario discutir la convergencia de esta última integral. Se sabe que converge porque el Teorema 18.3a asegura este hecho. Pero la presencia del factor $t^{-3/2}$ arroja sospechas sobre la convergencia. Examinando el integrando explicar por qué converge la integral.

EJEMPLO 2. Sea $f(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} \frac{dt}{1 + t^2}$. demostrar que la integral converge uniformemente en $\{s \geqslant 0\}$.

Solución. Ahora

$$\left| \frac{e^{-st}}{1 + t^2} \right| = \frac{e^{-st}}{1 + t^2} < \frac{1}{1 + t^2} = M(t)$$

y $\int_0^\infty M(t)\, dt$ converge. De aquí que se tiene convergencia uniforme en $\{s \geqslant 0\}$. Por tanto, puede integrarse sobre cualquier subintervalo cerrado acotado de esta semirrecta:

$$\int_0^b f(s)\, ds = \int_0^b ds \int_0^\infty e^{-st} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} \int_0^b e^{-st}\, ds = \int_0^\infty \frac{1 - e^{bt}}{1 + t^2} \frac{dt}{t}.$$

Una vez más, como en el ejemplo anterior, la convergencia de esta integral queda garantizada por el Teorema 18.3a.

Puesto que la convergencia es uniforme en $\{s \geqslant 0\}$, el Teorema 18.3a garantiza la continuidad de f en cada intervalo cerrado acotado de esa semirrecta y de aquí la continuidad en $\{s \geqslant 0\}$.

La convergencia uniforme de esta integral impropia en $\{s \geqslant 0\}$ garantiza la continuidad en $\{s \geqslant 0\}$ pero no garantiza la existencia de un límite conforme $s \to \infty$. Ni garantiza que la integral $\int_0^\infty f(s)\,ds$ exista. Aun cuando la integral existiera, no se sabría si puede intercambiarse el orden de la integración. Primero se discutirá la cuestión de tomar límites bajo el signo integral.

18.3c Teorema. Sea F continua en $\{a \leqslant x < b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde uno o ambos de b y β pueden ser infinitos, y sea f definida en I: $\{a \leqslant x < b\}$ por

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy,$$

donde la integral converge uniformemente en I. Supóngase también que existe una función definida en $\{\alpha \leqslant y < \beta\}$ tal que F converge uniformemente hacia ϕ en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \eta\}$ para todo η entre α y β conforme $x \to \infty$. Entonces $\int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy$ converge y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy.$$

Demostración. Otra vez, por el Ejercicio B1, ϕ es continua en $\{\alpha \leqslant y < \beta\}$. Por lo tanto, ϕ es integrable en cualquier subintervalo cerrado de J. Por la convergencia uniforme de la integral que define a f, existe un $Y(\epsilon)$ tal que, para x en I,

$$\text{(1)} \qquad \left|\int_\eta^\beta F(x, y)\,dy\right| < \epsilon \qquad \text{si} \quad Y < \eta < \beta.$$

Entonces, para $Y < \eta_1 \leqslant \eta_2 < \beta$,

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x, y)\,dy\right| = \left|\int_{\eta_1}^{\beta} F(x, y)\,dy - \int_{\eta_2}^{\beta} F(x, y)\,dy\right|$$
$$< \left|\int_{\eta_1}^{\beta} F(x, y)\,dy\right| + \left|\int_{\eta_2}^{\beta} F(x, y)\,dy\right| < 2\epsilon.$$

Conforme $x \to \infty$, se toman los límites bajo el signo integral en la primera integral, por el Teorema 18.3a:

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} \phi(y)\,dy\right| < 2\epsilon \qquad \text{si } Y < \eta_1 < \eta_2 < \beta.$$

Por el criterio de Cauchy, $\int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy$ converge. Entonces, puesto que la integral converge, puede mantenerse η_1 fijo y hacer que $\eta_2 \to \beta$ en la desigualdad anterior para obtener

$$\text{(2)} \qquad \left|\int_{\eta_1}^{\beta} \phi(y)\,dy\right| < 2\epsilon \qquad \text{si } Y < \eta_1 < \beta.$$

Para ver que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es igual a $\int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy$, considérese la diferencia entre $f(x)$ y la integral

$$\text{(3)} \qquad \left|f(x) - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy\right| = \left|\int_\alpha^\beta F(x, y)\,dy - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy\right|$$
$$= \left|\int_\alpha^\beta [F(x, y) - \phi(y)]\,dy\right|$$
$$< \left|\int_\alpha^\eta [F(x, y) - \phi(y)]\,dy\right|$$
$$+ \left|\int_\eta^\beta F(x, y)\,dy\right| + \left|\int_\eta^\beta \phi(y)\,dy\right|.$$

Escójase η entre Y y β, y manténgase fijo. Se sabe que F converge uniformemente hacia ϕ en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \eta\}$. Así que para cada $\epsilon > 0$ existe un $X(\epsilon)$ tal que

$$\text{(4)} \quad |F(x, y) - \phi(y)| < \epsilon/(\eta - \alpha) \text{ si } X < x < b \text{ para todo } y \text{ en } \{\alpha \leqslant y \leqslant \eta\}.$$

De (1), (2), (3) y (4) se obtiene

$$\left|f(x) - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy\right| < \epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon, \qquad \text{si } X < x < b. \quad \blacksquare$$

El problema de intercambiar el orden de integración cuando ambas integrales involucradas son impropias es difícil y es mejor manejarlo en términos de la definición de integral de Lebesgue. Muchas condiciones suficientes diferentes podrían darse. Nos contentaremos con probar el siguiente teorema.

18.3d Teorema. Sea F continua en $\{a < x < b,\ \alpha < y < \beta\}$, donde cualquiera o todos de a, b, α, β pueden ser infinitos. Supóngase que ambas de las integrales iteradas

$$\int_a^b dx \int_a^\beta |F(x, y)|\,dy \quad \text{y} \quad \int_a^\beta dy \int_a^b |F(x, y)|\,dx$$

existen. Entonces ambas de las siguientes integrales existen y

$$\int_a^b dx \int_a^\beta F(x, y)\,dy = \int_a^\beta dy \int_a^b F(x, y)\,dx.$$

Demostración. Escribiendo $F = F^+ - F^-$ (ver Sección 4.4), donde

$$F^+(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{si } F(x, y) > 0 \\ 0 & \text{si } F(x, y) < 0. \end{cases}$$

y

$$F^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x, y) > 0 \\ -F(x, y) & \text{si } F(x, y) < 0, \end{cases}$$

se ve que es suficiente probar el teorema para F no negativa. Por lo tanto, supongamos que F es no negativa en todo el resto de la demostración.

Sea

$$I = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta F(x, y)\, dy.$$

y

$$J = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x, y)\, dx.$$

Para todo $c < d$ entre a y b y todo $\xi < \eta$ entre α y β,

$$I > \int_c^d dx \int_\alpha^\eta F(x, y)\, dy = \int_\xi^\eta dy \int_c^d F(x, y)\, dx,$$

pudiendo realizarse aquí el intercambio por el Teorema 18.1a.

Puesto que esta desigualdad debe cumplirse para todo $c < d$ entre a y b,

$$I > \int_\xi^\eta dy \int_a^b F(x, y)\, dx. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Entonces,

$$I > \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x, y)\, dx = J.$$

Pero el argumento es completamente simétrico, de manera que también $J \geqslant I$. De aquí que $I = J$. ∎

Realmente el teorema es verdadero si solamente suponemos que una de las dos integrales es absolutamente convergente. Pero nuestras suposiciones nos capacitan para evitar la necesidad de probar la existencia de la otra integral.

Ahora consideremos el problema de diferenciar una integral impropia bajo el signo integral.

18.3e Teorema. Sean F y $\partial F/\partial x$ continuas en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y < \beta\}$, donde β puede ser finito o infinito. Supóngase que existe un x_0 en

$\{a \leqslant x \leqslant b\}$ para el cual $\int_\alpha^\beta F(x_0, y)\, dy$ converge y $\int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Entonces $\int_\alpha^\beta F(x, y)\, dy$ converge uniformemente en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ Y si se denota este valor por $f(x)$, entonces f es una función diferenciable y

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Demostración. Sea $g(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy$.

Entonces, por el Teorema 18.3b,

$$\int_{x_0}^x g(t)\, dt = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_0}^x \frac{\partial F}{\partial t}(t, y)\, dt = \int_\alpha^\beta [F(x, y) - F(x_0, y)]\, dy$$

$$= \int_\alpha^\beta F(x, y)\, dy - \int_\alpha^\beta F(x_0, y)\, dy = f(x) - f(x_0).$$

Por el teorema fundamental del cálculo, derivamos esta ecuación y obtenemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(t)\, dt = g(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Esto demuestra que $f(x)$ existe —es decir, $\int_\alpha^\beta F(x, y)\, dx$ existe— que es diferenciable, y que la derivada puede calcularse derivando bajo el signo integral. Para completar la demostración, debe demostrarse que la convergencia es uniforme. Escojamos $Y(\epsilon)$ de modo que

$$\left| \int_\eta^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy \right| < \frac{\epsilon}{(b - a)} \qquad \text{si } Y < \eta < \beta$$

uniformemente para toda x en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Considérese

$$\text{(1)} \qquad \left| \int_\eta^\beta F(x, y)\, dy \right| = \left| \int_\eta^\beta \left[\int_{x_0}^x \frac{\partial F}{\partial t}(t, y)\, dt - F(x_0, y) \right] dy \right|$$

$$< \left| \int_\eta^\beta dy \int_{x_0}^x \frac{\partial F}{\partial t}(t, y)\, dt \right| + \left| \int_\eta^\beta F(x_0, y)\, dy \right|$$

Puesto que $\int_\alpha^\beta F(x_0, y)\, dy$ existe, existe un $Y_1(\epsilon)$ tal que

$$\text{(2)} \qquad \left| \int_\eta^\beta F(x_0, y)\, dy \right| < \epsilon \qquad \text{si } Y_1 < \eta < \beta.$$

Combinando (1) y (2) se obtiene para $\beta > \eta > Y_2 = \max(Y, Y_1)$,

$$\left|\int_\eta^\beta F(x,y)\,dy\right| < \left|\int_{x_0}^{x} dt\int_\eta^\beta \frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\,dy\right| + \epsilon$$

$$< \int_a^b \left|\int_\eta^\beta \frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\,dy\right| dt + \epsilon < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dt + \epsilon$$

$$= 2\epsilon$$

EJEMPLO 3. Evaluar $\int_0^\infty e^{-t^2}\cos xt\,dt$.

Solución. Denotemos el valor de esta integral por $f(x)$. Es evidente que $f(x)$ existe y es continua para toda x, puesto que se ve fácilmente que la integral converge uniformemente para toda x por la prueba M:

$$|e^{-t^2}\cos xt| < e^{-t^2} = M(t),$$

y $\int_0^\infty M(t)\,dt$ converge.

Por derivación bajo el signo integral se obtiene

$$f'(x) = -\int_0^\infty te^{-t^2}\operatorname{sen} xt\,dt,$$

lo cual es válido si esta integral converge uniformemente. Se aplica una vez más la prueba M:

$$|-te^{-t^2}\operatorname{sen} xt| < te^{-t^2} = M(t)$$

y $\int_0^\infty M(t)$ converge.

Entonces, integrando por partes se obtiene

$$f'(x) = -\int_0^\infty te^{-t^2}\operatorname{sen} xt\,dt = -\frac{x}{2}\int_0^\infty e^{-xt}\cos xt\,dt = -\frac{x}{2}f(x).$$

Se observa que

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de modo que f satisface las condiciones

$$f'(x) = -\frac{x}{2}f(x) \qquad f(0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Sea I el intervalo máximo en torno a $x = 0$ en el cual $f(x) > 0$. Se

sabe que existe por lo menos un pequeño intervalo en el cual $f(x) > 0$, supuesto que f es continua y $f(0) > 0$. Entonces en I

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{2}.$$

De modo que $$\log f(x) = -\frac{x^2}{4} + C_0$$

o bien $$f(x) = Ce^{-x^2/4},$$

donde $$C = f(0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

De donde, en I

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}.$$

Ahora que esta evaluación se establece en el intervalo I, demostraremos que I es el eje x completo. Supóngase que no fuera. Entonces existiría un punto finito x_0 en el cual f se nulifica. Tomando límites conforme $x \to x_0$ se obtiene (puesto que ambos miembros son continuos)

$$0 = f(x_0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x_0^2/4}.$$

Pero el segundo miembro no es cero. Esta contradicción demuestra que I es el eje x completo y de aquí que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos xt\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$$

para toda x.

18.3f Teorema. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Dignificamos este ejemplo llamándole teorema porque es importante en el trabajo posterior sobre las series de Fourier y porque es un poco difícil de establecer.

Demostración. Para evaluar la integral, considérese la función f definida en $\{x \geqslant 0\}$ por

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Por el Ejemplo 4 de la Sección 18.2, esta integral converge uniformemente en $\{x \geqslant 0\}$ y, por lo tanto, f es continua allí.

Formalmente, derivando bajo el signo integral, se obtiene

$$f'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt}\operatorname{sen} t\,dt.$$

Ahora bien $$|e^{-xt}\operatorname{sen} t| < e^{-xt} < e^{-ct} = M(t) \qquad \{x > c\}$$

De aquí que la integral converge uniformemente en $\{x \geqslant c\}$ para todo

$c > 0$. Por lo tanto, por el Teorema 18.3e, la derivación es válida para $\{x \geqslant c\}$. Pero cualquier $x > 0$ dado puede alcanzarse en tal intervalo de modo que la derivación es válida para todo $x > 0$.

Ahora evaluemos $f'(x)$ por medios elementales. La integración por partes establece que

$$\int_0^T e^{-xt} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{e^{-xt}(-x \operatorname{sen} t - \cos t)}{1 + x^2}\Bigg|_0^T,$$

de manera que $f'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt} \operatorname{sen} t \, dt = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Por lo tanto $f(x) = C - \text{ang tan} x \qquad x > 0.$

Para evaluar C, calculemos $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Como se hizo notar, la integral que define $f(x)$ converge uniformemente para $\{x \geqslant 0\}$. Pero conforme $x \to \infty$, el integrando no converge uniformemente hacia cero en $\{t \geqslant 0\}$. Sin embargo, para cada $\alpha > 0$, converge uniformemente hacia cero en $\{t \geqslant \alpha\}$, puesto que

$$\left| e^{-xt} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right| < e^{-x\alpha} \to 0 \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ fijo escribimos $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \int_0^\epsilon e^{-xt} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt + \int_\epsilon^\infty e^{-xt} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt$$

$$= f_1(x) + f_2(x), \quad \text{respectivamente.}$$

Ya que $\left| e^{-xt} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \right| < 1$ para $x > 0$, se tiene $|f_1(x)| \leqslant \epsilon$ para todo $x > 0$. La integral que define $f_2(x)$ converge uniformemente para $\{x \geqslant \epsilon\}$ y además su integrando converge uniformemente hacia cero conforme $x \to \infty$. Entonces, por el Teorema 18.3c, se tiene que $f_2(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$. Así que existe un $X(\epsilon)$ tal que $|f_2(x)| < \epsilon$ si $x > X$. Entonces se tiene que cada $\epsilon > 0$,

$$|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \qquad \text{si } x > X.$$

Esto significa que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$. Ya que

$$f(x) = C - \text{ang tan } x \qquad x > 0,$$

se concluye que

$$0 = \lim_{x \to \infty} (C - \text{ang tan } x) = C - \pi/2.$$

De modo que

$$C = \pi/2.$$

Así se tiene

$$f(x) = \pi/2 - \text{ang tan } x \qquad x > 0.$$

Es importante recordar que f está definida por la integral y que esta evaluación de f ha sido establecida solamente para $x > 0$. Pero podemos extender la evaluación para incluir $x = 0$ muy fácilmente. Como se hizo notar al principio de la demostración, f es continua en $\{x \geqslant 0\}$. Tomando límites desde la derecha, entonces se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt = f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\pi}{2} - \text{ang tan} x \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4. Evaluar $f(x) = \int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} xt}{t} \, dt$.

Solución. Evidentemente $f(0) = 0$. Para $x > 0$, se hace la sustitución $xt = y$. Entonces

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t} \, dt = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y} \, dy = \frac{\pi}{2}.$$

Para $x < 0$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t} = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(-x)t}{t} \, dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Así que

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

EJEMPLO 5. Evaluar $f(x, y) = \int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} xt \cos yt}{t} \, dt$.

Solución:

$$f(x, y) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \cos yt}{t} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x + y)t}{t} \, dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x - y)t}{t} \, dt.$$

Ya que $y = |y|$ o bien $-y = |y|$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x + |y|)t}{t} \, dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x - |y|)t}{t} \, dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x > |y| \\ \dfrac{\pi}{4} & x = |y| \\ 0 & -|y| < x < |y| \\ -\dfrac{\pi}{4} & x = -|y| \\ -\dfrac{\pi}{2} & x < -|y| \end{cases}$$

EJERCICIOS A

1. Justificar cuidadosamente lo siguiente:

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-xy}\frac{dy}{1+y} \to \log 2$ conforme $x \to 0$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-xz}\frac{dz}{1+z} \to 0$ conforme $x \to \infty$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t(x+1)} \cos xt \frac{t}{t+x^2}\,dt \to 1$ conforme $x \to 0$

(Sugerencia: Usar B 6 de la Sección 18.2.)

(d) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-xt} \cos xt\,dt \to 0$ conforme $x \to \infty$

(e) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^1 y^{-1/2} \cos\frac{x}{y}\frac{x-y}{x+y}\,dy = \int_0^1 dy \int_0^2 y^{-1/2} \cos\frac{x}{y}\frac{x-y}{x+y}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_0^\infty \operatorname{sen}\frac{y}{x} e^{-xy} y^{1/2} \cos^2 y\,dy = \int_0^\infty dy \int_1^2 \operatorname{sen}\frac{y}{x} e^{-xy} y^{1/2} \cos^2 y\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-(x+1)y} \cos\sqrt{y}\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-(x+1)y} \cos\sqrt{y}\,dx$

(h) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-xy}\,dy}{1+y} = -\int_0^1 \frac{e^{-xy} y\,dy}{1+y}$ para toda x

(i) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}(1+y)}\,dy = -\int_0^1 \frac{e^{-xy}\sqrt{y}\,dy}{(1+y)}$ para toda x

(j) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{dy}{x+y^3} = -\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+2xy^3+y^6}$ $x > 0$

2. Aunque el integrando no converge uniformemente hacie cero, demostrar que:

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-xy}\frac{dy}{1+y} \to 0$ conforme $x \to \infty$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\frac{dy}{1+y^2} \to 0$ conforme $x \to \infty$

3. Evaluar $f(z) = \displaystyle\int_0^\infty x e^{-zx^2}\,dx$. ¿Para qué valores de z es esto válido?

4. (a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$ y de aquí que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} t^n\,dt = (n!)/x^{n+1}$

(b) Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$.

5. Demostrar formalmente, sin justificar los pasos, que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}$.

EJERCICIOS B

1. Supóngase que F es continua en $\{a \leqslant x < b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, donde b es finito o infinito. Supóngase también que existe una función ϕ en $\{\alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$ tal que F tiende uniformemente hacia ϕ conforme $x \to b$. Demostrar que ϕ es continua.

2. En el Ejercicio 1 anterior, si b es finito definir $F(b, y) = \phi(y)$. Entonces demostrar que F es continua en $\{a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$.

3. Evaluar las integrales $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x-y)\,dy}{(x+y)^3}$, y de aquí demostrar que la inversión del orden de integración no siempre es preferible.

4. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy-1/y}\frac{\operatorname{sen} x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-xy-1/y}\frac{\operatorname{sen} x}{1+x}\,dy$.

5. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

6. Demostrar rigurosamente que si f es una función continua acotada en $\{-\infty < x < \infty\}$, entonces la función u, definida en $\{0 < t < \infty, -\infty < x < \infty\}$ por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy$$

satisface la ecuación $u_{xx} = u_t$.

7. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{x^2}{y^2}}\,dy$.

(a) Demostrar que para $x > 0$, $f'(x) = -2f(x)$. *(Sugerencia:* Hacer la sustitución $y = x/t$.)

(b) Deducir $f(x) = (1/2)\sqrt{\pi} e^{-|x|}$.

8. Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$. *(Sugerencia:* $\cos ax - \cos bx = -x\int_a^b \operatorname{sen} xt\,dt$.)

9. Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \operatorname{sen} yt}{t^2}\,dt$.

10. Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \cos yt \cos zt}{t}\,dt$.

11. Evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \operatorname{sen} yt \cos zt}{t^2}\,dt.$

12. Evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \operatorname{sen} yt \operatorname{sen} zt}{t^3}\,dt.$

EJERCICIOS C

1. Sea $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$, donde el radio de convergencia es infinito y donde los coeficientes a son todos no negativos. Supóngase también que $\sum_0^\infty a_n n!$ converge Entonces demostrar que $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx$ converge y que $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx = \Sigma a_n n!$.

2. Demostrar rigurosamente que $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}$.

3. Demostrar que si g es continua en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y x_0 es un punto en I, entonces

$$f'(x) = g(x)f(x) + h(x) \qquad f(x_0) = c$$

puede tener cuando más una solución en I. *(Sugerencia:* Supóngase que existieran dos soluciones. Demostrar que la diferencia es positiva en todas partes en I si es mayor que cero en un punto en I.) Deducir el valor de $\int_0^\infty e^{-t^2} \operatorname{sen} xt\,dt$.

4. Evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 xy}{x^2}\,dx.$

5. Evaluar $f(y) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xy}{x(a^2 + x^2)}\,dx.$ [*Sugerencia:* Demostrar que $f''(y) - a^2 f(y)$ es constante.]

6. Evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt \operatorname{sen} yt}{t}\,dt.$ [*Sugerencia:* Hacer $f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{\operatorname{sen} xt \operatorname{sen} yt}{t}\,dt$ y proceder como en el Teorema 18.3f.]

7. A partir del Ejercicio 6 anterior, deducir el valor de $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt\,(1 - \cos at)}{t^2}\,dt.$

8. A partir del Ejercicio 6, deducir el valor de $\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,dt.$

19

Funciones Gama y Beta. Método de Laplace y fórmula de Stirling

19.1 LA FUNCION GAMA

Una importante función definida por medio de una integral que depende de un parámetro es la **función Gama** dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \qquad \{x > 0\}.$$

El integrando es singular en $t = 0$ si $x < 1$. Procederemos a establecer algunas propiedades sencillas de Γ.

19.1a Teorema. Γ es continua e infinitamente diferenciable en $\{x > 0\}$.

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario en $\{x > 0\}$. Escójanse a y b de manera que $0 < a < x_0 < b$. Examinemos ahora Γ en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$. Sea $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, donde Γ_1 y Γ_2 están definidas por

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

y

$$\Gamma_2(x) = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Para x en I y $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$|e^{-t} t^{x-1}| = e^{-t} t^{x-1} < t^{a-1} \equiv M_1(t);$$

y para $t \geqslant 1$,

$$|e^{-t} t^{x-1}| < e^{-t} t^{b-1} \equiv M_2(t).$$

Puesto que $\int_0^1 M_1(t)\,dt$ y $\int_1^\infty M_2(t)\,dt$ convergen, las integrales que definen a Γ_1 y Γ_2 convergen uniformemente para x en I y, en consecuencia, estas funciones son continuas en I. Entonces Γ es continua en I, ya que es la suma de dos funciones continuas allí; en particular, Γ es continua en x_0. Supuesto que x_0 fue un número positivo arbitrario, Γ es continua en $\{x > 0\}$.

De modo semejante, puede demostrarse que la diferenciación repetida bajo el signo integral es permisible en $\{x > 0\}$. Los detalles se dejan para los ejercicios. ∎

A continuación se da una fórmula que en ocasiones es muy útil.

19.1b Corolario. Para cualquier $a > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-at}t^{x-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x}.$$

Demostración. Probar haciendo la sustitución $at = \pi$. ∎

El siguiente teorema da una importante ecuación funcional que satisface Γ.

19.1c Teorema. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \{x > 0\}$.

Demostración. Para $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt = e^{-t}t^x\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x).$$ ∎

19.1d Corolario. Para todo entero $n \geq 1$ y todo $x > 0$,

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x).$$

Demostración. Probar por inducción, a partir del Teorema 19.1c. ∎

19.1e Corolario. $\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demostración. Por el Teorema 19.1d, es suficiente probar que $\Gamma(1) = 1$. Pero

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$ ∎

El corolario precedente señala una de las propiedades más importantes de Γ, a saber que se interpola entre los factoriales. Quizá es desafortunado el que la notación tradicional sea $\Gamma(n+1) = n!$ en lugar de $\Gamma(n) = n!$. Sin embargo, aunque puede intentarse usar la última, no nos separaremos de la notación usual debido a la gran cantidad de literatura en la cual se usa $\Gamma(x)$ para la función que se ha definido aquí. En ocasiones se usa $x!$ o bien $\pi(x)$ para $\Gamma(x+1)$.

La integral que define a Γ diverge para $x \leq 0$. En consecuencia, Γ se define solamente para $x > 0$. Por lo tanto, podría intentarse definir Γ para $x < 0$ en cualquiera de muchas diferentes formas. Sin embargo, existe

una manera de definir Γ para valores negativos de x la cual es «más natural» en un sentido que el estudiante entenderá después de estudiar la teoría de la función compleja, a saber, en el sentido de la continuación analítica. Esto conduce hacia la misma definición que se obtiene usando las fórmulas de los Teoremas 19.1c y 19.1d.

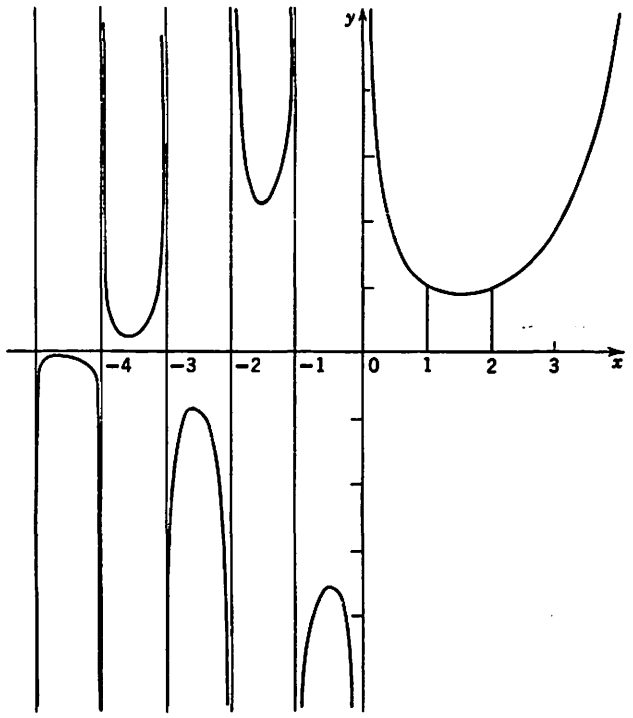
Por ejemplo, a partir del Teorema 19.1c se tiene

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x \qquad \text{en } \{x > 0\}.$$

Pero el segundo miembro de esta ecuación está definido para toda $x > -1$ excepto $x = 0$. Tomamos esto como la definición de Γ en $\{-1 < x < 0\}$. De modo semejante, con base en el Teorema 19.1d, se tiene para $n = 2$ que

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+2)/x(x+1).$$

El segundo miembro aquí tiene sentido para toda $x > -2$ excepto $x = 0$ y $x = -1$. Por lo tanto, proporciona una definición de Γ en $\{-2 < x < -1\}$ y $\{-1 < x < 0\}$.



Encaremos ahora la cuestión de compatibilidad: ¿Son compatibles las definiciones de Γ en $\{-1 < x < 0\}$ dadas por estas dos fórmulas dife-

rentes? La respuesta es un fácil «Sí», y la demostración se deja para los problemas.

Por inducción, se extiende la definición de Γ para toda x excepto 0 y los enteros negativos. El comportamiento de la función se indica mediante la gráfica adjunta.

19.2 LA FUNCION BETA

Una función íntimamente relacionada a Γ es la **función Beta** B dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

19.2a Teorema. $B(x, y)$ es continua en $\{x > 0,\ y > 0\}$.

Demostración. La demostración de este teorema se da como ejercicio (B2).

Aunque a primera vista parece que B tiene poca relación con Γ, están íntimamente relacionadas de un modo sorprendente. Antes de investigar esta relación, necesitamos una nueva fórmula para B.

19.2b Lema. $B(x, y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,d\tau \qquad \{x > 0, y > 0\}.$

Demostración. Hacer $t = \tau/1 + \tau$, $dt = d\tau/(1+\tau)^2$. ∎

Ahora estableceremos la relación entre B y Γ.

19.2c Teorema. $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) \qquad \{x > 0,\ y > 0\}$.

Demostración. Por el Teorema 19.1b,

$$\Gamma(x) = t^x \int_0^\infty \tau^{x-1}e^{-t\tau}\,d\tau = \int_0^\infty t^x\tau^{x-1}e^{-t\tau}\,d\tau.$$

Multiplicando ambos miembros por $t^{y-1}e^{-t}$ e integrando, se obtiene

$$\Gamma(x)\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}\,dt = \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt \int_0^\infty t^x\tau^{x-1}\,e^{-t\tau}\,d\tau$$

o bien

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty t^{x+y-1}\tau^{x-1}e^{-t}e^{-t\tau}\,d\tau.$$

Por el Teorema 18.3d, el intercambio del orden de integración es permisible si ambas integrales iteradas convergen (ya que los integrandos son positivos). Pero el orden que se tiene evidentemente converge. Y en el otro orden se tiene

$$\int_0^\infty d\tau \int_0^\infty t^{x+y-1}\tau^{x-1}e^{-t(1+\tau)}\,dt = \int_0^\infty \tau^{x-1}\,d\tau \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t(1+\tau)}\,dt.$$

Por el Teorema 19.1b, la integral interna puede evaluarse de modo que la integral iterada se reduce a

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)\,dt = \Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,dt$$
$$= \Gamma(x+y)B(x, y)$$

Puesto que ambas integrales iteradas convergen, son iguales. Así que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x, y)$ y ya que $\Gamma(x+y) \neq 0$ (¿por qué?) puede dividirse entre ella para completar la demostración. ∎

EJERCICIOS A

1. Demostrar que $\Gamma(x) > 0$ en $\{x > 0\}$ y sgn $\Gamma(x) = (-1)^n$ en $\{-n < x < n+1\}$.
2. Demostrar que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt.$
3. Es evidente, por el Teorema 19.2c, que $B(x, y) = B(y, x)$. Demostrar esto directamente a partir de la definición de B haciendo la sustitución $t = 1 - \tau$.
4. Demostrar que $\Gamma(x) \to +\infty$ conforme $x \to +0$.
5. Evaluar $B(x, 1)$.
6. Demostrar que $B(x, y) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta.$
7. Demostrar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Sugerencia*: Hacer $t = \tau^2$).
8. Evaluar $\Gamma(-\frac{1}{2}), \Gamma(-\frac{3}{2}), \ldots, \Gamma(-n+\frac{1}{2})$ y $\Gamma(\frac{3}{2}), \Gamma(\frac{5}{2}), \ldots, \Gamma(n+\frac{1}{2})$.
9. Definir ψ por $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ y demostrar que $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

EJERCICIOS B

1. Completar la demostración del Teorema 19.1a y de aquí establecer que
$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n\,dt \qquad \{x > 0\}.$$
2. Probar el Teorema 19.2a. Aplicar la prueba M de Weierstrass.
3. Demostrar que Γ tiene un solo mínimo en $\{x > 0\}$ el cual se encuentra entre 1 y 2.
4. A partir de la fórmula para $\Gamma(n+\frac{1}{2})$, obtenida en el Ejercicio A8 de esta sección, deducir
$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2}).$$
5. Aplicar el Ejercicio A6 para demostrar que
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}$$
y
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}.$$

6. (a) Observar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}\theta\, d\theta < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\theta\, d\theta < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1}\theta\, d\theta$$

(*b*) Deducir a partir del Ejercicio 5 anterior que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

7. Dar una demostración formal (esto es, manipulación sin justificación) del Teorema 19.2c, escribiendo

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-\tau} t^{a-1}\tau^{b-1}\, dt\, d\tau.$$

(*a*) Introducir $t = x^2$ y $\tau = y^2$, convertir a coordenadas polares y evaluar.
(*b*) Hacer $t + \tau = \xi$ y $\tau = \xi\eta$, y evaluar.

EJERCICIOS C

1. Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^{1+\alpha}}\,dx \qquad 0 < \alpha < 1.$

2. Evaluar:

(*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^2}{x^{2+\alpha}} \quad \{-1 < \alpha < 1\}$ (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^3}{x^{3+\alpha}} \quad \{-2 < \alpha < 1\}$

3. Sea ψ la función definida en el Ejercicio A9.

(*a*) Demostrar que $\psi(x+n) = \psi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}$.

(*b*) Deducir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\psi(x+n) - \log n\right) = \psi(x) + \gamma + \frac{1}{x} - \sum_1^\infty \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. (Ver el Ejercicio C2, Sección 14.2.)

4. Supóngase que en el Ejercicio 3(*b*) anterior se sabe que $\lim_{n\to\infty}[\psi(x+n) - \log n] = 0$. Entonces demostrar que

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Deducir

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \prod_{k=1}^\infty \left\{\left(1 + \frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right\}.$$

(Un **producto infinito** $\prod_{k=1}^\infty a_k$ se define como $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n a_k$ si el límite existe, y $\prod_{k=1}^n a_k$ se define como $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$).

5. A partir del Ejercicio 4 anterior y de la definición de Γ, deducir

$$\Gamma'(1) = \psi(1) = \int_0^\infty e^{-t}\log t\, dt = -\gamma.$$

19.3 METODO DE LAPLACE

Un método debido al matemático francés Laplace nos capacita para estimar el tamaño de ciertos tipos de integrales que dependen de un parámetro. En particular, nos interesa estimar $\Gamma(x)$ cuando x es grande y, de aquí, obtener información acerca del tamaño de $n!$ cuando n es grande.

En el Capítulo 7 se introdujo el símbolo $\sim$, el cual se lee «tiene el mismo límite que». Ahora se desea extender el significado de este símbolo. Escribiremos

$$A \sim B \qquad \text{conforme } x \to \infty,$$

si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

La expresión "$A \sim B$" ahora se leerá como "A es **asintótica** a B". Estamos interesados en aplicar este concepto donde se sabe algo acerca del tamaño o del comportamiento de B y, de este modo, poder inferir algo acerca del comportamiento de A. Obsérvese que no se hace ninguna suposición acerca de la existencia de $\lim_{x\to\infty} A(x)$ o bien de $\lim_{x\to\infty} B(x)$. En general, estaremos interesados en situaciones donde estos límites no existen.

EJEMPLO. Demostrar que $x^2 + x\cos x \sim x^2$ conforme $x \to \infty$.

Solución:

$$\frac{x^2 + x\cos x}{x^2} = 1 + \frac{\cos x}{x} \to 1 \text{ conforme } x \to \infty.$$

19.3a Lema. Si $a > 0$, $b > 0$ y f está definido por

$$f(x) = \int_0^a e^{-xbt^2}\, dt,$$

entonces $f(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{bx}}$ conforme $x \to \infty$.

Demostración. Hacer $\sqrt{bx}\,t = u$, de manera que

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{bx}a} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{bx}}.$$

Entonces $$\sqrt{bx}f(x) = \int_0^{\sqrt{bx}a} e^{-u^2}\, du \to \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$ ∎

El procedimiento, conocido como **método de Laplace**, se presenta en el siguiente teorema.

19.3b Teorema. Supóngase que

(i) f tiene dos derivadas continuas en $\{0 \leqslant t < a\}$ donde a puede ser finito o infinito,

(ii) f es creciente en $\{0 \leqslant t < a\}$,

(iii) $f(0) = f'(0) = 0 \qquad f''(0) > 0$,

(iv) existe un x_0 para el cual

$$I(x) = \int_0^a e^{-xf(t)}\,dt \qquad \text{existe.}$$

Entonces $I(x)$ existe para todo $x > x_0$ y

$$I(x) \sim \sqrt{\pi/2xf''(0)} \qquad \text{conforme } x \to \infty.$$

Demostración. Primero obsérvese que, para $x > x_0$,

$$e^{-xf(t)} \leqslant e^{-x_0 f(t)}.$$

Por tanto, $I(x)$ existe por la prueba de comparación.

Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < f''(0)$. Por la continuidad de f'', existe un $\delta < a$ para el cual

$$0 < f''(0) - \epsilon \leqslant f''(t) \leqslant f''(0) + \epsilon \qquad \text{en } \{0 \leqslant t \leqslant \delta\}. \tag{1}$$

Entonces

$$I(x) = \int_0^a e^{-xf(t)}\,dt = \int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt + \int_\delta^a e^{-xf(t)}\,dt \equiv I_1(x) + I_2(x)$$

respectivamente. Primero examinemos I_2. En $\{\delta \leqslant t < a\}$ se tiene $f(t) \geqslant f(\delta)$, ya que f es monótona. Así que

$$e^{-xf(t)} = e^{-xf(t)/2}e^{-xf(t)/2} \leqslant e^{-xf(t)/2}e^{-xf(\delta)/2} < e^{-x_0 f(t)}e^{-xf(\delta)/2}$$

si $x \geqslant 2x_0$. En consecuencia

$$I_2 = \int_\delta^a e^{-xf(t)}\,dt < e^{-xf(\delta)/2}\int_\delta^a e^{-x_0 f(t)}\,dt < e^{-xf(\delta)/2}\int_0^a e^{-x_0 f(t)}\,dt,$$

o bien

$$0 \leqslant I_2 \leqslant e^{-xf(\delta)/2}I(x_0) \qquad \{x \geqslant 2x_0\}. \tag{2}$$

Ahora, en $\{0 \leqslant t \leqslant \delta\}$ se tiene

$$f(t) = f(0) + f''(0)t + f'''(\tau)t^2/2,$$

donde $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 0$. Pero $f(0) = f'(0) = 0$, de modo que

$$f(t) = f'''(\tau)t^2/2.$$

A partir de esta última fórmula y de (1) se obtiene

$$[f''(0) - \epsilon]t^2/2 < f(t) \leqslant [f''(0) + \epsilon]t^2/2,$$

de manera que $e^{-x[f''(0)+\epsilon]t^2/2} \leqslant e^{-xf(t)} \leqslant e^{-x[f''(0)-\epsilon]t^2/2}$.

Integremos esta desigualdad para obtener

$$\int_0^\delta e^{-x[f''(0)+\epsilon]t^2/2}\,dt < I_1(x) < \int_0^\delta e^{-x[f''(0)-\epsilon]t^2/2}\,dt. \tag{3}$$

Conbinando las ecuaciones (2) y (3) anteriores,

$$\int_0^\delta e^{-x[f''(0)+\epsilon]t^2/2}\,dt < I(x) < \int_0^\delta e^{-x[f''(0)-\epsilon]t^2/2}\,dt + e^{-xf(\delta)/2}I(x_0), \tag{4}$$

para $x \geqslant 2x_0$.

Si se multiplica toda la (4) por $\sqrt{x}$ y se hace $x \to \infty$, se obtiene una contribución de las integrales por el Lema 19.3a, mientras que

$$\sqrt{x}e^{-xf(\delta)/2}I(x_0) \to 0.$$

Esto proporciona

$$\tfrac{1}{2}(2\pi/[f''(0)+\epsilon])^{1/2} \leqslant \underline{\lim_{x\to\infty}}\sqrt{x}I(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to\infty}}\sqrt{x}I(x) \leqslant \tfrac{1}{2}(2\pi/[f''(0)-\epsilon])^{1/2}.$$

Esta desigualdad se cumple para todo positivo $\epsilon < f''(0)$. Haciendo $\epsilon \to 0$ se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}I(x) = \sqrt{\pi/2f''(0)}.$$

EJEMPLO. Estudiar el comportamiento asintótico de la función I dada por

$$I(x) = \int_0^1 e^{x\cos t}\,dt \qquad \text{conforme } x \to \infty.$$

Solución. Haciendo la selección más obvia para f, a saber $f(t) = -\cos t$, se ve que el Teorema 19.3b no se aplica puesto que $f(0) \neq 0$. Ya que ésta es la única condición del teorema que no se satisface completamente aquí, se escribe la integral en la forma

$$I(x) = e^x\int_0^1 e^{x(\cos t - 1)}\,dt = e^x\int_0^1 e^{-x(1-\cos t)}\,dt$$

y se aplica el Teorema 19.3b a la integral de la derecha con $f(t) = 1 - \cos t$. Entonces se ve que

$$e^{-x}I(x) = \int_0^1 e^{-x(1-\cos t)}\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

o bien

$$I(x) \sim e^x\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

19.3c Corolario. Supóngase que f satisface las condiciones del Teorema 19.3b y sea g continua en $\{0 \leqslant t < a\}$. Si

$$I(x) = \int_0^a g(t)e^{-xf(t)}\,dt$$

converge absolutamente para x_0, entonces $I(x)$ converge absolutamente para $x > x_0$ y

$$I(x) \sim g(0)\sqrt{\pi/2xf''(0)}.$$

Demostración. Para $x > x_0$,

$$|g(t)|e^{-xf(t)} \leqslant |g(t)|e^{-x_0 f(t)},$$

de modo que $I(x)$ converge absolutamente por la prueba de comparación.

Una vez más partimos la integral

$$I(x) = \int_0^\delta g(t)e^{-xf(t)}\,dt + \int_\delta^a g(t)e^{-xf(t)}\,dt \equiv I_1(x) + I_2(x)$$

respectivamente, donde δ se especificará posteriormente. Ahora bien, para cualquier δ fijo calculamos, para $x \geqslant 2x_0$,

$$|I_2(x)| \leqslant e^{-xf(\delta)/2}\int_\delta^a |g(t)|e^{-x_0 f(t)}\,dt \leqslant C_0 e^{-xf(\delta)/2}, \tag{1}$$

donde C_0 es una constante, a saber

$$C_0 = \int_0^a |f(t)|e^{-x_0 f(t)}\,dt.$$

Sea dado $\epsilon > 0$ y escojamos δ de modo que (y esto es posible por la continuidad)

$$g(0) - \epsilon \leqslant g(t) \leqslant g(0) + \epsilon \qquad \text{en } \{0 \leqslant t \leqslant \delta\}.$$

Mutiplicando esto por $e^{-xf(t)}$ e integrando, se obtiene

$$[g(0) - \epsilon]\int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt \leqslant I_1 \leqslant [g(0) + \epsilon]\int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt. \tag{2}$$

Ahora bien

$$I - |I_2| \leqslant I = I_1 + I_2 \leqslant I_1 + |I_2|, \tag{3}$$

de manera que, de (1), (2) y (3), se obtiene

$$[g(0) - \epsilon]\int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt - C_0 e^{-xf(\delta)/2} \leqslant I(x) \leqslant [g(0) + \epsilon]\int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt + C_0 e^{-xf(\delta)/2}.$$

Multiplicamos por $\sqrt{x}$, hacemos $x \to \infty$ y aplicamos el Teorema 19.3b a las integrales para obtener

$$[g(0) - \epsilon]\sqrt{\pi/2f''(0)} \leqslant \underline{\lim_{x\to\infty}}\sqrt{x}I(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to\infty}}\sqrt{x}I(x) \leqslant [g(0) + \epsilon]\sqrt{\pi/2f''(0)},$$

para todo $\epsilon > 0$. Haciendo $\epsilon \to 0$,

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}I(x) = g(0)\sqrt{\pi/2f''(0)}. \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que se ha probado un poco más de lo que se aseveró. Porque si $g(0) = 0$ el límite anterior es cero, lo cual no es posible expresar en la forma

$$I(x) \sim g(0)\sqrt{\pi/x2f''(0)}. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

19.4 FORMULA DE STIRLING

Ahora aplicaremos el método de Laplace a la función Gama para obtener el resultado conocido como **fórmula de Stirling:**

19.4a Teorema. $\Gamma(x + 1) \sim \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$ conforme $x \to \infty$.

Demostración. En la fórmula integral para $\Gamma(x + 1)$, a saber

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-u}u^x\,du,$$

sustituyamos $u = x(1 + t)$ para tener

$$\Gamma(x + 1) = \int_{-1}^\infty e^{-x(1+t)}[x(1 + t)]^x x\,dt = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{-xt}(1 + t)^x\,dt$$

o bien $x^{-x-1}e^x\Gamma(x + 1) = \int_{-1}^\infty e^{-xt}(1 + t)^x\,dt$

$$= \int_{-1}^0 e^{-xt}(1 + t)^x\,dt + \int_0^\infty e^{-xt}(1 + t)^x\,dt \equiv I_1(x) + I_2(x)$$

respectivamente.

Consideremos primero I_1:

$$I_1(x) = \int_{-1}^0 e^{-xt}(1 + t)^x\,dt = \int_0^1 e^{xt}(1 - t)^x\,dt = \int_0^1 e^{-x[-t-\log(1-t)]}dt.$$

Entonces apliquemos el Teorema 19.3b con $f(t) = -t - \log(1 - t)$.

Ahora bien $\quad f'(t) = -1 + \dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t}{1-t} > 0 \quad$ en $\{0 \leqslant t < 1\}$.

y $\qquad f''(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} \qquad \{0 \leqslant t < 1\},$

y en particular $f''(0) = 1$. Por lo tanto puede aplicarse el Teorema 19.3b lo cual proporciona

$$I_1(x) \sim \sqrt{\pi/2x}.$$

Ahora apliquemos el mismo teorema a $I_2(x)$ con $f(t) = t - \log(1 + t)$ para obtener

$$I_2(x) \sim \sqrt{\pi/2x}.$$

Así que $I(x) \sim 2\sqrt{\pi/2x} = \sqrt{2\pi/x}$,

a partir de lo cual $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$. ∎

EJERCICIOS A

1. Investigar el comportamiento asintótico de las siguientes integrales conforme $x \to \infty$.
   (*a*) $\int_0^1 (\cos t)^x\, dt$. [*Sugerencia* $(\cos t)^x = e^{x \log \cos t}$.]
   (*b*) $\int_0^{\pi/2} e^{-x \sec t}\, dt$. (*c*) $\int_0^1 (1-t^2)^x \cos t\, dt$. (*d*) $\int_0^1 (2-t^2)^x\, dt$.
2. Demostrar que $[\Gamma(x+1)]^{1/x} \to x/e$ conforme $x \to \infty$.

EJERCICIOS B

1. Demostrar que:
   (*a*) $\Gamma(a+x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+a-\frac{1}{2}} e^{-x}$. (*b*) $\Gamma(a+x)/\Gamma(b+x) \sim x^{a-b}$.
2. En el desarrollo $(1+x)^n$, examinar el comportamiento asintótico del coeficiente de x^n conforme $n \to \infty$.

EJERCICIOS C

1. Aplicando el Ejercicio B1 (*b*) de esta sección, demostrar que para todo x, excepto para 0 y los enteros negativos,
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$
2. (*a*) Aplicar el Ejercicio C1 anterior para demostrar que $1/\Gamma(x) = e^{\gamma x} x \prod_1^\infty (1 + x/k)e^{-x/k}$. (Ver Ejercicio C4 de la Sección 19.2.)
   (*b*) Deducir que $\lim_{n\to\infty} [\psi(x+n) - \log n] = 0$.
3. Supóngase que f tiene dos derivadas continuas en $\{a < t < b\}$ y que existe un c entre a y b tal que f es decreciente en $\{a < t \leqslant c\}$ y creciente en $\{c \leqslant t < b\}$. Finalmente, supóngase que $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$. Demostrar que si $I(x) = \int_a^b e^{-xf(t)}\, dt$ existe para $x = x_0$, entonces existe para $x > x_0$ y $I(x) \sim e^{-xf(c)}\sqrt{2\pi/xf''(c)}$.
4. Supóngase que f satisface las condiciones del Ejercicio C3 anterior y que g es continua en $\{a < t < b\}$. Si $I(x) = \int_a^b g(t)e^{-xf(t)}\, dt$ converge absolutamente para $x = x_0$, entonces converge absolutamente para $x > x_0$ y $I(x) \sim g(c)e^{-xf(c)}/\sqrt{2\pi/xf''(c)}$.
5. Supóngase que f tiene cuatro derivadas continuas en $\{0 < t < a\}$, que es creciente allí y que $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{(iv)}(0) > 0$. Si $I(x) = \int_0^a e^{-xf(t)}\, dt$ existe para $x = x_0$, entonces $I(x)$ existe para $x > x_0$ y $I(x) \sim \frac{1}{2}[4!/xf^{(iv)}(0)]^{\frac{1}{4}}\Gamma(\frac{1}{4})$.

20

Series de Fourier

20.1 INTRODUCCION

La cuestión de representar una función mediante una serie trigonométrica de la forma

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

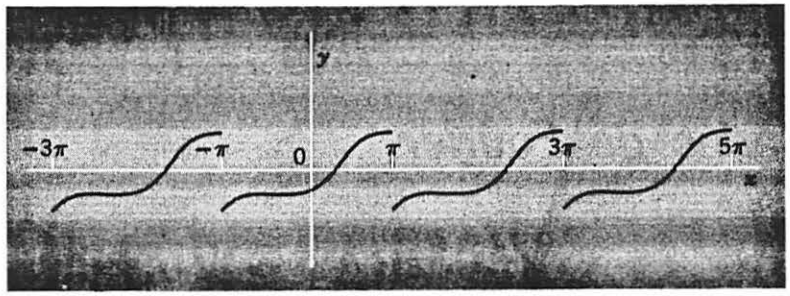
surge de manera natural en muchos problemas. Por ejemplo, se presenta en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales parciales por el método de separación de variables. Nosotros no estudiaremos estas aplicaciones, simplemente las mencionamos aquí para señalar que el estudio de las series trigonométricas tiene relaciones íntimas con muchas ramas de las matemáticas.

Como se verá, una serie trigonométrica tiene algunas ventajas sobre una serie de potencias para la representación de funciones. Por ejemplo, la condición de diferenciabilidad infinita que se requirió en el caso de las series de potencias no será necesaria. También, en ocasiones es posible integrar o diferenciar término a término sin haber satisfecho los criterios de convergencia uniforme que forman los requerimientos usuales para tales operaciones (ver capítulo 15).

Antes de empezar nuestra discusión de las series (1), obsérvese que si converge o diverge en un punto x_0, entonces converge o diverge en $x_0 + 2\pi$, puesto que cada término tiene período 2π; porque la periodicidad implica que las sumas parciales en x_0 son idénticas a las sumas parciales en $x_0 + 2\pi$, o bien, por ese hecho, en $x_0 + 2n\pi$, donde n es cualquier entero, positivo o negativo. Así que, siempre que la serie (1) representa una función, representa una **función periódica** con período 2π; esto es, la función f debe satisfacer la ecuación funcional $f(x + 2\pi) = f(x)$.

A primera vista, este requerimiento parece constituir una fuerte restricción sobre la clase de funciones con la cual puede trabajarse. No obs-

tante, la situación no es tan seria como podría parecer; porque si se tiene una función f, definida en $\{-\pi < x < \pi\}$, puede definirse la llamada **extensión periódica** de f. Esto se indica gráficamente en la figura y se obtiene desplazando la gráfica de f en $\{-\pi < x < \pi\}$ en 2π, 4π, ... hacia



la derecha y hacia la izquierda. Formalmente, la fórmula de la periodicidad proporciona la definición de f fuera de $\{-\pi < x < \pi\}$. Así, para x en $\{-3\pi < x < -\pi\}$, f está definida por $f(x) = f(x + 2\pi)$ y para x en $\{\pi < x < 3\pi\}$, f está definida por $f(x) = f(x - 2\pi)$, ... Esto deja el valor de f indeterminado en los múltiplos impares de π. Allí puede definirse de cualquier manera, porque eso no afectará la forma de la serie (1) asociada con ella, tal y como se verá posteriormente.

Ahora volveremos nuestra atención hacia ciertos cálculos preliminares sencillos que serán útiles en todo el capítulo. En estos cálculos m y n son enteros no negativos, no necesariamente diferentes. Primero recordemos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]/2$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = [\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)]/2$$

$$\cos\alpha\cos\beta = [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]/2.$$

A partir de estas expresiones se obtiene inmediatamente

$$(2)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(m+n)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(m-n)x\,dx = 0$$

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

$$(4)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n > 0 \\ 2\pi & m = n = 0. \end{cases}$$

Estas fórmulas integrales (2), (3) y (4) se llamarán **fórmulas de ortogonalidad,** por las razones que se aclararán posteriormente.

Ahora supongamos que una serie trigonométrica de la forma (1) converge. Por tanto, su suma será una función de x, dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx).$$

Primero se desea inquirir acerca de todas las relaciones entre f y los coeficientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Si la convergencia de la serie es tal que permita la integración término a término (por ejemplo, la convergencia uniforme sería suficiente), entonces se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right) = \pi a_0.$$

Así que

$$(5)\qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Para $k \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\cos kx\,dx + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} kx\,dx\right).$$

Por las fórmulas de ortogonalidad, solamente existe un término que no se nulifica en esta serie, y esto sucede cuando $n = k$. De donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\pi$$

o bien

$$(6)\qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Nótese que (5) se obtiene de (6) haciendo $k = 0$. Esta es la razón para tomar el término constante como $a_0/2$ en lugar de a_0, porque ahora (6) cubre ambos casos. De modo semejante, calculemos

$$(7)\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,ds.$$

Es conveniente señalar que puesto que f, por su propia definición, es periódica, las integrales en (6) y (7) pueden tomarse con igual propiedad sobre cualquier intervalo de longitud 2π. En particular, esto será

un comentario útil cuando se discuta la convergencia de las series trigonométricas.

Volviendo al problema original, puede preguntarse cómo deben escogerse a_n y b_n de manera que para una función f dada se tenga

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx,$$

y se ve que si pueden escogerse de manera que sea posible la integración término a término, entonces se determinan mediante las fórmulas (6) y (7).

En general, si f solamente es integrable en $\{-\pi < x < \pi\}$, los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ pueden calcularse mediante las fórmulas (6) y (7). En este caso la serie (1) resultante se llama **serie de Fourier** de f y los números se llaman **coeficientes de Fourier.** Toman sus nombres en honor del matemático francés J. B. J. Fourier, cuyos estudios sobre conducción de calor lo condujeron a tales series.

Ahora bien, una serie de Fourier puede converger o puede diverger, y donde converge puede no converger hacia la función f que la genera. El resto de este capítulo se dedicará en gran parte a discutir la convergencia de las series de Fourier, y a la cuestión de derivar e integrar una serie de Fourier término a término.

Como una consecuencia inmediata de la definición se tiene el siguiente teorema.

20.1a Teorema. Cualquier serie trigonométrica uniformemente convergente es la serie de Fourier de su suma.

Para indicar que una serie de Fourier proviene de una función f necesitamos otro símbolo que el de $=$, porque el signo de igualdad lleva con él la connotación de convergencia. El símbolo más común es $\sim$, el cual se usó con anterioridad para indicar la igualdad asintótica. Por tanto, ahora se usará este símbolo en un nuevo sentido.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

significa que los coeficientes a y b se calculan mediante las fórmulas (6) y (7). El símbolo $\sim$ se lee «genera».

EJEMPLO 1. Calcular la serie de Fourier de x.

Solución. Ahora

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = 0,$$

ya que $x \cos nx$ es una función impar. También

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx,$$

puesto que $x \operatorname{sen} nx$ es par. De donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Así que $$x \sim \sum_1^\infty \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx.$$

EJEMPLO 2. Calcular la serie de Fourier de f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \{-\pi < x < 0\} \\ 1 & \{0 < x < \pi\}. \end{cases}$$

Solución:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot dx = 1.$$

Para $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} nx\Big|_0^\pi = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi - \cos 0] = -\frac{1}{n\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{1}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Entonces $$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1}.$$

EJERCICIOS A

1. Obtener la serie de Fourier para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \{-\pi < x < 0\} \\ x & \{0 < x < \pi\} \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \{-\pi < x < 0) \\ \operatorname{sen} x & \{0 < x < \pi\} \end{cases}$

(c) x^2 (d) e^x

(e) $x^2 \operatorname{sgn} x$ (f) $\operatorname{sen} x \operatorname{sgn} x$

2. Demostrar que si f es par, $b_n = 0$; y que si f es impar, $a_n = 0$.

EJERCICIOS B

1. (a) Si f' es continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, demostrar que existe una constante C_1, independiente de n, para la cual $|a_n| \leqslant C_1/n$.
   (b) Si además $f(\pi) = f(-\pi)$, demostrar que $|b_n| \leqslant C_1/n$.
   (c) Si además f'' es continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, demostrar que existe una constante C_2, independiente de n, para la cual $|b_n| \leqslant C_2/n^2$.
   (d) Si además $f'(\pi) = f'(-\pi)$, demostrar que $|a_n| \leqslant C_2/n^2$.
2. Si f es periódica de período 2π y $f^{(k)}$ es continua, demostrar que existe una constante C_k tal que $|a_n| \leqslant C_k/n^k$, $|b_n| \leqslant C_k/n^k$.
3. Demostrar que si t no es un entero, entonces

$$\cos tx \sim \frac{2t \operatorname{sen} \pi t}{\pi}\left(\frac{1}{2t^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k \cos kx}{t^2 - k^2}\right)$$

$$\operatorname{sen} tx \sim \frac{2 \operatorname{sen} \pi t}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(-1)^k k \operatorname{sen} kx}{t^2 - k^2}.$$

EJERCICIO C

1. Si f es monótona y f' es integrable en $\{-\pi < x < \pi\}$, demostrar que existe una constante C tal que $|a_k| < C/k$, $|b_k| < C/k$.

20.2 APROXIMACION EN LA MEDIA. DESIGUALDAD DE BESSEL

En esta sección, investiguemos el problema de la «mejor» aproximación de una función integrable f en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ mediante un polinomio trigonométrico en la forma de una suma parcial de una serie trigonométrica:

$$S_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^n (c_k \cos kx + d_k \operatorname{sen} kx). \tag{1}$$

(Usamos los símbolos c y d aquí para los coeficientes, puesto que a y b denotan los coeficientes de Fourier). Ahora se desea saber cómo escoger, para cada n, los coeficientes c y d de manera que la S_n dada por (1) sea la «mejor» aproximación a f.

Existen muchas formas de medir la exactitud de la aproximación. Por ejemplo, podría decirse que S_n se aproxima mejor a f si se escogen los coeficientes c y d de modo que $\sup_{\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}} |f(x) - S_n(x)|$ sea el menor. De hecho, este es el tipo de criterio que se aplica para discutir la convergencia uniforme. Otro criterio para medir la exactitud de la aproximación de S_n a f es el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$, $y = S_n(x)$, $x = -\pi$, $x = \pi$. Esta área es $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|\, dx$.

Todavía otra medida del grado de aproximación y que parece la más apropiada para la discusión de las series de Fourier es

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\, dx. \tag{2}$$

Debe hacerse notar que, para un n dado, la S_n que es «mejor» en un sentido, probablemente no sería mejor en otro. Por ejemplo, si S_n se aproxima mucho a f excepto cerca de un punto, entonces la medida integral de la aproximación sería pequeña, mientras que la medida supremum sería relativamente grande.

Habiendo escogido nuestra medida de aproximación, a saber la Δ_n definida por (2), ahora sensatamente podría inquirirse acerca de qué selección de los coeficientes c y d conduce hacia la mejor aproximación.

20.2a Teorema. Sea f una función integrable en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Entonces para cada n fijo que

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx,$$

donde $$S_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \operatorname{sen} kx),$$

sea la menor, debe escojerse $c_k = a_k$ y $d_k = b_k$, donde los números a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f.

Demostración. En la expresión para Δ_n, se sustituye S_n, se desarrolla y se aplican las fórmulas de ortogonalidad y las definiciones de los números a y b como coeficientes de Fourier:

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_1^n (c_k \cos kx + d_k \operatorname{sen} kx)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{c_0}{2} + \sum_1^n (c_k \cos kx + d_k \operatorname{sen} kx)\right] dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{c_0}{2} + \sum_1^n (c_k \cos kx + d_k \operatorname{sen} kx)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left[a_0 c_0 + 2\sum_1^n (a_k c_k + b_k d_k)\right] + \pi\left[\frac{c_0^2}{2} + \sum_1^n (c_k^2 + d_k^2)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \pi\left[\frac{1}{2} c_0^2 - a_0 c_0 + \sum_1^n (c_k^2 - 2a_k c_k) + (d_k^2 - 2b_k d_k)\right]$$

Si se completa el cuadrado en cada grupo de números c y d, se obtiene

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{(c_0 - a_0)^2}{2} + \sum_1^n (c_k - c_k)^2 + (d_k - b_k)^2\right] - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2)\right].$$

A partir de esta última fórmula, es evidente que la selección de los números c y d que hace Δ_n la menor posible es la selección que hace lo menor posible al término de enmedio. Pero este término de enmedio puede hacerse cero escogiendo $c_k = a_k$ y $d_k = b_k$. ∎

Ya que $\Delta_n \geqslant 0$ (¿por qué?), se obtiene como un corolario el resultado conocido como **desigualdad de Bessel.**

20.2b Corolario. Si f es integrable en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2) < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Demostración. Si $S_n(x) = a_0/2 + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$, entonces, por el cálculo anterior,

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2)\right] > 0.$$

De aquí que, para todo n,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2) < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Entonces, por el Teorema 14.2a, se deduce el resultado del lema. ∎

20.2c Corolario. Si f es integrable en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, entonces $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$.

Demostración. Por el Teorema 14.1a, $a_n^2 + b_n^2 \to 0$ y $a_n^2 \leqslant a_n^2 + b_n^2$. De aquí que $a_n^2 \to 0$ y, por el Teorema 2.3i, también sucede lo mismo con a_n. De modo semejante $b_n \to 0$. ∎

20.3 ALGUNOS LEMAS UTILES

Estamos tratando de llegar a un teorema de convergencia para las series de Fourier. Es conveniente reunir aquí ciertos resultados preliminares útiles y evitar así la interrupción del argumento principal para proporcionar demostraciones de estos lemas suplementarios.

Empecemos por resumir cierto polinomio trigonométrico (comparar con el ejemplo de la Sección 16.6), a saber

$$D_n(\theta) = 1/2 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta.$$

Multiplicando por $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$ y usando la identidad

$$\cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)],$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\, D_n(\theta) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}[\operatorname{sen} - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta] + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(n + \tfrac{1}{2})\theta - \operatorname{sen}(n - \tfrac{1}{2})\theta] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(n + \tfrac{1}{2})\theta$$

o bien, si θ no es un múltiplo entero de 2π, entonces

$$D_n(\theta) = \operatorname{sen}(n + \tfrac{1}{2})\theta / 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta. \tag{1}$$

En ocasiones esta razón recibe el nombre de **núcleo de Dirichlet.**

20.3a Lema. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(\theta)\,d\theta = 1.$

Demostración:

$$\int_0^{\pi} D_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{2}.$$ ∎

Ahora se establecerá un resultado que es fundamental para las series de Fourier. Esto se conoce con el nombre de **lema de Riemann-Lebesque.**

20.3b Lema. Si f es integrable en I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx = 0$$

y

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx\,dx = 0.$$

Demostración. Antes de empezar la demostración, nótese que si $a = -\pi$, $b = \pi$ y $t = n$, el resultado coincide con el Corolario 20.2c. Por tanto, esto puede considerarse como una generalización de ese resultado.

Dividiremos la demostración en tres partes (A), (B) y (C):

(A) Supóngase primero que f es una constante C en un subintervalo de I y cero fuera de ese intervalo:

$$f(x) = \begin{cases} C & \{a \leqslant \alpha \leqslant x \leqslant \beta \leqslant b\} \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

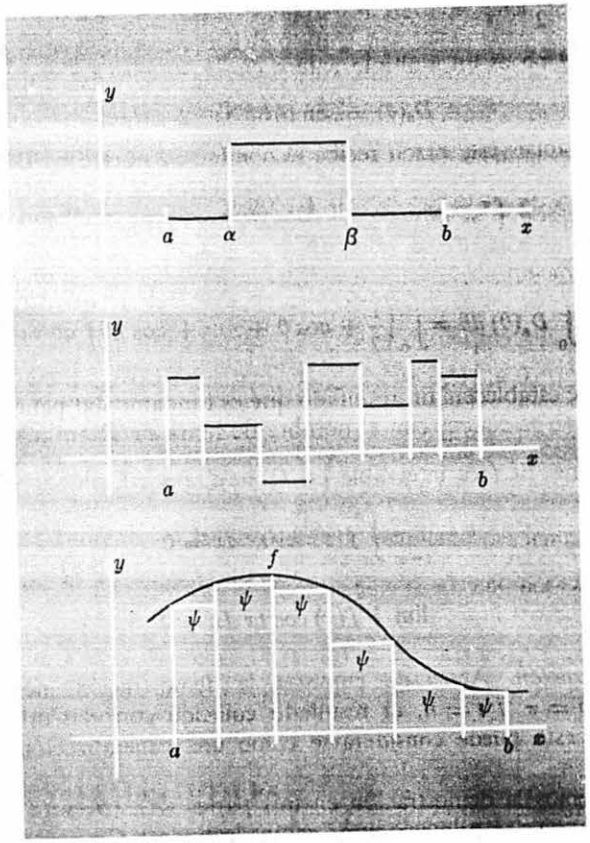
$$\int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx = C\int_\alpha^\beta \operatorname{sen} tx\,dx = -\frac{C}{t}\cos tx\Big|_\alpha^\beta = C\frac{\cos\alpha t - \cos\beta t}{t}.$$

Por tanto,

$$\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx\right| \leqslant \frac{2|C|}{t} \to 0 \qquad \text{conforme } t \to \infty.$$

(*B*) Supóngase que f es una función escalonada; es decir, existe una partición de I tal que $f(x)$ es una constante C_k en el k-ésimo subintervalo I_k de la partición:

$$f(x) = C_k \qquad \text{para } x \text{ en } I_k.$$



Tales funciones pueden escribirse como una suma de funciones del tipo mencionado en (*A*):

$$\text{Hacer } f_k(x) = \begin{cases} C_k & x \text{ en } I_k \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Entonces evidentemente $\qquad f(x) = \sum_1^n f_k(x)$

de modo que

$$\int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\operatorname{sen} tx\,dx \to 0.$$

Por la parte (*A*), el límite es cero.

(*C*) Ahora sea f una función integrable arbitrariamente en I, y sea dado $\epsilon > 0$.

Supuesto que f es integrable, existe una suma inferior que se aproxima a la integral de manera arbitrariamente próxima. Pero la integral de una función escalonada es precisamente una suma inferior. Porque es de la forma

$$\sum_1^n m_k \Delta_k x = \sum_1^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

donde $\psi(x) = m_k$ en I_k, puesto que una suma inferior puede escogerse para aproximar a la integral de f hasta dentro de $\epsilon/2$. Esto significa que existe una función escalonada ψ, con $\psi(x) \leqslant f(x)$ en I, para la cual

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x) - \psi(x)]\,dx = \int_a^b |f(x) - \psi(x)|\,dx < \epsilon/2.$$

Denotemos $\int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx$ por I_t. Entonces

$$I_t = \int_a^b f(x)\operatorname{sen} tx\,dx = \int_a^b [f(x) - \psi(x)]\operatorname{sen} tx\,dx + \int_a^b \psi(x)\operatorname{sen} tx\,dx.$$

Así que $\qquad |I_t| \leqslant \int_a^b |f(x) - \psi(x)|\,dx + \left|\int_a^b \psi(x)\operatorname{sen} tx\,dx\right|.$

La primera integral es $\leqslant \epsilon/2$ y la segunda tiende hacia cero conforme $t \to \infty$. Entonces existe un T tal que

$$|I_t| < \epsilon \qquad \text{si } t > T,$$

o bien $\qquad I_t \to 0 \qquad$ conforme $t \to \infty$.

Nuestra demostración ha sido para la integral que contiene al seno. Es evidente que se aplica la misma demostración para la otra. ∎

20.4 TEOREMAS DE CONVERGENCIA

Se desean investigar las condiciones bajo las cuales la serie de Fourier de una función f convergerá hacia $f(x)$ en un punto x. En principio supondremos que f es integrable en $\{-\pi < x \leqslant \pi\}$ y se extiende periódicamente de modo de ser definida para todo x. Bajo estas condiciones

puede formarse la serie de Fourier. Nuestra primera meta es escribir la n-ésima suma parcial en una forma apropiada:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_1^n \left[\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt + \operatorname{sen} kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n (\cos kx \cos kt + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(u)\,du.$$

Puesto que tanto f como D_n tienen período 2π, esto puede ponerse en la forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)\,du.$$

Ahora bien, por el Lema 20.3a,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}f(x)\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)D_n(u)\,du$$

De donde

$$(1)\qquad S_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+u)-f(x-u)}{2} - f(x)\right]D_n(u)\,du.$$

Si se hace

$$(2)\qquad g(x,u) = \frac{f(x+u)-f(x-u)}{2} - f(x),$$

de (1) se obtiene

$$(3)\qquad S_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,u)D_n(u)\,du.$$

De donde es evidente que para discutir la convergencia de $S_n(x)$ hacia $f(x)$, es suficiente con discutir la convergencia de la integral del segundo miembro de (3). Ahora salta a la vista que los valores de f que afectan la convergencia de $S_n(x)$ hacia $f(x)$ son aquéllos cercanos al valor x —es decir, en una vecindad de x arbitrariamente pequeña. Esto se conoce como **principio de localización.** Si x se mantiene fijo y u es pequeño, entonces el comportamiento de $g(x, u)$ cerca de $u = 0$ es realmente el asunto crítico; de hecho, la rapidez a la cual $g \to 0$ conforme $u \to 0$ es muy importante. Si para algún x fijo existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$(4)\qquad \int_0^{\delta_1} \left|\frac{g(x,u)}{u}\right| du$$

existe, posiblemente como una integral impropia convergente, se dice que f satisface la **condición de Dini.** La convergencia de esta integral es una medida de la rapidez a la cual $g(x, u) \to 0$.

20.4a Teorema. Sea f integrable en $\{-\pi < x \leqslant \pi\}$ y supóngase que se continúa periódicamente hacia afuera de ese intervalo. Supóngase que existe un x en el cual f satisface la condición de Dini (4). Entonces para ese valor de x

$$S_n(x) \to f(x).$$

Demostración. Sea dado $\epsilon > 0$. Escójase cualquier $\delta < \delta_1$ y calcúlese, partiendo de (3):

$$|S_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,u)D_n(u)\,du\right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} |g(x,u)|\,|D_n(u)|\,du + \left|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} g(x,u)D_n(u)\,du\right|$$

$$\equiv I_1 + I_2, \qquad \text{respectivamente.}$$

Considérese primero I_1:

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \left|\frac{g(x,u)}{u}\right| \left|\frac{u}{2\operatorname{sen} 1/2u}\right| \left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right| du.$$

Ahora bien, $|u/2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}u|$ es acotado en $\{0 < u \leqslant \pi\}$; de hecho, es no decreciente allí, de modo que

$$\left|\frac{u}{2\operatorname{sen} 1/2u}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Y evidentemente

$$\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right| < 1,$$

de manera que

$$I_1 < \int_0^{\delta} \left|\frac{g(x,u)}{u}\right| du.$$

Dado que la integral converge, puede tomarse δ tan pequeño que $I_1 \leqslant \epsilon/2$. Habiendo escogido δ, se mantiene fijo y nos volvemos hacia I_2.

En $\{\delta \leqslant u \leqslant \pi\}$, la función $g(x, u)/2$ sen $\frac{1}{2}u$ es propiamente integrable. De aquí que, por el lema de Riemann-Lebesgue, $I_2 \to 0$ conforme $n \to \infty$. De donde existe un N tan grande que

$$I_2 < \epsilon/2 \qquad \text{si } n > N.$$

Así que

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant I_1 + I_2 \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{si } n > N,$$

es decir $$S_n(x) \to f(x).$$ ∎

Este teorema da las condiciones en un punto x bajo las cuales la serie de Fourier de una función integrable f convergerá hacia $f(x)$. Por supuesto que si f satisface esta condición en cada punto x, entonces la serie de Fourier convergerá hacia $f(x)$ para todo x.

Quizá no sea inmediatamente evidente si una función dada satisface o no el criterio de Dini (4) para la convergencia de las series de Fourier. Por tanto, describiremos una gran clase de funciones que no satisfacen esta condición.

Se dice que una función f es **seccionalmente continua** en un intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ si existe una partición Δ de I para la cual f es continua en cada subintervalo, si $f(x_k + 0)$ y $f(x_k - 0)$ existen en cada punto de partición de Δ y, finalmente, si tanto $f(a + 0)$ como $f(b - 0)$ existen.

Al considerar una función que es seccionalmente continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ se supondrá, sin comentario posterior, que la función se extiende mediante periodicidad. También, normalizaremos el valor de la función en puntos de discontinuidad —es decir, los puntos de partición de Δ— mediante

$$f(a_k) = \frac{1}{2}[f(a_k + 0) + f(a_k - 0)].$$

Por la periodicidad, esto implica que

$$f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)].$$

En todos los demás puntos f es continua, de modo que la ecuación

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$$

se cumple para todos los puntos. Esto implica cambios de los valores de f en cuando más un número finito de puntos, de manera que los coeficientes de Fourier no se alteran por esta normalización.

Una función definida en un intervalo I: $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ se llamará **cuasi diferenciable** allí si:

(1) f es seccionalmente continua en I.

(2) En cada punto interior x, las derivadas laterales

$$f'(x + 0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x + h) - f(x + 0)}{h}$$

y

$$f'(x - 0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x - h) + f(x - 0)}{h}$$

existen. En a existe la derivada derecha y en b existe la izquierda. Nótese que la condición (2) se aplica en los puntos de salto y en los puntos de continuidad. Así que, por ejemplo, podría tenerse una esquina en un punto de continuidad.

20.4b Teorema. Supóngase que f es cuasi diferenciable en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y se extiende por periodicidad. Entonces la serie de Fourier de f converge hacia el valor

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$$

en cada punto x. En particular, en π y $-\pi$ converge hacia

$$f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi) - 0)].$$

Demostración. Demostraremos que la condición de Dini se satisface en cada punto.

$$g(x, u) = \frac{f(x + u) + f(x - u)}{2} - f(x)$$

$$= \frac{f(x + u) - f(x + 0)}{2} + \frac{f(x - u) - f(x - 0)}{2},$$

de modo que

$$\left|\frac{g(x, u)}{u}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{f(x + u) - f(x + 0)}{u}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{f(x - u) - f(x - 0)}{u}\right|.$$

Ahora bien, puesto que las derivadas laterales existen, cada uno de estos cocientes es continuo y acotado para $u > 0$. De donde

$$\left|\frac{g(x, u)}{u}\right| < \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.$$

Así que $$\int_0^{\delta_1} \left|\frac{g(x, u)}{u}\right| du \text{ existe.}$$ ∎

Nótese que la clase de funciones cuasi diferenciables incluye las **sec-**

cionalmente suaves —es decir, aquellas que se construyen colocando juntas funciones diferenciables, como por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left\{-\pi < x < \frac{\pi}{2}\right\} \\ x & \left\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \\ x^2 & \left\{\frac{\pi}{2} < x < \pi\right\} \end{cases}$$

Completar la definición proporcionando el valor de f en los puntos de partición, mediante la regla

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

suponiendo que f se extiende periódicamente.

EJEMPLO 1. En la Sección 20.1 se dedujo la serie de Fourier para x. Ahora podemos asegurar que esta serie,

$$2[\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + - \cdots]$$

converge hacia x en $\{-\pi < x < \pi\}$ y hacia 0 en π y $-\pi$. Para otros valores de x, converge hacia la extensión periódica.

Cada suma parcial

$$S_n(x) = 2\sum_{1}^{n} (-1)^{k+1}(\operatorname{sen} kx)/k$$

es continua y tiene el valor 0 en π. De aquí que la gráfica de S_n es una curva suave que pasa por $(\pi, 0)$. La figura ilustra el comportamiento de S_n para $n = 1, 4, 5, 6$.

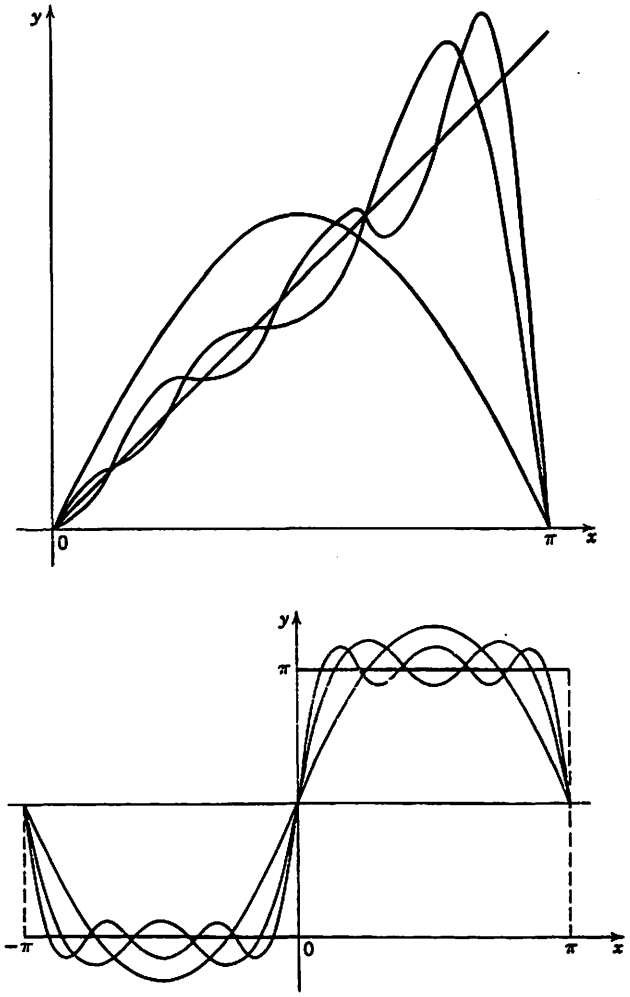
EJEMPLO 2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases}$$

y sea definida por la periodicidad fuera del intervalo básico. Entonces la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2} + 2\left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right].$$

Esta converge hacia $f(x)$ para $x \neq n\pi$ y hacia $\pi/2$ para $x = n\pi$. La figura ilustra el comportamiento de las sumas parciales.



En ninguno de estos ejemplos la serie converge uniformemente en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. ¿Por qué?

EJERCICIOS A

1. Demostrar que todas las funciones en los Ejercicios A de la Sección 20.1 satisfacen las condiciones del Teorema 20.4b, de modo que sus series de Fourier convergen. Encontrar las sumas de estas series en todos los puntos de discontinuidad.
2. Trazar un esquema de las gráficas de las primeras sumas de aproximación de las series de Fourier para x^2 y e^x.

EJERCICIOS B

1. Sea f continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y supóngase que f' es integrable allí. Demostrar que

$$ka_k \to 0 \qquad (-1)^k k b_k \to \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{\pi}.$$

2. Aplicando la serie de Fourier para x^2, deducir

(a) $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (b) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

(c) $\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

20.5 DERIVACION E INTEGRACION. CONVERGENCIA UNIFORME

Hemos visto las condiciones bajo las cuales una función f definida en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ es representable como una serie de Fourier. Ahora se desean investigar las condiciones bajo las cuales las operaciones del análisis pueden efectuarse término a término en estas series. Por supuesto que el estudiante recordará que se tienen teoremas generales bajo los cuales puede diferenciarse e integrarse término a término a una serie, condiciones que implican la convergencia uniforme. Salta a la vista que, en el caso de las series de Fourier, estas operaciones pueden realizarse bajo condiciones considerablemente más débiles y son estas condiciones más débiles las que vamos a establecer a continuación.

Antes de empezar hagamos algunos comentarios acerca de la integración por partes. La fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx \tag{1}$$

se probó bajo la hipótesis de que f' y g' existen en todos los puntos en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y son integrables. Si f' existe excepto en un número finito de puntos y es una función seccionalmente continua, todavía se aplica la misma fórmula. Porque, supóngase que f' tiene una discontinuidad en c entre a y b; entonces puede escribirse

$$\int_a^b f'g\,dx = \int_a^c f'g\,dx + \int_c^b f'g\,dx.$$

Podemos integrar por partes cada una de estas últimas integrales:

$$\int_a^c f'g\,dx = f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int_a^c fg'\,dx.$$

y

$$\int_c^b f'g\,dx = f(b)g(b) - f(c)g(c) - \int_c^b fg'\,dx.$$

Sumando se ve que la contribución debida al punto c se cancela, dejando la fórmula regular (1) para la integración por partes. Evidentemente puede llevarse la demostración hacia el caso de un número finito de discontinuidades en f'.

20.5a Teorema. Sea f una función continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y sea $f(\pi) = f(-\pi)$ de manera que la extensión periódica de f es continua. Supóngase además que f' es seccionalmente continua. Por tanto, por el Teorema 20.4b, f se representa por su serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

donde a_n y b_n tienen sus definiciones usuales. Entonces, en cada punto x donde $f''(x)$ exista, puede calcularse $f'(x)$ mediante derivación término a término —es decir

$$f'(x) = \sum_1^\infty (nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx).$$

Demostración. En tal punto, f' satisface las condiciones de nuestro teorema de la convergencia (20.4a), de modo que la serie de Fourier para f' converge en el punto x. De donde, para este punto

$$f'(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_1^\infty (a_n' \cos nx + b_n' \operatorname{sen} nx),$$

donde a_n' y b_n' son los coeficientes de Fourier de f'. Así que solamente debe demostrarse que $a_0' = 0$, $a_n' = nb_n$ y $b_n' = -na_n$.

Puesto que f' es seccionalmente continua, las integrales implicadas pueden integrarse por partes. Así que

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Además

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] + nb_n = nb_n.$$

De manera semejante $b_n' = -na_n$. ∎

En la demostración de este teorema no se demandó la convergencia uniforme de la serie original o de la serie diferenciada. De modo semejante, al discutir la integración término a término, no requeriremos la convergencia uniforme. De hecho, ¡no se requerirá siquiera la convergencia de la serie original!

20.5b Teorema. Supóngase que f es seccionalmente continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y que su serie de Fourier es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_1^\infty \frac{1}{n}(a_n \operatorname{sen} nx + b_n[\cos nx - (-1)^n])$$

en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

Demostración. Definir F por

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0 x$$

Entonces F es continua; además $F' = f - a_0/2$ y por tanto es seccionalmente continua. También F tiene derivadas laterales derecha e izquierda en los puntos de discontinuidad de f y $F(\pi) = F(-\pi)$ (¿por qué?). Entonces F se representa por su serie de Fourier:

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0 x = \frac{1}{2}A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx,$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de F. Por tanto, para $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}F(x)\operatorname{sen} nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\operatorname{sen} nx\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\operatorname{sen} nx\,dx = -\frac{1}{n}b_n \end{aligned}$$

De modo semejante, $B_n = \dfrac{1}{n}a_n$.

Así que $$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n}a_n \operatorname{sen} nx - \frac{1}{n}b_n \cos nx\right).$$

Pero $F(\pi) = \pi a_0/2$, de modo que por la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}a_0\pi = \frac{1}{2}A_0 - \sum_1^\infty \frac{1}{n}b_n \cos n\pi = \frac{1}{2}A_0 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{b_n}{n}.$$

Esto evalúa A_0. Sustituyendo el valor para A_0 en la serie de Fourier para F, se obtiene el resultado. ∎

Tal y como demuestran los dos teoremas anteriores, no es necesario demandar la convergencia uniforme para permitir la integración o la derivación término a término de una serie de Fourier. Sin embargo, de ocurrir, la convergencia uniforme es conveniente. Daremos un criterio para la convergencia uniforme de las series de Fourier.

20.5c Teorema. Sea f continua, con $f(\pi) = f(-\pi)$ y con una derivada seccionalmente continua en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Entonces la serie de Fourier converge uniforme y absolutamente hacia f en ese intervalo. Además,

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{C}{\sqrt{n}},$$

donde $$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

y $$C^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx.$$

Demostración. Denotemos los coeficientes de Fourier de f por a_n y b_n y los de f' por a_n' y b_n'. Entonces

(1) $$a_n' = nb_n \quad \text{y} \quad b_n' = -na_n,$$

y, por el Corolario 20.2b,

(2) $$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n'^2 + b_n'^2) < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx,$$

supuesto que f' es integrable.

Consideremos

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \sum_{n+1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Entonces (ver Ejercicio A3)

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \sum_{n+1}^{m} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{n+1}^{m} \frac{1}{k}\sqrt{a_k'^2 + b_k'^2}.$$

Ahora bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

(3) $$|S_m(x) - S_n(x)| < \left(\sum_{n+1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n+1}^{m}(a_k'^2 + b_k'^2)\right)^{1/2}$$

Pero

(4) $$\sum_{n+1}^{m}(a_k'^2 + b_k'^2) < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx$$

y

(5) $$\sum_{n+1}^{m}\frac{1}{k^2} < \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}.$$

Así, de (3), (4) y (5) se obtiene

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq C/\sqrt{n}, \tag{6}$$

donde
$$C^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx.$$

Esto prueba la convergencia uniforme por el criterio de Cauchy. Si se observa que, por el Teorema 20.4b, $S_m(x) \to f(x)$, en cada punto se obtiene inmediatamente, a partir de (6) si se hace que $m \to \infty$,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq C/\sqrt{n}. \quad \blacksquare$$

20.6 SERIES SENOIDAL Y COSENOIDAL. CAMBIO DE ESCALA

Se hizo notar en el ejercicio anterior (A2 de la Sección 20.1) que si f es par, su serie de Fourier consiste solamente de términos en coseno y el término constante; y que si f es impar, su serie de Fourier consiste solamente de términos en seno. Ahora examinaremos este fenómeno un poco más detalladamente.

Sea f dada en $\{0 < x < \pi\}$. Si se define f en $\{-\pi < x < 0\}$ como una función par —es decir, por $f(x) = f(-x)$— se dice que se tiene una **extensión par** de f. Si se define f en $\{-\pi < x < 0\}$ como una función impar —es decir, por $f(x) = -f(-x)$— se dice que se tiene una **extensión impar** de f. Si entonces se extiende f por periodicidad con período 2π, estas dos extensiones dan lugar, respectivamente, a la **extensión periódica par** y la **extensión periódica impar** de f. En todos los casos normalizaremos mediante

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

en puntos de discontinuidad, y en cero y los múltiples de π.

En el caso de la extensión par, la serie de Fourier para f se reduce a una serie que contiene solamente el término constante y los términos en coseno:

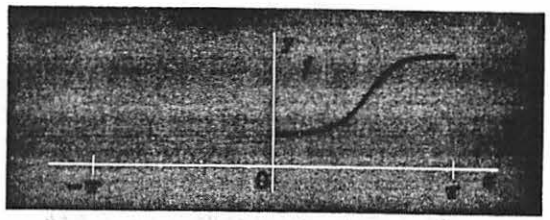
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx \qquad b_n = 0.$$

Esta expresión se llama **serie cosenoidal** para f, y

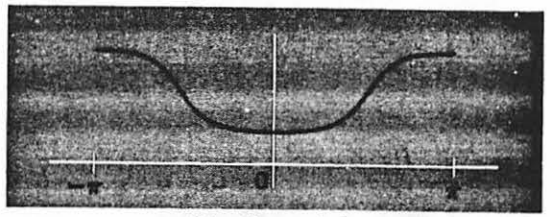
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

En el caso de la extensión impar, la serie de Fourier para f se reduce a una serie que contiene solamente los términos en seno:

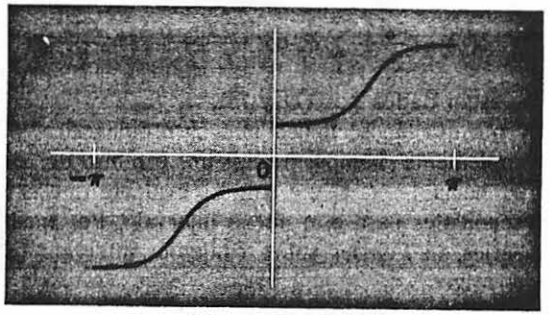
$$f(x) \sim \sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} nx \qquad a_n = 0$$



Gráfica de una función f definida entre 0 y π



Extensión par de f



Extensión impar de f

Esta expresión se llama **serie senoidal** para f y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx. \text{ (¿Cómo?)}$$

EJEMPLO. Ya que x es impar, la serie de Fourier completa para x es una serie senoidal. Ahora calcularemos la serie cosenoidal.

Solución:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

y para $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Así que $$|x| = \pi - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Podemos tener series de Fourier sobre otros intervalos que no sean $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Sea $\phi(y)$ integrable sobre $\{-L \leqslant y \leqslant L\}$. Si se sustituye $y = Lx/\pi$ y se hace $f(x) = \phi(Lx/\pi)$, se obtiene

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

donde

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi(y)\cos\frac{n\pi y}{L}\,dy$$

y

$$(3) \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\,dy.$$

Ahora (1) se transforma en

$$\phi(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos\frac{n\pi y}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L},$$

donde a_n y b_n están dados por (2) y (3).

Evidentemente que no se tienen nuevos problemas al discutir la convergencia. Simplemente hemos hecho un cambio de escala llevando $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ hacia $\{-L \leqslant y \leqslant L\}$. Es evidente que existen series senoidales y cosenoidales para este nuevo intervalo. Por traslación, podrían considerarse series de Fourier sobre cualquier intervalo $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ no centrado en el origen.

EJERCICIOS A

1. Calcular las series senoidal y cosenoidal para las siguientes funciones en $\{0 \leqslant x \leqslant \pi\}$:

   (*a*) sen x (*b*) cos x (*c*) 1 (*d*) e^x

2. Calcular las series de Fourier de las siguientes funciones en el intervalo $\{-L \leqslant x \leqslant L\}$:

   (*a*) x^2 (*b*) $x^2 + x$ (*c*) 1

3. Demostrar que $|a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx| \leqslant \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

4. Escribir la forma de la serie de Fourier sobre $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ y dar las fórmulas para los coeficientes.

EJERCICIOS B

1. Supóngase que f satisface las condiciones del Teorema 20.5c. Demostrar que

   (*a*) $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum(a_k^2 + b_k^2) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$

(*b*) Si g es integrable, entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_1^\infty (a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

donde α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de g.

2. Supóngase que f es periódica y tiene m derivadas continuas en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Demostrar que

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{C}{n^{m-1/2}},$$

donde

$$C^2 = \frac{1}{(2m-1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f^{(m)}(x)]^2\,dx.$$

20.7 LA INTEGRAL DE FOURIER

Supóngase que f es acotada, integrable y absolutamente integrable desde $-\infty$ hasta $+\infty$; es decir, supóngase que tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

existen (ver Ejercicios B3 y B4). Entonces para cualquier intervalo $\{-L \leqslant x \leqslant L\}$ la serie de Fourier para f es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde los coeficientes están dados por (2) y (3) de la Sección 20.6. Se desea examinar, de modo completamente heurístico, el comportamiento de esta serie conforme $L \to \infty$.

Primero obsérvese que

$$|a_0| = \left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt\right| < \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(t)|\,dt < \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt \to 0.$$

También se tiene que

$$\sum_1^\infty \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]dt$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right)dt.$$

Ahora, $n\pi/L = u_n$, $\Delta_n u = \pi/L$, y nuestra suma se transforma en

$$\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\Delta_n u\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left[u_n(x-t)\right]dt.$$

Esta expresión guarda semejanza con la suma de Riemann de una función f, definida por

$$F(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

De manera que conforme $L \to \infty$, nuestra suma parece converger hacia

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Escribimos

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt,$$

donde, como en el caso de las series de Fourier, el símbolo $\sim$ se lee como «corresponde a».

El argumento anterior es un esbozo de la discusión original de Fourier. Aunque ya no se considera una demostración aceptable, es históricamente interesante y nos permite escribir la fórmula. Nuestra meta en esta sección es dar una prueba de convergencia de esta fórmula e indicar algo acerca de su utilidad.

20.7a Teorema. Supóngase que f es acotada y tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existen, y que f satisface la condición de Dini en un punto x —es decir, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $\int_0^{\delta_1}\left|\frac{g(x,y)}{y}\right| dy$ existe, donde

$$g(x,y) = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2} - f(x).$$

Entonces para esa x se tiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Demostración. La integral que se desea evaluar es el límite conforme $a \to \infty$ de

$$I_a(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{a} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Ahora bien, la integral interna converge uniformemente respecto a u por la prueba M pues

$$|f(t)\cos u(x-t)| \leqslant |f(t)|.$$

De aquí que puede intercambiarse el orden de integración,

$$\begin{aligned} I_a(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_0^{a}\cos u(x-t)\,du\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\operatorname{sen} a(x-t)}{x-t}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x-y)\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-y)\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy. \end{aligned}$$

Remplacemos y por $-y$ en la segunda integral y combinémosla con la primera para obtener

$$I_a(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy.$$

Ahora, por el Teorema 18.3f, para $a > 0$ se tiene

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy,$$

de modo que

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy.$$

De donde

$$\begin{aligned} I_a(x) - f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2} - f(x)\right]\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy. \end{aligned}$$

De aquí en adelante la demostración es semejante a la aplicada con la serie de Fourier, excepto que es un poco más complicada debido a que el límite superior de integración es infinito.

Procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} I_a(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{b}\frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy + \frac{2}{\pi}\int_b^{\infty}\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy \\ - \frac{2}{\pi}\int_b^{\infty} f(x)\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy \equiv J_1 + J_2 + J_3 \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Ya que la integral J_3 es convergente, se sabe que para cada $\epsilon > 0$ existe un B_1 tal que

$$|J_3| < \frac{2}{\pi}|f(x)|\left|\int_b^{\infty}\frac{\operatorname{sen} ay}{y}\,dy\right| < \epsilon \qquad \text{si } b > B_1.$$

También

$$|J_2| < \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{|f(x+y)| + |f(x-y)|}{2}\frac{dy}{y}$$

$$< \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{\infty} [|f(x+y)| + |f(x-y)|]\,dy = \frac{2}{\pi b}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

De donde $|J_2| < \epsilon$ si $b > B_2 \equiv \frac{2}{\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$. Ahora se escoge $b >$ máx $[B_1, B_2]$ y se mantiene fijo.

Regresemos a estimar a J_1. Se escoge $\delta < \delta_1$, y tan pequeño que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \left|\frac{g(x,y)}{y}\right| dy < \epsilon.$$

Entonces $$J_1 = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy\right| < \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \left|\frac{g(x,y)}{y}\right| dy$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left|\int_\delta^b \frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy\right|$$

$$< \epsilon + \frac{2}{\pi}\left|\int_\delta^b \frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy\right|.$$

Por el lema de Riemann-Lebesque, esta última integral se nulifica cuando $a \to \infty$. Por tanto existe un $A > 0$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_\delta^b \frac{g(x,y)}{y}\operatorname{sen} ay\,dy\right| < \epsilon \qquad \text{si } a > A.$$

Así que para $a > A$ se tiene

$$|I_a(x) - f(x)| \leqslant |J_1| + |J_2| + |J_3| \leqslant 4\epsilon. \quad \blacksquare$$

20.7b Corolario. Supóngase que f es cuasi diferenciable y tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existen. Entonces para todo x

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Demostración. Probar este corolario mediante el Teorema 20.4b. $\blacksquare$

Si f es una función impar, la integral de Fourier se reduce a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} ux\operatorname{sen} ut\,dt.$$

Si f es par, la integral se transforma en

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty f(t)\cos ux\cos ut.$$

Así que si f es cuasi diferenciable en $\{x \geqslant 0\}$ y $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ existe, entonces f puede extenderse para ser ya sea par o impar. De modo que, por el Teorema 20.7b,

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} ux\operatorname{sen} ut\,dt \\ \qquad\qquad = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty f(t)\cos ux\cos ut\,dt. \end{cases}$$

Cuando las integrales

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} ut\,dt$$

y

$$h(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt,$$

existen, reciben el nombre respectivamente de **transformadas senoidal** y **cosenoidal de Fourier** de f. Si, por ejemplo, se sabe que f satisface las condiciones del Teorema 20.7b, y si tanto g como h son dadas para $u \geqslant 0$, entonces se pueden usar las fórmulas (1) para regresar a f:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\operatorname{sen} ux\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty h(u)\cos ux\,du.$$

EJERCICIOS B

1. Aplicar la integral cosenoidal de Fourier sobre f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \{0 < x < 1\} \\ 0 & \{x > 1\}, \end{cases}$$

para evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u\cos ux}{u}\,du$.

2. Aplicar la integral senoidal de Fourier sobre f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \{0 < x < \pi\} \\ 0 & \{x > \pi\}, \end{cases}$$

para evaluar $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ux\operatorname{sen}\pi u}{1-u^2}\,du$.

(¿Es impropia esta integral en $u = 1$?)

3. Dar un ejemplo de una función para la cual $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ exista y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ no exista.

4. Dar un ejemplo de una función para la cual $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ exista y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no exista.

5. Demostrar mediante la aplicación de la integral cosenoidal que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2 + u^2}\,du = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|} \qquad a > 0, \{-\infty < x < \infty\}.$$

6. El teorema de existencia dio las condiciones suficientes bajo las cuales existe la integral de Fourier. Probar que la integral de Fourier de (sen x)/x existe, demostrando así que el requerimiento de la existencia de $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ no es una condición necesaria.

7. Escribir la integral de Fourier para f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \{x < 0\} \\ e^{-x} & \{x > 0\} \end{cases}$$

y evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos xt + t \operatorname{sen} xt}{1 + t^2}\,dt.$

8. Sea f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \{x < 0\} \\ 1 & \{0 < x < 1\} \\ 0 & \{x > 1\}. \end{cases}$$

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} t \cos xt + \operatorname{sen} xt - \cos t \operatorname{sen} xt)}{t}\,dt.$

20.8 ESPACIOS DE FUNCIONES. CONJUNTOS ORTONORMALES COMPLETOS

Una colección de objetos matemáticos (tales como funciones, números) que satisfacen los Teoremas 8.1a y b se llama **espacio vectorial.** Si sucede que esta colección de objetos es una colección de funciones definida en un cierto intervalo, se llama **espacio de funciones.** Por ejemplo, el conjunto de funciones definidas en $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ es un espacio de ese tipo. De modo que también es la colección de funciones integrables, tanto como la colección de funciones continuas.

Aquí discutiremos el espacio de funciones que consiste del conjunto de funciones continuas definidas en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Este conjunto de funciones se denotará por $\mathscr{F}$. Se evidenciará que una traslación y un cambio de escala reducirán cualquier intervalo al antes dicho, de manera que las consideraciones son típicas.

Se define el **producto interno** (f, g) de dos funciones en $\mathscr{F}$ por

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

y la **norma** de f, a saber $\|f\|$, por

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx} = \sqrt{(f,f)}$$

20.8a Lema. $\|f\| = 0$ si, y solamente si $f(x) \equiv 0$ en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

Demostración. Es evidente que si $f(x) \equiv 0$, entonces $f^2(x) \equiv 0$ y

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 0\,dx} = 0.$$

Inversamente, si $\|f\| = 0$, entonces $\|f\|^2 = 0$,

de modo que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0.$

Supóngase que existiera un x_0 en el cual $f(x) \neq 0$. Entonces $f^2(x_0) > 0$ y, por el Teorema 3.2c, existe una vecindad —digamos $\{x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta\}$— en la cual $f^2(x) \geqslant \frac{1}{2} f^2(x_0)$. Entonces

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx \geqslant \tfrac{1}{2} f^2(x_0)(2\delta) = \delta f^2(x_0) > 0.$$

Esta contradicción completa la demostración. ∎

Este lema es el análogo del Teorema 8.1c. También existe una desigualdad de Cauchy-Schwarz:

20.8b Teorema. $(f, g) \leqslant \|f\|\,\|g\|$ y la igualdad se cumple si, y solamente si, una de las funciones es un múltiplo constante de la otra.

Demostración. En presencia del Lema 20.8a, la demostración es formalmente idéntica a la del Teorema 8.2c. ∎

A partir de esto, también se obtiene la desigualdad del triángulo mediante el mismo argumento que el usado para el Teorema 8.2e.

20.8c Teorema. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Se define la **ortogonalidad** en términos del producto interno; f y g son **ortogonales** si

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Se dice que un conjunto de funciones es un **conjunto ortogonal** si dos

miembros distintos cualesquiera son ortogonales, y es un **conjunto ortonormal** si cada función tiene norma unitaria. Por ejemplo, el conjunto de funciones

$$\{1, \operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}2\theta, \cos 2\theta, \ldots\}$$

es un conjunto infinito de funciones ortogonales por las fórmulas (2), (3) y (4) de la Sección 20.1. Pueden normalizarse dividiendo cada función entre su norma. Por tanto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}2\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2\theta, \ldots\right\}$$

forman un conjunto ortonormal.

Supóngase ahora que las funciones

$$\{\phi_0, \phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n, \ldots\}$$

forman un conjunto ortonormal en $\mathscr{F}$. Puede inquirirse acerca de la posibilidad de representar un miembro arbitrario de nuestro espacio de funciones en términos de las ϕ. Se requiere la existencia de coeficientes c tales que

$$f = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n + \cdots. \tag{1}$$

Si es posible, y es permisible la integración término a término, puede calcularse

$$\begin{aligned}(f, \phi_k) &= (c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots, \phi_k)\\ &= c_0(\phi_0, \phi_k) + c_1(\phi_1, \phi_k) + \cdots + c_k(\phi_k, \phi_k) + \cdots\\ &= (f, \phi_k) = c_k. \qquad (2)\end{aligned}$$

Los c_k así determinados reciben el nombre de **coeficientes generalizados de Fourier** de f respecto al sistema ortonormal de las ϕ. Por lo tanto, si f puede desarrollarse en la forma (1), entonces los c_k están dados por (2).

20.8d. Teorema. Para cada n, la selección de los a_k se hará de modo que $t_n = \sum_0^\infty a_k\phi_k$ sea la mejor aproximación a f cuya norma es $a_k = c_k$.

Demostración. El problema es escoger los a de modo que $\|f - t_n\|$ sea la menor. De modo equivalente, puede hacerse $\|f - t_n\|^2$ un mínimo:

$$\|f - t_n\|^2 = (f - t_n, f - t_n) = \left(f - \sum_0^n a_k\phi_k, f - \sum_0^n a_k\phi_k\right)$$

$$= (f, f) - 2\sum_0^n a_k(f, \phi_k) + \sum_0^n \sum_0^n a_k a_j(\phi_k, \phi_j).$$

Usando la definición de c_k y la ortonormalidad de las ϕ, esto se reduce a

$$\begin{cases}\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_0^n a_k c_k + \sum_0^n a_k^2\\ \qquad\qquad = \|f\|^2 + 2\sum_0^n (a_k - c_k)^2 - \sum_0^n c_k^2,\end{cases} \tag{3}$$

la cual evidentemente es menor cuando $a_k = c_k$. ∎

Denotaremos $\sum_0^n c_k\phi_k$ por S_n. Así, la sustitución $t_n = S_n$ en el teorema anterior proporciona el siguiente corolario.

20.8e Corolario (Desigualdad de Bessel). Para toda f en $\mathscr{F}$,

$$\sum_0^\infty c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Demostración. Escójase $t_n = S_n$. Por (3).

$$\sum_0^n c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad \text{para toda } n.$$ ∎

Regresaremos a comentar muy brevemente acerca de los conjuntos de puntos, principalmente a hacer una definición. Sea A un conjunto de puntos y B un subconjunto de A. Se dice que B es **denso** en A si, dado cualquier punto $\mathbf{P}_0$ en A, existe una sucesión de puntos $\{\mathbf{P}_n\}$ en B con $\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_0$. Por ejemplo, los racionales son densos en los reales, porque el desarrollo decimal (ver Ejercicios C3 y C4 de la Sección 2.7) de un número real x representa tal sucesión de racionales que converge a x.

Regresemos ahora a los espacios de funciones: se dice que un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ es **completo** en $\mathscr{F}$ si $\|f - S_n\| \to 0$, donde, por supuesto, $S_n = \sum_0^n c_k\phi_k$ con $c_k = (f, \phi_k)$.

Encontramos, viendo $\mathscr{F}$ como una colección de «puntos» — es decir, funciones que juegan el papel de puntos— con la distancia entre dos «puntos» f y g dada por $\|f - g\|$, como muy ilustrativa. La razón es que existe una cierta semejanza formal entre los conjuntos de puntos y los conjuntos de funciones, puesto que la «distancia» (norma de la diferencia) satisface las tres condiciones de las cuales dependen la mayor parte de las propiedades geométricas de los conjuntos de puntos, a saber,

(1) $\|f\| \geqslant 0$.
(2) $\|f\| = 0$ si, y solamente si, $f \equiv 0$.
(3) la desigualdad del triángulo $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Denotemos por L el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las ϕ —esto es, el conjunto de todas las funciones de la forma

$$\sum_0^n a_k\phi_k.$$

Entonces el que el conjunto $\{\phi_n\}$ sea completo en $\mathscr{F}$ significa que L es denso en $\mathscr{F}$ con la acepción de conjunto de puntos: dado cualquier «punto» f en $\mathscr{F}$, existe una sucesión de «puntos» S_n en L la cual converge hacia f, donde la convergencia se toma en el sentido de que la nor-

ma o «distancia» tiende hacia cero. La inversa también es verdadera (ver el Ejercicio B2).

Este tipo de convergencia, a saber la convergencia en norma, no implica la convergencia puntual de la sucesión de funciones S_n hacia la función f en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Pero para muchos propósitos del análisis avanzado es de igual o mayor importancia.

Una consecuencia de la completez es el **teorema de Parseval** que se establece a continuación.

20.8f Teorema. Si f está en $\mathscr{F}$ y $\{\phi_n\}$ es un conjunto ortonormal completo en $\mathscr{F}$, entonces

$$\sum_0^\infty c_k^2 = \|f\|^2,$$

donde $$c_k = (f, \phi_k).$$

Demostración. A partir de la demostración de la desigualdad de Bessel,

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_0^n c_k^2 \to 0 \qquad \text{conforme } n \to \infty \quad \blacksquare$$

Este teorema refuerza nuestra visión de $\mathscr{F}$ como un espacio vectorial. El conjunto $\{\phi_n\}$ juega el papel de una base ortonormal, siendo los c_k la proyección de f en la «dirección» del vector base ϕ_k —es decir, la componente del vector en la k-ésima dirección. Finalmente, la norma o longitud del vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes:

$$\|f\| = \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 \cdots}.$$

La analogía, aunque muy útil, no puede llevarse demasiado lejos. En los espacios vectoriales euclidianos dimensionalmente finitos, el vector es la suma de sus componentes en las direcciones base. Lo análogo aquí sería

$$f = \sum_0^\infty c_k \phi_k = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n + \cdots.$$

No obstante, la igualdad en la acepción de convergencia puntual no siempre es el caso aquí.

De hecho, es verdadero que las funciones trigonométricas

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2\theta, \ldots\right\}$$

forman un conjunto ortonormal completo en $\mathscr{F}$, aunque no lo probaremos. Entonces esto implica que la ecuación de Parseval se cumple para las funciones trigonométricas. Así que si f está en $\mathscr{F}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_0^\infty (a_k^2 + b_k^2).$$

EJERCICIOS B

1. Un conjunto de funciones $\{\phi_k\}$ finito o infinito en número, se dice que es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal finita de ellas sin coeficientes cero, la cual se nulifica idénticamente. En caso contrario es linealmente independiente. Demostrar que un conjunto ortogonal es linealmente independiente.
2. Sea $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal en $\mathscr{F}$, y sea L el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las ϕ. Demostrar que si L es denso en $\mathscr{F}$, entonces $\{\phi_n\}$ es completo.
3. Demostrar que el producto interno satisface el Teorema 8.2b: (i) $(f,g) = (g,f)$; (ii) $(f,g+h) = (f,g) + (f,h)$; (iii) $(af,g) = (f,ag) = a(f,g)$; (iv) $(f,f) = \|f\|^2$.
4. Si $\{\phi_n\}$ es un conjunto ortonormal completo en $\mathscr{F}$, y si f y g están en $\mathscr{F}$ con $f \sim \sum_0^\infty c_k\phi_k$ y $g \sim \sum_0^\infty b_k\phi_k$ demostrar que:

   (a) $f \pm g \sim \sum_0^\infty (c_k \pm b_k)\phi_k$.

   (b) $\sum_0^\infty c_k b_k$ converge y $(f,g) = \sum_0^\infty c_k b_k$. (*Sugerencia:* Considerar $\|f+g\|^2$.)
5. Sea $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal completo en $\mathscr{F}$. Supóngase que $(g, \phi_k) = 0$ para toda k implica $g \equiv 0$. Supóngase que f está en $\mathscr{F}$ y $f \sim \sum_0^\infty c_k\phi_k$ y, finalmente, supóngase que $\sum_0^\infty c_k\phi_k$ converge uniformemente en $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Demostrar que converge hacia f. [La condición $(g, \phi_k) = 0$ implica $g = 0$ es verdadera en el caso de las funciones trigonométricas.]

Fórmulas elementales de derivación e integración

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ang\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{ang\,cos} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ang\,tan} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{ang\,cot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\ tan}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log|x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x\,dx = \log|\csc x - \cot x| + C$$

Respuestas, sugerencias y soluciones

SECCION 1.2

EJERCICIOS B

1. (*b*) $a + (-a) = 0$, de modo que $ba + b(-a) = 0$ o bien $ab + b(-a) = 0$. Por la definición de negativo $b(-a) = -(ab)$.
   (*d*) $[a + (-a)][b + (-b)] = 0$. Multiplicar y obtener el resultado.
   (*f*) Si $a > 0$, multiplicar por a; si $a < 0$, por $-a$.
   (*h*) Supóngase que $b \neq 0$: $a = ab(1/b) = 0$.
   (*j*) $b > 0$: multiplicar ambos miembros por a.
   (*l*) $b < 0$: multiplicar ambos miembros por $-a$.
   (*n*) $x/y = a$ y $u/v = c$ significa $x = ay$, $u = bv$. $(xu)/(yv) = c$ significa $xu = cyv$. El problema se reduce a demostrar que $ab = c$. Multiplicando se obtiene $xu = (ay)(bv) = (ab)yv$. Por lo tanto, por la unicidad de la división se obtiene $ab = c$.

SECCION 1.7

EJERCICIOS A

1. (*a*) Sumar $n + 1$ a ambos miembros: los segundos miembros se reducen a $(n + 1)(n + 2)/2$.
   (*e*) Aplicar la parte (*a*).

2.

	b	*d*	*f*	*g*	*j*
sup	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	—	1
inf	—	—	$-\frac{3}{4}$	-5	0 (en *S*)

EJERCICIOS B

4. Excepto cuando $x = 0$.

SECCION 2.2

1. (*b*) $\frac{1}{2}$; (*d*) $+\infty$; (*f*) diverge: los términos pares $\to -\infty$.
2. (*b*) 0 (*d*) oscila.

EJERCICIOS B

1. (*b*) $\frac{4}{3}$; (*d*) 10; (*f*) 0.
2. Por inducción $|a_n| < |a_0|q^n \to 0$.

3.

	b	d
sup	$2\frac{1}{4}$ $(n=4)$	$\frac{1}{2}$ $(n=2)$
inf	-1	$-\infty$

4.

	a	c	e
sup	1	$\pi/2$	1
inf	0 (se alcanza)	0 (se alcanza)	0

SECCION 2.3

EJERCICIOS A

1. (b) $+\infty$; (d) 1; (f) $-\frac{1}{2}$; (h) $5a^4$.

EJERCICIOS B

6. (a) $a/3$; (b) 0; (c) 1.

EJERCICIOS C

2. (a) $x/2^{1/n} < [(x^n + y^n)/2]^{1/n} \leq x$, reemplazando y por 0 y a continuación por x. Así que el límite es $x = \text{máx}\,(x, y)$.
(b) máx a_i; (c) $y = \text{mín}\,(x, y)$; (d) mín a_i.

SECCION 2.5

EJERCICIOS A

1. (b) m/n; (d) $-2/x^3$; (f) $\frac{1}{2}$.
2. (a) 3; (c) 1; (e) 0; (g) 8; (i) $\frac{1}{2}$; (k) 0.

EJERCICIOS B

2. 1.
6. $f(0+0) = +\infty, f(0-0) = 0$.
8. $f(0+0) = \pi/2, f(0-0) = -\pi/2$.

EJERCICIOS C

2. $\frac{1}{n}\sum a_j$.

SECCION 2.7

EJERCICIOS A

2. (a) Subsucesión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (c) $\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} \to e^{1/2}$

(e) Subsucesión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

SECCION 3.4

EJERCICIOS A

2. En los enteros.
6. Por el Teorema 3.3a.
8. (a) $x = 1 + \sqrt{y-3}$, $\{y > 3\}$; (b) $x = 1 - \sqrt{y-3}$, $\{y > 3\}$.

EJERCICIOS B

2. $g(x) = x(1-x)$ y es continua en todo I.
8. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ en todo punto en el intervalo.
10. Definir $f(a)$ como $f(a+0)$ y $f(b)$ como $f(b-0)$.

SECCION 3.6

EJERCICIOS A

2. (a) $-y^{1/4}/x^{1/4}$ (b) $-y^{1/3}/x^{1/3}$
4. $x \pm 4\sqrt{6y} = 5$
6. (a) $\sqrt{x+h} - \sqrt{x} = h/2\sqrt{x_0}$.

EJERCICIOS B

2. $f'(0 \pm 0) = 0$.
4. $(f_1g_2 - f_2g_1)' = (f_1'g_2 - f_2'g_1) + (f_1g_2' - f_2g_1')$.
8. Aplicar inducción.
10. Para ver que $f'(0)$ existe:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \operatorname{sen} \frac{1}{h^2} \to 0.$$

17. $(\alpha - \beta)f'(a)$.

SECCION 4.3

EJERCICIOS A

1. (b) Supóngase que $a = 0$. Entonces para P: $0, b/n, 2b/n, \ldots, b$ se obtiene $S = \Sigma(jb/n)^2 b/n = (b^3/n^3)\Sigma j^2 = b^3 n(n+1)(2n+1)/6n^3 \to b^3/3$.

EJERCICIOS B

2. -1.
4. $\frac{1}{2}\log 2$.

SECCION 4.6

EJERCICIOS A

1. (b) $(x^2 - 3)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$.
(d) $e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)/(a^2 + b^2) + C$.
(f) $\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log|\sec x + \tan x| + C$.
(h) ang sen$x/a + C$.
(j) $-x\sqrt{x^2 - a^2}/2 + a^2[\log|x + \sqrt{x^2 - a^2}|]/2 + C$.
(l) Racionalizar.
5. $-f(x)$.

SECCION 5.2

EJERCICIOS A

4. Hacer $y = x^a$. Entonces $\log y = a \log x$ de modo que $y'/y = a/x$ o bien $y' = ay/x = ax^{a-1}$.

EJERCICIOS B

2. (*a*) 1, (*c*) 1, (*e*) 1, (*g*) *c*.

EJERCICIOS C

1. (*b*) 0; (*d*) e^a.

SECCION 5.3

EJERCICIOS B

2. Reemplazar θ por $(\pi/2 - \theta)$ en sen $(\pi - \theta) =$ sen θ, entonces aplicar la fórmula de adición. Derivar para obtener la segunda fórmula.

SECCION 6.2

EJERCICIOS A

1. (*b*) $-2 - \sqrt{2}/2$, $-2 + \sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, 0, $\sqrt{2}/2$, 1, 2.
3. (*a*) Todos los puntos en $\{-1 < y < 1\}$. (*c*) $\{0 < y < 1\}$.

EJERCICIOS B

2. $|A - x_n| < cr^n/(1 - r)$.
4. Por el criterio de Cauchy.
6. Por el criterio de Cauchy.

SECCION 6.3

EJERCICIOS A

	1*b*	1*d*	1*f*	2*b*
lim sup	2	∞	∞	1
lim inf	$-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	0

SECCION 6.4

EJERCICIOS A

1. Por el Teorema 6.4c.

SECCION 7.2

EJERCICIOS A

1. (*b*) $-\pi/2$, (*d*) 0, (*f*) 1, para $\alpha = 1$; 0, para $\alpha > 1$, (*h*) grande, (*j*) -1, (*l*) 1, (*n*) 1, (*p*) $\sqrt{e}$.

EJERCICIOS C

2. $B = An!$; $f^{(n-k)}(x)/x^{n-k} \to An!/(n-k)!$

SECCION 7.3

EJERCICIOS A

1. (*b*) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7$, $|R_7| = |R_8| < \left|\frac{x^8}{8!}\right|$.

$$\cos x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 - (x - \pi/4) - \frac{1}{2!}(x - \pi/4)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}(x - \pi/4)^4 - \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6\right] + R_7,$$

$$|R_7| < \frac{1}{7!}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|^7.$$

(*d*) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + R_7$,

$$|R_7| < \frac{1}{7!}e^{|x|}|x|^7,$$

$$e^x = e^a\left[1 + (x - a) + \frac{1}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{6!}(x - a)^6\right] + R_7,$$

$$|R_7| < \frac{1}{7!}e^a e^{|x-a|}|x - a|^7.$$

(*f*) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + R_7$, $|R_7| = |R_8| < \frac{1}{8!}e^{|x|}|x|^8$.

(*h*) $2 + 6(x - 1) + 15(x - 1)^2 + 13(x - 1)^3 + 5(x - 1)^4 + (x - 1)^5$, $R_n = 0$, $n > 6$.

(*j*) $108 + 252(x - 2) + 270(x - 2)^2 + 165(x - 2)^3 + 60(x - 2)^4 + 12(x - 2)^5 + (x - 2)^6$, $R_n = 0$, $n > 7$.

2. (*b*) $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 \cdots$.

(*d*) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \cdots$.

(*f*) $\operatorname{angtan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \cdots$.

(*h*) $(1 + x^2)^a = 1 + ax^2 + \dfrac{a(a-1)}{2}x^4 \cdots$.

(*j*) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 \cdots$.

EJERCICIOS B

2. $\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} \cdots$.

EJERCICIOS C

2. $f(x) = e[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 \cdots]$.

SECCION 7.4

EJERCICIOS A

1. (*b*) $\frac{5}{4}$, mín; 2, máx. (*d*) 1, máx. (*f*) 0, mín; $\sqrt[4]{(n - \frac{1}{2})\pi}$: *n* par, mín; *n* impar, máx. (*h*) *e*, mín; (*j*) *n* par: 0, mín; $\pm\sqrt{n/2}$ máx; *n* impar: 0 ninguno, $+\sqrt{n/2}$, máx, $-\sqrt{n/2}$ mín; (*l*) *e*, máx.

EJERCICIOS B

1. 0, mín; 1, min; $\frac{1}{4}$ máx. 4. *f*: ninguno; *g*: mín.

SECCION 8.1

EJERCICIOS A

2. $T = 100$.

6. Sí.

EJERCICIOS B

2. Un plano a través del origen que contiene a los vectores a y b.

SECCION 8.3

EJERCICIOS A

2. (*a*) $\mathbf{i} - \mathbf{k}$, (*d*) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, (*g*) -1, (*i*) 0, (*j*) 0.

8. Es normal al plano que pasa por P, Q y R.

12. $\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$.

EJERCICIOS B

4. $[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}]\mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{d} = [(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{a}]\mathbf{b} - [(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{a}$.

SECCION 8.6

EJERCICIOS A

2. $\mathrm{P}(t) = \mathrm{P}_1 + (\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1)t$.

4. $5(x - 1) + 2(y - 2) - 2(z + 1) = 0$.

EJERCICIOS B

2. Si c no es ortogonal a a, no existen tales puntos P.
   Si c es ortogonal a a, es una recta paralela a a que se encuentra a una distancia de $|\mathbf{c}|/|\mathbf{a}|$ unidades.

4. Si los vectores son $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, respectivamente. entonces $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$. Entonces $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1 - a_2)\mathbf{e}_1 + (a_2 - a_3)\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$.

SECCION 8.9

EJERCICIOS A

5. (*a*) $\mathbf{v} = \sqrt{1 + c^2}\,\mathbf{T}$, $\mathbf{a} = \mathbf{N}$.

EJERCICIOS B

2. $\mathbf{v} = \mathbf{T}\dfrac{ds}{dt}$, $\mathbf{a} = \mathbf{N}\kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{T}\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

SECCION 9.2

EJERCICIOS A

2. $\left\{\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)\right\}$; $\left\{\left(0, \dfrac{1}{m}\right)\right\}$, $\{(0, 0)\}$.

4. S no es abierto ni cerrado puesto que contiene parte pero no toda su frontera.

SECCION 9.4

EJERCICIOS A

1. (*a*) D: $\{x^2 + y^2 > 0\}$, R: $\{-1 < f < 1\}$.
   (*f*) D: $\{xy > -1\}$, R: $\{-\infty < f < \infty\}$.

2. (*a*) D: E_3, R: Esa parte de E_3 donde las dos últimas componentes son no negativas.
   (*c*) D: $\{x^2 + y^2 = 1\}$, R: $\{(0, 0, 1)\}$.

EJERCICIOS B

2. (*a*) El cubo unitario cerrado en E_3.
   (*b*) La superficie de la esfera unitaria en E_3.

6. 1.

SECCION 9.7

EJERCICIOS A

1. (*b*) 0; (*d*) $\frac{1}{2}$.

4. En la definición de continuidad tomar $\epsilon = f(x_0)/2$.

EJERCICIOS B

4. Hacer $g(x, x) = f'(x)$.

SECCION 10.1

EJERCICIOS A

3. (*b*) $z_1 = -\dfrac{2xz \log z}{ze^z + x^2}$, $z_2 = \dfrac{-z}{ze^z + x^2}$

4. (*a*) $u_1 = \cos v + \operatorname{sen} v$ $\qquad$ $v_1 = (\cos v - \operatorname{sen} v)/u$
   $u_2 = \operatorname{sen} v$ $\qquad$ $v_2 = (\cos v)/u$

SECCION 10.2

EJERCICIOS A

2. (*a*) $x - y = z - 1$; (*d*) $2x + 4y - z = 3$.

4. Error máximo aproximado $= \pi/1600 \sim 0.00196$.

SECCION 10.4

EJERCICIOS A

1. (*a*) $\alpha \cdot \nabla f = 8/\sqrt{22}$, (*h*) $-446/\sqrt{129}$

2. $\beta \cdot \nabla f$.

4. $g_x = f_u + f_v + 2f_w$, $g_y = -f_u + f_v$.

EJERCICIOS B

6. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

10. $h_x = f'g$, $h_y = xf'g'$, $h_{xx} = f''g^2$,
    $h_{xy} = f'g' + xf''gg'$, $h_{yy} = x^2f''(g')^2 + xf'g''$.

SECCION 10.6

EJERCICIOS A

1. (*a*) $xy - \dfrac{1}{3!}\left(xy^3 + x^3y\right) + \left(\dfrac{xy^5}{5!} + \dfrac{x^3y^3}{(3!)^2} + \dfrac{x^5y}{5!}\right) + \cdots$

   (*h*) $\sum_0^{14} (x + y)^3$.

SECCION 11.2

EJERCICIOS A

1. (*a*) (1, 3, 4).

EJERCICIOS B

4. Una rotación en $\pi/3$.

SECCION 11.3

EJERCICIOS A

1. (*a*) 1, (*c*) e^{2r}, (*d*) $\frac{1}{n}y^{1/n-1}$

2. (*a*) El cuadrado girado en $\pi/4$.
   (*d*) Una figura de cuatro lados con esquinas en (0,0), (1,0), (2,1) y (1,1) siendo los lados superior e inferior segmentos lineales. Los lados son las curvas: $u = v^n$ y $u - 1 = v^n$.

4. (*c*) $1/(x^2 + y^2) = e^{2r}$.

6. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r}$.

8. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

10. $\Delta u = e^{4r}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$

12. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

EJERCICIOS B

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \dfrac{\partial(h, g)}{\partial(u, v)}\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

SECCION 11.6

EJERCICIOS A

2. (*a*) Dos funciones. ± 5, (*b*) ninguna.

4. Solamente pasa $x = y = 0$.

6. u, v son coordenadas polares. Las coordenadas (u, v) y $(u, v + 2\pi)$ describen el mismo punto en el plano (x, y).

EJERCICIOS B

4. Cuando el jacobiano de **F** respecto a **P** no es cero.

8. (*c*) $\Delta f = \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$.

SECCION 11.8

EJERCICIOS A

1. (*b*) (0, 0) silla, $(-4, -4)$ máx; (*d*) $(2, -2)$ máx; (*f*) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ máx, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ mín.
2. (*b*) máx 28, mín: -20. (*d*) máx: $2\sqrt{2}$, mín: 0.
4. $(2, \frac{8}{3}, 1)$ 6. $(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{3}{15})$.

EJERCICIOS B

4. (*a*) (0, 0) silla.
   (*b*) (0, 0) silla, $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ mín.

SECCION 12.3

EJERCICIOS A

1. (*b*) 2, (*c*) 0, (*d*) $\frac{1}{6}$ [sen 9 + sen 7 — sen 11 — sen 3 — 2 sen 1].

SECCION 12.4

EJERCICIOS A

2. La integración es sobre el triángulo acotado por $y = 0$, $y = x$, $x = a$.
4. (*a*) $a^3/6$. (*b*) $(e - 1)/2$. Es una integral propia puesto que $x > y$.
5. (*b*) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^{3/2}}^{x} f(x, y)\, dy$.
   (*d*) $c < a$: $\displaystyle\int_c^a dy \int_a^b f(x, y)\, dx + \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\, dx$.

EJERCICIOS B

2. $6(b^{7/6} - a^{7/6})(d^{5/6} - c^{5/6})/35$.

SECCION 13.1

EJERCICIOS A

1. (*a*) $-\frac{3}{8}$, (*c*) $1 - 2\cos 1$, (*e*) $\frac{8}{3}$, (*g*) $2\pi + \frac{1}{2}$.
2. (*a*) 2π, (*c*) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi$.
4. $4/\sqrt{17} + \log[4 + (1/\sqrt{17})]$.
7. (*c*) $\phi = x^2y + xz^3 + 3yz$.

SECCION 13.2

EJERCICIOS A

1. (*b*) 0, (*d*) 0, (*f*) 0.

EJERCICIOS C

2. (*a*) Hacer $L = -u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $M = u\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y nótese que $dx = n_y\, ds$, $dy = n_x\, ds$ donde $\mathbf{n} = \mathbf{i}n_x + \mathbf{j}n_y$.
   (*c*) Hacer $u = v$ en (*a*).
3. (*a*) Hacer $\mathbf{F} = M\mathbf{i} - L\mathbf{j}$ y usar las relaciones diferenciales anotadas en 2*a*.

SECCION 13.4

EJERCICIOS A

1. (*b*) $2\pi\sqrt{2}$, (*d*) $\frac{8}{3}\pi[2\sqrt{2} - 1]$.
3. (*a*) π, (*b*) $81\pi/2$, (*d*) 2π.
5. (*b*) 0.

SECCION 13.6

EJERCICIOS A

1. (*a*) -4π.

SECCION 13.7

EJERCICIOS A

2. (*a*) $D \to D'$: $\{(u+1)^2 + (v-1)^2 < a^2\}$, un círculo.
(*b*) $D \to D'$: $\{(au+bv)^2 + (cu+dv)^2 < a^2\}$, una elipse.

4. (*a*) $\displaystyle\int_{-1/4}^{1/4}\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{x} dz\,dy\,dx.$

(*b*) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta}\int_{x}^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta.$

EJERCICIOS B

2. $2 \log 2 - \frac{1}{2}$.

SECCION 14.1

EJERCICIOS A

1. (*b*) $\frac{1}{4}$. 2. Converge absolutamente.

SECCION 14.2

EJERCICIOS A

AC = Absolutamente convergente.
NAC = No absolutamente convergente.

2. (*a*) NAC, (*c*) NAC, (*e*) NAC, (*g*) AC (*i*) NAC, (*j*) NAC, (*l*) NAC.

EJERCICIOS B

2. $x > 0$. 4. Primera NAC; segunda AC.

6. $x \neq \pm 1$.

SECCION 14.4

EJERCICIOS A

C = Convergente.
CC = Condicionalmente convergente.
AC = Absolutamente convergente.
D = Divergente.

1. (*b*) CC, (*d*) CC, (*f*) CC, (*h*) CC, (*j*) D, (*l*) C (y por lo tanto AC) si y solamente si $x > 1$.

2. (*b*) $n \geqslant \exp 10^{10}$.

3. (*a*) $|x| < 1$, (*c*) $|x| > 1$, (*e*) $-1 \leqslant x < 1$.

4. (*a*) Si n es tan grande que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)x = r < 1$, entonces $|S - S_n| < \dfrac{a_{n-1}|x|^{n+1}}{1-r}$.

5. (*a*) C, (*c*) D, (*e*) C, (*g*) C.

6. (*a*) $0 < S - S_{100} < \dfrac{a_{100}\frac{101}{201}}{1-\frac{100}{201}} = a_{100}$.

EJERCICIOS B

2. La serie k, $k > 1$.

3. (*a*) $a_n = a_{N+1}\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > a_{N+1}$.

EJERCICIOS C

4. Considerar $\displaystyle\sum_{0}^{\infty}(a_n x + b_n)^2$.

SECCION 14.6

EJERCICIOS A

2. (*a*) D, (*c*) D.

EJERCICIOS B

2. Converge para $|x| < 1$ y diverge para $x > 1$. Para $x = -1$ converge (y de aquí que converge absolutamente), para $a \geqslant 0$, y diverge para $a < 0$. Para $x = 1$, converge absolutamente para $a \geqslant 0$, condicionalmente para $-1 < a < 0$ y diverge para $a \leqslant -1$.

EJERCICIOS C

2. $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{3} - \cdots - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{5} - \cdots - \dfrac{1}{24} - \cdots + \dfrac{1}{2k-1} - \cdots - \dfrac{1}{8k} + \cdots$

SECCION 15.2

EJERCICIOS A

2. Si $|x| \leqslant a < 1$, entonces $M_n = a^n \to 0$.

4. Converge puntualmente hacia cero en (*a*), (*b*), (*c*), uniformemente sólo en (*b*).

8. Converge uniformemente para todo x puesto que $\left|\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right| < 1$.

EJERCICIOS B

4. a puede ser cualquier número $< b$, donde b se define por $b \log b = 1$.

SECCION 15.3

EJERCICIOS A

2. $x < 1/2$.

4. $S(x) = 0$, $\{0 \leqslant x < 1\}$; $S(x) = 1$, $\{1 \leqslant x \leqslant 2\}$. Si la convergencia fuera uniforme S sería continua.

6. La convergencia no es uniforme, sin embargo el límite y la integración pueden intercambiarse aquí. La convergencia uniforme es una condición suficiente, no necesaria, para el intercambio.

8. f es continua para $x > 0$.
$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dy = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e^2-1}$.

SECCION 15.5

EJERCICIOS A

2. Solamente es necesario demostrar la convergencia uniforme de la serie para f'. Aplicar la prueba de Dirichlet con $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $v_n = e^{-nx}$.

4. Aplicar la prueba de Dirichlet con $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\log n}$, $v_n = x^n e^{-nx}$.

6. $\Sigma(-1)^n \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)$.. Converge uniformemente en todo intervalo finito pero no para todo x.

EJERCICIOS B

4. Aplicar la prueba de Abel con $u_n = \cos nx$, $v_n = n^{-\alpha}$.

Observar $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n-1)^\alpha}\right| < \dfrac{\alpha}{(n-1)^{\alpha+1}}$ mediante el teorema del valor medio.

SECCION 16.1

EJERCICIOS A

1. (*b*) $R = \infty$, (*d*) $R = 1$. Converge en $x = 1$ si $k > 1$, converge en $x = -1$ si $k > 0$, absolutamente si $k > 1$. (*f*) $R = 1/e$. Diverge para $x = \pm 1/e$.
2. (*b*) $0 < x < 4$, (*d*) $\pi - 1 < x < \pi + 1$.

EJERCICIOS B

1. (*c*) e.
3. (*a*) $\geqslant \min(R, R')$, (*b*) $\geqslant RR'$, (*c*) Nada puede decirse.

SECCION 16.2

EJERCICIOS A

1. (*b*) $R = 4$, (*d*) $R = 1$.
3. (*a*) $1 = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$.

EJERCICIOS B

1. (*b*) $f = -\displaystyle\int_0^x \{[t + \log(1-t)]/t^2\}\, dt \quad \{-1 < x < 1\}$.

(*d*) $f = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x \{[t + \log(1-t)]/t^2\}\, dt - \frac{1}{x}\log(1-x) \quad \{-1 \leqslant x < 1\}$.

(*f*) $f = \dfrac{x}{1-x^5} \quad \{-1 < x < 1\}$

SECCION 16.3

EJERCICIOS A

1. (*b*) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 + (x - 3\pi/4) - \dfrac{1}{2!}(x - 3\pi/4)^2 - \dfrac{1}{3!}(x - 3\pi/4)^3 + + - - \cdots\right]$

(*d*) $\displaystyle\sum_0^\infty (x \log a)^n/n$ (*f*) $-\displaystyle\sum_1^\infty x^n/n$ (*h*) $e\displaystyle\sum_0^\infty (x-1)^n/n!$

(*j*) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{n!\,(3n+1)}$ (*l*) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k!)(2k-1)}$

2. 0.747.

SECCION 16.4

EJERCICIOS A

2. (*a*) $x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \cdots$.

(*c*) $x^2 + \dfrac{1}{18}x^6 + \cdots$.

(*e*) $1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + \cdots$.

3. (*b*) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots$.

(*d*) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots$.

(*f*) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{4} + \cdots$.

EJERCICIOS B

3. $\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} + \cdots$, $\csc x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3!} + \cdots$.

SECCION 16.7

EJERCICIOS A

1. (*b*) $1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \dfrac{y^3}{2!} + \cdots$.

2. (*a*) $y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{3y^5}{40} + \cdots$.

4. $\Sigma r^n \cos n\theta = \dfrac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$.

SECCION 17.1

EJERCICIOS A

(D = divergente. AC = absolutamente convergente.)

1. (*b*) D, (*d*) D para $k = 1$, $1/(k-1)$ para $k > 1$, (*f*) AC, (*h*) AC : 2, (*j*) AC : $\frac{1}{2}$, (*l*) AC, (*n*) AC : $3\sqrt{\pi}/8$, (*p*) AC : $\frac{1}{2}(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

EJERCICIOS B

4. $-\pi \log 2$.

SECCION 17.4

EJERCICIOS A

(D = divergente. C = convergente.)

1. (*b*) $\alpha = 1$, D; $\alpha > 1$, C; (*d*) C; (*f*) D; (*h*) C; (*j*) C; (*l*) C; (*n*) C; (*p*) D; (*r*) D.
2. (*a*) no, (*c*) no.

EJERCICIOS B

2. D.

SECCION 17.5

EJERCICIOS A

1. (*b*) C, (*d*) C.

2. (*a*) C, (*c*) C.

SECCION 18.1

EJERCICIOS A

2. (*a*) Por el Teorema 18.1*a*.

(*b*) $$\int_0^t \operatorname{sen} xt\, dt = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(*c*) $$\int_0^1 t\cos xt\, dt \begin{cases} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \dfrac{\cos x - 1}{x^2} & x \neq 0 \\ = \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

(*d*) $$\int_0^1 \frac{1-\cos at}{t}\, dt$$

(*e*) $$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+2)!}$$

4. (*a*) $|x| < 1$.

(*b*) $$f'(x) = -2\int_0^\pi \frac{\cos y\, dy}{(1 + x\cos y)^3}$$

SECCION 18.2

EJERCICIOS A

1. (*b*) $e^{-xt}(1+t^3) < e^{-at}(1+t^3)$.

(*d*) $$\left|\frac{\operatorname{sen} t}{t^y}\right| < \left|\frac{t}{t^y}\right| = t^{1-y} < t^{1-a}.$$

(*f*) $$\left|e^{-t(x+1)}\cos xt\,\frac{t}{t+x^2}\right| < e^{-t}.$$

EJERCICIOS B

2. (*a*) Aplicar la prueba de Abel con $u(x, t) = \operatorname{sen} xt$.
(*c*) Aplicar la prueba de Abel con $u(x, t) = \operatorname{sen} t$.
(*e*) No converge uniformemente. Es 0 cuando $x = 0$, y $c/\sqrt{x}$ cuando $x > 0$.

SECCION 18.3

EJERCICIOS A

1. (*a*, *b*, *d*) Teorema 18.3*c*.
(*e*, *f*, *g*) Teorema 18.3*b*.
(*h*, *i*, *j*) Teorema 18.3*e*.

EJERCICIOS B

8. $\pi(b-a)$.

10. 0 $x > |y| + |z|$.
$-\pi/8$ $x = |y| + |z|$.
$-\pi/4$ $\big||y| - |z|\big| < x < |y| + |z|$.
$-\pi/8$ $|x| = \big||y| - |z|\big|$.
0 $|x| < \big||y| - |z|\big|$.
$\pi/8$ $x = -\big||y| - |z|\big|$.
$\pi/4$ $-|y| - |z| < x < -\big||y| - |z|\big|$.
$\pi/8$ $x = -|y| - |z|$.
0 $x < -|y| - |z|$.

11, 12. Integrar la integral en 10 respecto a y y después respecto a z.

EJERCICIOS C

4. $\dfrac{\pi}{2}|y|$.

6. $\frac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-y}{x+y}\right|$

8. $\log|a/b|$.

SECCION 19.2

EJERCICIOS A

8. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.
$\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = (-1)^n\sqrt{\pi}/(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})$.

EJERCICIOS C

1. $\dfrac{\Gamma(1-a)}{a}$

2. (*a*) $\dfrac{2\Gamma(1-a)(2^a-1)}{(1+a)a}$ $a \neq 0$

$2\log 2$ $a = 0$

(*b*) $\dfrac{3\Gamma(1-a)(1-2^{2+a}+3^{1+a})}{(2+a)(1+a)a}$ $a \neq 0, -1$

$3\log(\frac{4}{3})$ $a = -1$

$(\frac{3}{2})\log(\frac{27}{16})$ $a = 0$.

SECCION 19.4

EJERCICIOS A

1. (*a*) $I(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

(*c*) $I(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4x}}$.

SECCION 20.1

EJERCICIOS A

1. (*b*) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

(*d*) $\frac{2}{\pi}\operatorname{senh}\pi\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^n(\cos nx - n\operatorname{sen} nx)/(1 + n^2)\right]$.

(*f*) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$

SECCION 20.5

EJERCICIOS A

1. (*a*) serie senoidal: sen x = sen x.

serie cosenoidal: sen $x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

(*c*) serie senoidal: $1 = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{(2k+1)}$.

serie cosenoidal: $1 = 1$.

2. (*a*) $x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_1^\infty (-1)^n \cos\frac{n\pi x}{L}$.

(*c*) $1 = 1$.

4. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\left\{a_n \cos\left[\frac{2n\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right] + b_n \operatorname{sen}\left[\frac{2n\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]\right\}$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left[\frac{2n\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\left[\frac{2n\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

SECCION 20.7

EJERCICIOS B

2. $\frac{\pi}{2}$ sen x en $\{0 \leq x \leq \pi\}$, 0 en $\{x > \pi\}$.

6. Puesto que f es par, la integral se reduce a la integral cosenoidal.

y $$h(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t\cos ut}{t}\,dt = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1 \\ \frac{1}{2}, & u = 1 \\ 0, & u > 1 \end{cases}$$

por el ejemplo 5 de la Sección 18.3.

8. π en $\{0 < x < 1\}$, en $\{x < 0\}$ y $\{x > 1\}$.

Indice

Las referencias que se encuentran entre paréntesis son para los problemas

A

Aceleración, 206
Angulo, 118
Angulo sólido, 347 (C1)
Area, 108, 108, 314
Area de una superficie, 336
Argumento, 39, 434
Axiomas de Peano, 19, 20
Axiomas, Peano, 19, 20
  para la aritmética, 23
  para los reales, 27

B

Base, 188
Bolzano-Weierstrass, 140, 216

C

Cambio de variables, 355
Cambio de orden de límites, 236, 306, 395-400, 415-417, 457, 467, 477, 510
Campo conservativo (de fuerzas), 324
Campo de velocidades, 354
Campo vectorial, 257
Cinta de Moebius, 351
Círculo de convergencia, 436
Cociente de series, 428, 429
Coeficientes de Fourier generalizados, 524
Coeficientes de Fourier, 293
  generalizados, 524
Colineal, 188
Componente, 173
Complemento, 211
Condición de Dini, 505, 518
Condición de Hölder, 230 (C4)
Conjugado, 434
Conjunto abierto, 210
Conjunto abierto conexo, 211
Conjunto cerrado, 211
Constante de Euler-Mascheroni, γ, 374 (C2), 492 (C2)
Continuidad, 67, 225, 226
  seccionalmente, 506
Continuidad uniforme, 69, 150, 225, 227, 304
Contenido cero, 309
Contenido de Jordan cero, 309
Convergencia, 44, 107, 365, 368, 390, 439, 443, 461, 505, 507, 513
Convergencia absoluta, 368, 443, 454
Convergencia uniforme, de funciones, 463
  de integrales, 461
  de series de potencias, 414
  de sucesiones y series, 389
Coordenadas curvilíneas, 280
Coordenadas ortogonales, 283
Coplanar, 188
Corte de 26
Corte (Dedekind), 27

Cotas, 30
Criterio de Cauchy, 141, 142, 367, 442
Cuadrable, 314
Cuasidiferenciable, 506
Curva, 197
  suave, 319
Curva cerrada, 197
Curva de Jordan, 197
Curva suave, 319
Curva de Peano, 197
Curvatura, 206

D

Darboux (integrales superior e inferior), 98, 300
Decimales, 65 (C3), 65 (C4)
Del, 243
Derivadas parciales, 231
Derivada direccional, 243
Desigualdades, de Bessel, 498, 500
  de Cauchy-Schwarz, 177, 187 (C4), 193, 380 (C4), 452 [C1(c)]
  del triángulo, 178, 187 (C2, 3, 4), 193, 380 (C5), 452 [C1(d)]
Desigualdad de Cauchy-Schwarz, 177, 187 (C4), 193, 380 (C4), 452 [C-(c)]
Desigualdad de Bessel, 500, 525
Determinante jacobiano, 251
Diámetro, 212
Diferencial, 81
  exacta, 324
  total, 239
Discontinuidad, 68
Divergencia, 257
  de series infinitas, 365
  significado físico, 353
  sucesión, 43
  teorema de la, 345
División de series de potencias, 428
Dominio, 40, 218, 221

E

e, 62
Elemento de superficie simple y suave, 337
Enteros, 19
Espacio, 30
  de funciones, 522
  vectorial, 173, 174, 193, 522
Espacio vectorial euclidiano, 173, 193
Escalar, 172
Evaluación asintótica de integrales, 487
Extremos, 82, 165, 288
Extensión periódica, 494, 514

F

Fórmula de Cauchy-Hadamard, 412, 436
Fórmulas de Frenet, 208 (C2)
Fórmula de Stirling, 491
Fórmula de Taylor, 161
Frontera, 211
Función inversa, 73
  definida por una serie de potencias, 432
  derivadas de una, 87
Función, 40, 196, 218, 221
  de varias variables, 225
Función analítica, 436
Función Beta, 484
Funciones circulares, 126
Función compuesta, 71, 247
Función diferenciable, 78, 201, 238, 272
Función exponencial, 123
Función Gama, 481
Función homogénea, 254 (C1)
Función impar, 108 (A2)
Función máximo entero, 41
Función multivaluada, 40
Función par, 108 (A2)
Función signum, 41
Función trascendente, 121
Función trigonométrica, 126
Funciones monótonas, 63, 73, 86, 87
Fuerza, 257

G

Gráfica, 40
Gram-Schmidt, 195 (C1)

I

Identidad de Abel, 401
  prueba, 404, 464

  teorema, 416
Inducción, 20, 32
Infimum, 31
Integral, definida, 101, 109
  impropia, 107, 439, 452
  indefinida, 114
  inferior, 96, 300
  iterada, 305, 458, 467, 471
  de línea, 319
  múltiple, 297
  de Riemann, 93, 101, 300
  de superficie, 342
  superior, 96, 301
Integral definida, 101
Integral de Fourier, 517
Integrales impropias, 107, 439, 452, 461
Integral de Riemann-Darboux, 98, 300
Intervalo, 29
  de convergencia, 511
Intervalo abierto, 29
Intervalo cerrado, 29
Integral iterada, 305, 458, 467, 471
Integrales múltiples, 297
Integración por partes, 116
  por substitución, 115
Integral superior, 98, 300

L

Lema de Riemann-Lebesque, 501
Límite inferior, 145
Línea poligonal, 212
Longitud, *ver* Longitud de arco
Longitud de arco, 127, 198, 202

M

Matriz jacobiana, 271
Máxima cota inferior, 31
Media pesada, 117
Método de Laplace, 487
Mínima cota superior, 31
Módulo, 434
Multiplicadores de Langrange, 293
Multiplicación, de matrices, 270 (B5)
  de series, 425, 428
  de vectores, 176

N

Normal, 189
  principal, 206
Norma de una función, 187 (C2, 3, 4.) 523
Norma de una partición, 95, 298
Núcleo (Kernel) de Dirichlet, 501
Números de Bernoulli, 431 (C2)
Números complejos, 434
Números irracionales, 27
Números racionales, 21
Números reales, 27

O

Orientación, de una frontera, 330
  de un conjunto de vectores, 189, 190
Ortogonalidad, 179, 195 (C1), 495, 523
Ortonormal, 189, 524

P

Partición, 95, 298
Potencial, 322
Plano tangente, 239
Primitiva, 114
Producto cruz, 180
Producto, cruz, vectorial, 180
  de matrices, 270 (B5)
  punto, escalar, interno, 177, 187 (C4), 523
  de series, 425, 428
  triple, 183
Producto escalar, 177
Producto infinito, 486 (C4), 492 (C2)
Producto interno, 177, 523
Producto punto, 177
Promedio, *ver* Media
Prueba de alternación para integrales, 450, 452 (C3)
Producto vectorial, 180
Prueba de comparación, 370, 371, 447
Prueba de Dirichlet, 402, 465
Prueba de Gauss, 382
Prueba de la integral, 372
Prueba de Kummer, 381
Prueba de Raabe, 382
Prueba de la raíz, 375
Prueba de la raíz de Cauchy, 375
Prueba para series alternantes, 378

Prueba de la razón, 377, 451 (B4)
Prueba *M* de Weierstrass, para integrales, 461, 462
  para series, 393
Punto de acumulación, 139, 214
Punto crítico, 165, 289
Punto interior, 29, 210
Punto límite, 139, 214
Punto silla, 289

R

Radio de convergencia, 411, 436
Raíces cuadradas, 75
Raíces, existencia, 75, 75
Rango de una función, 39, 218, 221
Rearreglos, 383
Región, 212,
  abierta, 212
  cerrada, 212
  convexa, 352
  estándar, 328, 343
  simplemente conexa, 332
Región simplemente conexa, 332
Región cerrada, 212
Región convexa, 352
Regla de la cadena, 77, 247, 248
Regla de l'Hospital, 155
Regla de Leibnitz, 90 (B8)
Restricciones, 291
Rotación, 355
Rotacional, 259
  significado físico, 355
  teorema de Stokes, 352

S

Serie armónica, 370, 374 (C2)
Serie binomial, 387 (B2), 418
Serie compleja, 433
Serie cosenoidal, 514
Series de Fourier, 493, 496
  series senoidales, cosenoidales, 514
Series infinitas, 365
Series infinitas, de constantes, 365
  de Fourier, 494
  de funciones, 389
  de potencias, 389, 409
  de Taylor, 409
Serie senoidal, 514
Seccionalmente suave, 319
Series de potencias, 409
Serie de Taylor, 409, 420, 422
Series trigonométricas, 493
Singularidad, 439
Sistema numérico, 19
Solenoidal, 258
Subsucesión, 47, 48
Schwarz, *ver* Cauchy
Sucesión, de funciones, 389
  de números, 43
  de vectores, 213
Sucesiones monótonas, 60
Suma parcial, 365
Suma de Riemann, 105, 303
Suma superior, 96, 299
Superficie, 228
  de nivel, 228
Superficie normal, 337, 338
Superficie orientable, 351
Superficie suave, 337
Supremum, 31
Substitución, de series de potencias, 432
  integración por, 114

T

Tangente, 80, 205
Tangente a una superficie, 338
Teorema de Arquímedes, 37 (C1)
Teorema de Bonnet, 118
Teorema de la curva de Jordan, 213
Teorema de Dedekind, 28
Teorema de DeMoivre, 436, 438 (A3)
Teorema de Dini, 405
Teorema de Eudoxo, 37 (C1)
Teorema fundamental del cálculo, 114
Teorema de la función implícita, 284
Teorema de Green, 327, 329, 331
Teorema de Perseval, 526
Teorema de Rolle, 83, 84
Teorema de Stokes, 349, 351
Teorema del valor medio de Cauchy, 153
Teorema del valor medio generalizado, 162
Términos (de series infinitas), 365
Topología, 209
Trabajo, 322

Transformaciones, 263
  conformes, 278 (B3)
  inversas, 264-275
  lineales, 264
  no singulares, 267
  singulares, 267
  topológicas, 280
Transformadas de Fourier, 521
Transformación inversa, 263
Transformación topológica, 280
  invariante, 280
Triple producto escalar, 183

V

Valor absoluto, 33, 434
Valor intermedio, propiedad de la derivada, 92 (C3)
  teorema del, 72
Valor límite, 139, 214
Valor principal de Cauchy, 449
Variación, 198
Variación acotada, 198
Volumen, 314
Vecindad, 29, 209
  agujerada, 29, 210
Vecindad agujerada, 29, 210
Vector binormal, 206
Vector gradiente, 244
Vector, 171
  de posición, 175
Vector unitario, 174
Vectores normales, 189
Velocidad, 206

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
13 DE SEPTIEMBRE DE 1991, EN LOS TALLERES DE
GRUPO IMPRESA
LAGO CHALCO 230, COL. ANÁHUAC
MÉXICO, D.F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 1 000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

517

OBRAS AFINES

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
H. E. Taylor y T. L. Wade

INTRODUCCION AL CALCULO
K. Kuratowski

CURSO DE CALCULO RAPIDO
D. Kleppner y N. Ramsey

MATEMATICAS AVANZADAS PARA INGENIERIA
Vols. I y II
E. Kreyszig

ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA
W. E. Boyce y R. C. DiPrima

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
C. Imaz y Z. Vorel

ALGEBRA SUPERIOR
M. J. Weiss y R. Dubisch

GEOMETRIA ANALITICA
con vectores y matrices
D. C. Murdoch